УДК 517.9

Т. Култаев

О построении частных решений системы линейных дифференциальных уравнений с почти периодическими коэффициентами

Рассматривается система линейных дифференциальных уравнений

$$dy/dt = AY + \mu \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k B_k(t) Y, \tag{1}$$

где элементами матриц $B_k(t)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, являются равномерно почти периодические функции. В качестве класса S будем рассматривать множества почти периодических функций.

Предполагаем, что матричный ряд в системе (1) сходится абсолютно и равномерно при $|\mu| < \mu_0$.

Рассмотрим порождающую систему с постоянными коэффициентами

$$dy/dt = AY. \tag{2}$$

Предположим, что характеристическое уравнение

$$f(z) \equiv \mathrm{Det}\,(Ez - A) \tag{3}$$

имеет простой корень $z = z_0$ и вещественные части других корней уравнения (3), отличных от $\mathrm{Re}\, z_0$.

Не теряя общности приложения можно предположить, что матрица A приведена к блочно-диагональному виду

$$A = \begin{pmatrix} z_0 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & A_2 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

где спектр матрицы A_1 лежит в полуплоскости $\mathrm{Re}\, z < \mathrm{Re}\, z_0$, а спектр матрицы A_2 — в полуплоскости $\mathrm{Re} z > \mathrm{Re}\, z_0$. Действительно, линейным стационарным преобразованием системы (1) можно привести матрицу A к виду (4).

Разобьем матрицу $B = B(t, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k B_k(t)$ на блоки, соответствующие разбиению матрицы A:

$$B(t, \mu) = \begin{pmatrix} B_{00}(t, \mu) & B_{01}(t, \mu) & B_{02}(t, \mu) \\ B_{10}(t, \mu) & B_{11}(t, \mu) & B_{12}(t, \mu) \\ B_{20}(t, \mu) & B_{21}(t, \mu) & B_{22}(t, \mu) \end{pmatrix}.$$

При этом систему уравнений (1) можно представить в виде

$$\begin{aligned} dW/dt &= z_0 W + \mu (B_{00} W + B_{01} U + B_{02} V), \\ dU/dt &= A_1 U + \mu (B_{10} W + B_{11} U + B_{12} V), \\ dV/dt &= A_2 V + \mu (B_{20} W + B_{21} U + B_{22} V), \end{aligned} \tag{5}$$

где W — скалярная переменная; U и V — векторы, размерности которых равны соответственно порядкам матриц A_1 и A_2.

Ищем частное решение системы (5) вида

$$W = l^{z_0 t} \Theta (t, \mu),\ U = P (t, \mu) W,\ V = Q (t, \mu) W, \tag{6}$$

где $Q (t, \mu)$ и $P (t, \mu)$ — ограниченные на всей оси (полуоси) векторы. При этом приходим к системе дифференциальных уравнений

$$d\Theta (t, \mu)/dt = \mu (B_{00} + B_{01} P + B_{02} Q) \Theta,$$

$$dP (t, \mu)/dt = (A_1 - E z_0) P + \mu (B_{10} + B_{11} P + B_{12} Q) - \mu Q (B_{00} + B_{01} P + B_{02} Q), \tag{7}$$

$$dQ (t, \mu)/dt = (A_2 - E z_0) Q + \mu (B_{20} + B_{21} P + B_{22} Q) - \mu Q (B_{00} + B_{01} P + B_{02} Q).$$

Учитывая, что спектр матрицы $A_1 - E z_0$ лежит в левой полуплоскости $\mathrm{Re} z < 0$, а спектр матрицы $A_2 - E z_0$ — в правой полуплоскости, получаем систему интегральных уравнений

$$\begin{aligned} P (t, \mu) = \mu \int_{-\infty}^{t} e^{(A_1 - E z_0)(t-\tau)} [B_{10} (\tau, \mu) + B_{11} (\tau, \mu) P (\tau, \mu) + \\ + B_{12} (\tau, \mu) Q (\tau, \mu) - P (\tau, \mu) B_{00} (\tau, \mu) + B_{01} (\tau, \mu) P (\tau, \mu) + \\ + B_{02} (\tau, \mu) Q (\tau, \mu))] \, d\tau, \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} Q (t, \mu) = - \mu \int_{t}^{\infty} e^{(A_2 - E z_0)(t-\tau)} [B_{20} (\tau, \mu) + B_{21} (\tau, \mu) P (\tau, \mu) + \\ + B_{22} (\tau, \mu) Q (\tau, \mu) - Q (\tau, \mu) (B_{00} (\tau, \mu) + B_{01} (\tau, \mu) P (\tau, \mu) + \\ + B_{02} (\tau, \mu) Q (\tau, \mu))] \, d\tau. \end{aligned}$$

Будем искать ограниченное на всей оси решение системы уравнений (8) методом последовательных приближений.

