УДК 512.546

В. С. Чарин (Нац. ун-т им. Т. Шевченко, Киев)

К ТЕОРИИ ГРУПП С ОБОБЩЕННЫМ УСЛОВИЕМ МИНИМАЛЬНОСТИ ДЛЯ ЗАМКНУТЫХ ПОДГРУПП

We prove that a topological Abelian locally compact group with the generalized minimality condition for closed subgroups is a group of one of the following types: 1) a group with the minimality condition for closed subgroups; 2) an additive group of the J_p-ring of integer -adic numbers; 3) an additive group of the R_p field of p-adic numbers (p is a prime number).

Доведено, що топологічна абелева локально компактна група з узагальненою умовою мінімальності для замкнених підгруп є групою одного з наступних типів: 1) група з умовою мінімальності для замкнених підгруп; 2) адитивна група J_p — кільця цілих p-адичних чисел; 3) адитивна група R_p поля p-адичних чисел (p — просте число).

Специалистам по теории групп хорошо известны многочисленные содержательные результаты, полученные С. Н. Черниковым о группах, удовлетворяющих условию минимальности для подгрупп различного типа (для любых подгрупп, для абелевых подгрупп и т. д.).

Топологические группы с условием минимальности для замкнутых подгрупп изучались В. М. Глушковым [1, 2]. Им положено начало распространению теории С. Н. Черникова на локально компактные локально разрешимые группы с этим условием.

Для топологических групп вводится более широкое условие подобного типа [3].

Определение. *Будем говорить, что топологическая группа G удовлетворяет* ***обобщенному условию минимальности*** *для замкнутых подгрупп, если любая убывающая последовательность ее замкнутых подгрупп*

$$G_1 \supset G_2 \supset \ldots \supset G_n \supset G_{n+1} \supset \ldots \tag{S}$$

либо содержит конечное число подгрупп, либо, будучи бесконечной, содержит сколь угодно малые подгруппы.

При этом будем говорить, что бесконечная убывающая последовательность (S) содержит сколь угодно малые подгруппы, если для произвольной окрестности U единичного элемента группы G найдется такое натуральное число m, что $G_m \subseteq U$ и, значит, $G_n \subseteq U$ для всех номеров $n \geq m$.

В дальнейшем обобщенное условие минимальности будем записывать кратко — ОУМ. В частности, когда любая последовательность (S) имеет лишь конечное число подгрупп, это ***условие минимальности*** (кратко — УМ) для замкнутых подгрупп.

В [3] начато изучение строения некоторых типов топологических групп, удовлетворяющих ОУМ для замкнутых подгрупп. Намеченное в ней доказательство теоремы очень краткое и местами требуются разъяснения (особенно для абелевых групп). В настоящей статье дается новое и полное доказательство теоремы и новое доказательство ее для абелевых групп. В работе приняты следующие обозначения: $C = \mathbb{Z}^+$ — аддитивная группа кольца $\mathbb{Z}$ целых чисел; $J_p = \mathbb{Z}_p^+$ — аддитивная группа кольца $\mathbb{Z}_p$ целых p-адических чисел; R_p — аддитивная группа поля Q_p p-адических чисел (p — простое число). Для любого целого числа n обозначаем $p^n J_p = \{v \in R_p \colon v = p^n x,\ v \in J_p\}$. $D = R^+$ — аддитивная группа поля R вещественных чисел с естественной топологией;

D^m — прямая сумма конечного числа m экземпляров группы D; K — фактор-группа D/C; K^m — прямая сумма m экземпляров группы K (торовидная группа размерности m).

Группы J_p и R_p предполагаются снабженными p-адической топологией, в которой группа J_p-компактна.

Сформулируем используемые далее известные факты.

1. Если топологическая группа G удовлетворяет ОУМ для замкнутых подгрупп и H — ее нетривиальная инвариантная замкнутая подгруппа, то фактор-группа G/H удовлетворяет УМ для замкнутых подгрупп [3].

2. Локально компактная абелева группа G, удовлетворяющая УМ для замкнутых подгрупп, разлагается в прямую сумму $G = K^m \oplus H$, где H — дискретная подгруппа с УМ для подгрупп.