Пусть выполнены неравенства

$$\begin{gathered} \| \exp \{(A_1 - E z_0)(t - \tau)\} \| \leqslant C_1 e^{-\lambda_1 (t-\tau)}\ (t \geqslant \tau),\ C_1 \geqslant 1,\ \lambda_1 > 0, \\ \| \exp \{(A_2 - E z_0)(t - \tau)\} \| \leqslant C_2 e^{\lambda_2 (t-\tau)}\ (t \leqslant \tau),\ C_2 \geqslant 1,\ \lambda_2 > 0, \\ \sup_t \| B_{ks} (t, \mu) \| \leqslant \beta_{ks}\ (k, s = 0, 1, 2),\ |\mu| < \mu_0,\ -\infty < t < \infty. \end{gathered} \tag{9}$$

Используем метод последовательных приближений

$$P_{n+1} = \mu \int_{-\infty}^{t} e^{(A_1 - E z_0)(t-\tau)} [B_{10} + B_{11} P_n + B_{12} Q_n - P_n (B_{00} + B_{01} P_n + B_{02} Q_n)] \, d\tau, \tag{10}$$

$$\begin{aligned} Q_{n+1} = - \mu \int_{t}^{\infty} e^{(A_2 - E z_0)(t-\tau)} [B_{20} + B_{21} P_n + B_{22} Q_n - \\ - Q_n (B_{00} + B_{01} P_n + B_{02} Q_n)] \, d\tau, \end{aligned}$$

положив

$$P_0 \equiv 0,\ Q_0 \equiv 0,\ P = \lim_{n \to \infty} P_n,\ Q = \lim_{n \to \infty} Q_n. \tag{11}$$

Найдем сначала условия ограниченности последовательности $P_n (t, \mu)$, $Q_n (t, \mu)$.

Введем обозначения при $n = 0, 1, 2 \dots$

$$\rho_n = \sup_t \| P_n(t, \mu) \|, \; q_n = \sup_t \| Q_n(t, \mu) \|, \; -\infty < t < \infty, \; |\mu| < \mu_0. \quad (12)$$

Из уравнений (10) с учетом формул (9), (12) получим неравенства

$$\rho_{n+1} \leqslant \frac{|\mu| C_1}{\lambda_1} [\beta_{10} + \beta_{11}\rho_n - \beta_{12}q_n + \rho_n(\beta_{00} + \beta_{01}\rho_n + \beta_{02}q_n)],$$

$$q_{n+1} \leqslant \frac{|\mu| C_2}{\lambda_2} [\beta_{20} + \beta_{21}\rho_n + \beta_{22}q_n + q_n(\beta_{00} + \beta_{01}\rho_n + \beta_{02}q_n)]. \quad (13)$$

Чтобы оценить сверху положительное решение неравенств (13), мажорируем правые части неравенств (13):

$$\beta_0 = \max\left\{\frac{C_1\beta_{10}}{\lambda_1}; \frac{C_2\beta_{20}}{\lambda_2}\right\}, \quad \beta_1 = \max\left\{\frac{C_1B_{11}}{\lambda_1}; \frac{C_2\beta_{21}}{\lambda_2}\right\} +$$

$$+ \max\left\{\frac{C_1\beta_{12}}{\lambda_1}; \frac{C_2\beta_{22}}{\lambda_2}\right\} + \max\left\{\frac{c_1\beta_{00}}{\lambda_1}; \frac{c_2\beta_{00}}{\lambda_2}\right\}, \quad (14)$$

$$\beta_2 = \max\left\{\frac{C_1\beta_{01}}{\lambda_1}; \frac{C_2\beta_{01}}{\lambda_2}\right\} + \max\left\{\frac{C_1\beta_{02}}{\lambda_1}; \frac{C_2\beta_{02}}{\lambda_2}\right\}.$$

При этом получаем неравенство

$$r_{n+1} \leqslant |\mu| (\beta_0 + \beta_1 r_n + \beta_2 r^2), \; \max\{\rho_n q_n\} \leqslant r_n. \quad (15)$$

Неравенство (15) будет иметь положительное решение при условии $(1 - |\mu|\beta_1)^2 - 4|\mu|^2\beta_0\beta_2 \geqslant 0$, которое в свою очередь выполнено при $|\mu| \leqslant \mu_1$, где

$$\mu_1 = \min\{(\beta_1 + 2\sqrt{\beta_0\beta_2})^{-1}; \; \mu_0)\}. \quad (16)$$

Таким образом, последовательные приближения $P_n(t, \mu)$, $Q_n(t, \mu)$ ограничены на всей оси, если выполнено неравенство $|\mu| \leqslant \mu_1$. При выполнении неравенства $|\mu| < \mu_1$ последовательность матриц $P_n(t, \mu)$, $Q_n(t, \mu)$ равномерно сходится на всей оси.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Если спектры матриц* A_1, A_2 *лежат соответственно левее и правее прямой* $\operatorname{Re} z = \operatorname{Re} z_0$, *то при* $|\mu| < \mu_1$, *существует частное решение системы* (5), *представимое в виде*

$$W = e^{z_0 t}\Theta(t, \mu), \; U = P(t, \mu) e^{z_0 t}\Theta(t, \mu), \; V = Q(t, \mu) e^{z_0 t}\Theta(t, \mu), \quad (17)$$

где $P(t, \mu)$, $Q(t, \mu) \in S$, *а переменная* $\Theta(t, \mu)$ — *решение линейного дифференциального уравнения первого порядка*

$$d\Theta(t, \mu)/dt = \mu(B_{00}(t, \mu) + B_{01}(t, \mu) P(t, \mu) + B_{02}(t, \mu) Q(t, \mu)) Q(t\mu) \quad (18)$$

с почти периодическим коэффициентом класса S.

Теорема 2. *Если матрица* $B(t, \mu)$ *в системе* (1) *принадлежит классу* S, *то при достаточно малых значениях* $|\mu|$ *общее решение системы* (1) *представимо в виде*

$$Y = C(t, \mu) \exp\left\{\int_0^t H(t, \mu)\, dt\right\} C, \quad C = \text{const}, \quad (19)$$

где матрицы $C(t, \mu)$, $H(t, \mu)$ *принадлежат классу* S, $H(t, \mu)$ — *диагональная матрица.*

Теорема 3. *Пусть все корни* $z_1, z_2, \dots, z_m$ *характеристического уравнения* (3) *порождающей системы при* $\mu = 0$ *имеют различные вещественные части. Если матрица* $B(t, \mu)$ *в системе* (1) *разлагается в* *равномерно и абсолютно сходящийся ряд* $B(t, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k B_k(t)$, *где элементы матриц* $B_k(t)$ *— почти периодические функции, то фундаментальная матрица* $N(t, \mu)$ *решения системы* (1) *представима в виде* $N(t, \mu) = C(t, \mu) \exp\left\{\int_0^t H(t, \mu)\, dt\right\}$, *где матрицы* $C(t, \mu)$, $H(t, \mu)$ *разлагаются при достаточно малых значениях* $|\mu|$ *в степенные ряды* $C(t, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k C_k(t)$, $H(t, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k H_k(t)$, *где элементы* $C_k(t)$, $H_k(t)$ *— почти периодические функции,* $H(t, \mu)$ *— диагональная матрица.*

Полученный результат пересекается с выводами И. Н. Блинова [2, 3], методы отщепления рассматривались в работах [4, 5].

1. *Левитан Б. М.* Почти периодические функции.— М. : Гостехтеоретиздат, 1953.— 396 с.
2. *Блинов И. Н.* Аналитическое представление решения системы линейных дифференциальных уравнений с почти периодическими коэффициентами, зависящими от параметра // Диф. уравнения.— 1965.— 1, № 8.— С. 1042—1058.
3. *Блинов И. Н.* Правильность одного класса линейных систем с почти периодическими коэффициентами // Там же.— 1967.— 3, № 9.— С. 1461—1470.
4. *Митропольский Ю. А.* Метод усреднения в нелинейной механике.— Киев : Наук. думка, 1971.— 440 с.
5. *Самойленко А. М., Ронто В. А.* Определение начальных значений решений дифференциальных уравнений при периодических и многоточечных краевых условиях // Электрон. моделирование.— 1981.— № 1.— С. 11—15.

Каршин. фил. Ташкент. ин-та инженеров
ирригации и механизации сель. хоз-ва

Получено 28.05.85,
после доработки — 09.10.85