3. Если в локально компактной группе G инвариантная компактная подгруппа H и фактор-группа G/H удовлетворяет УМ для замкнутых подгрупп, то и группа G удовлетворяет такому же УМ [1].

Везде под подгруппами топологической группы подразумеваются замкнутые подгруппы, и слово „замкнутая" часто опускается.

Лемма 1. *Пусть G — дискретная периодическая абелева группа. Тогда среди ее собственных подгрупп (не совпадающих с G) найдется такая подгруппа H, что фактор-группа G/H либо циклическая простого порядка p, либо квазициклическая типа p^∞ для некоторого простого числа p.*

Доказательство. Поскольку периодическая абелева группа разлагается в прямую сумму силовских подгрупп, можно сразу полагать, что G — нетривиальная p-группа для некоторого простого числа p.

Пусть N — нижний слой этой группы. Если все элементы из N имеют бесконечную высоту [4, с. 144], то группа G полная и, значит, разлагается в прямую сумму примарных подгрупп типа p^∞. Выделим одно прямое слагаемое P. Все остальные слагаемые порождают подгруппу H_1, фактор-группа G/H_1 по которой изоморфна подгруппе P типа p^∞.

Допустим, что среди элементов нижнего слоя N имеется хотя бы один элемент a конечной высоты. Обозначим его высоту через n. Согласно лемме Прюфера [4, с. 152] этот элемент a содержится в циклическом прямом слагаемом порядка p^{n+1} в группе G. Отсюда следует существование такой подгруппы H_2 в G, фактор-группа H_2 по которой — циклическая группа порядка p.

Лемма 2. *Пусть топологическая группа G абелева и содержит подгруппу H, изоморфную группе J_p, p — простое число, фактор-группа G/H по которой — циклическая группа простого порядка q и $q \neq p$. Тогда в G имеется циклическая подгруппа порядка q.*

Доказательство. Поскольку аддитивная группа J_p кольца целых p-адических чисел компактна, то и группа G, будучи объединением конечного числа классов смежности по H, является компактной.

Обозначим через $[w]$ образующий элемент циклической фактор-группы G/H с представителем $w \in G$. Тогда $q[w] = [0]$ и $qw = h \in H$. Если $h = 0$, то w — требуемый элемент простого порядка q. Допустим $h \neq 0$. Поскольку $1/q$ является p-адической единицей кольца $\mathbb{Z}_p$, то $x = \frac{1}{q} h \in H$. Тогда $h = qw = qx$, $q(w-x) = 0$ и $v = w - x \neq 0$. Элемент $v \notin H$ и $qv = 0$. Он и порождает в G циклическую подгруппу порядка q.

Лемма 3. *Пусть G — абелева компактная и связная группа, удовлетворяющая ОУМ для замкнутых подгрупп. Тогда группа ее характеров — дискретная группа без кручения конечного ранга.*

Доказательство. Группа Γ характеров компактной связной группы G — дискретна и без кручения. Следует лишь установить конечность ее ранга (о ранге см. [4, с. 116]). Доказательство ведем методом от противного.

Предположим, что ранг группы Γ бесконечен. Это значит, что среди ее подгрупп, разложимых в прямую сумму конечного числа бесконечных циклических подгрупп, не имеется подгрупп с конечным максимальным числом таких слагаемых. Поэтому в Γ найдется бесконечная возрастающая последовательность

$$\Delta_1 \subset \Delta_2 \subset \ldots \subset \Delta_n \subset \Delta_{n+1} \subset \ldots \tag{1}$$

свободных подгрупп, построенных следующим образом: $\Delta_1 = \{a_1\}$, $\Delta_2 = \{a_1\} \oplus \{a_2\}, \ldots, \Delta_{n+1} = \Delta_n \oplus \{a_{n+1}\}, \ldots$, где бесконечная последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ элементов группы Γ порождает циклические подгруппы бесконечных порядков. В совокупности они порождают подгруппу $\Delta = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n$, разложимую в прямую сумму счетного множества циклических подгрупп.

Рассмотрим две взаимно исключающие возможности: 1) $\Gamma = \Delta$ и 2) $\Gamma \neq \Delta$.

Остановимся на первой из них. Пусть при этом $H_n = (G, \Delta_n)$ — аннуляторы подгрупп Δ_n в G. Они составляют бесконечную строго убывающую последовательность

$$\ldots \subset H_{n+1} \subset H_n \subset \ldots \subset H_2 \subset H_1. \tag{2}$$

Каждая фактор-группа G/H_n — группа характеров подгруппы Δ_n, поэтому G/H_n — группа типа K^n — n-мерная торовидная группа. Поскольку $\Gamma = \Delta$, то $\bigcap_{n=1}^{\infty} H_n = \{0\}$.

В группе Γ подгруппа Δ_1 выделяется прямым слагаемым: $\Gamma = \Delta_1 \oplus \Delta'$, где Δ' — прямая сумма циклических групп $\{a_2\}, \{a_3\}, \ldots, \{a_n\}, \ldots$.

Обозначим через F_1 группу характеров группы Δ_1. Это группа типа K^1, т. е. $F_1 \simeq K^1 = D/C$. Обозначим через F' группу характеров группы Δ'. Тогда группой характеров группы $\Delta = \Delta_1 \oplus \Delta'$ будет прямая сумма $F_1 \oplus F'$, т. е. группа $G = F_1 \oplus F'$. В группе F_1 имеется элемент $f \neq 0$ простого порядка p, $pf = 0$. Он не входит ни в одну из подгрупп H_n последовательности (2), так как не аннулирует элемент a_1 — один из порождающих элементов каждой подгруппы последовательности (1).

Все подгруппы $X_n = \{f\} + H_n$ компактны и составляют последовательность

$$\ldots \subseteq X_{n+1} \subseteq X_n \subseteq \ldots \subseteq X_2 \subseteq X_1. \tag{3}$$

Покажем, что она строго убывающая.

Предположим, что $X_2 = \{f\} + H_2 = \{f\} + H_1$. Это означает следующее: для каждого числа $k = 0, 1, 2, \ldots, p-1$ и любого $h_1 \in H_1$ найдется такое число l из того же набора чисел $0, 1, 2, \ldots, p-1$ и такой элемент $h_2 \in H_2$, что $kf + h_1 = lf + h_2$, поэтому $h_1 - h_2 = (l-k)f$. Для определенности считаем $l - k \geq 0$. Если $l - k > 0$, то $l - k \not\equiv 0 \pmod{p}$ и тогда $f \in H_1$, что невозможно для выбранного элемента f. Поэтому $l - k = 0$, $h_1 = h_2$ и $h_1 \in H_2$ для любого элемента $h_1 \in H_1$. Значит, $H_1 = H_2$, что также исключается. Таким образом, показано строгое включение $X_2 \subset X_1$.

Такое включение верно для любой пары рядом стоящих членов ряда (3): $X_{n+1} \subset X_n$, $n = 1, 2, \ldots$.

Итак, последовательность (3) строго убывающая. Вместе с тем имеем включение $\{f\} \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$. Это означает, что бесконечная последовательность (3) не содержит сколь угодно малых подгрупп. Получили противоречие.

Предположим, что $\Delta \neq \Gamma$. Пусть $H = (G, \Delta)$ — аннулятор подгруппы Δ. Тогда $H \neq \{0\}$. Фактор-группа $\overline{G} = G/H$ — группа характеров подгруппы Δ и $\overline{G} \neq \{0\}$. Если $\overline{H}_n = \left(\overline{G}, \Delta_n\right)$ — аннуляторы подгруппы Δ_n, $n = 1, 2, \ldots$, в $\overline{G}$, то они образуют строго убывающую последовательность

$$\ldots \subset \overline{H}_{n+1} \subset \overline{H}_n \subset \ldots \subset \overline{H}_2 \subset \overline{H}_1.$$

По условию леммы группа G удовлетворяет ОУМ для замкнутых подгрупп, а поэтому фактор-группа $G/H = \overline{G}$ должна удовлетворять УМ для замкнутых подгрупп. Снова получено противоречие. Лемма доказана.

Теорема 1. *Абелева компактная связная группа G, удовлетворяющая ОУМ для замкнутых подгрупп, является конечномерной торовидной группой (группой типа K^r, r — натуральное число).*

Доказательство. Обозначим через Γ группу характеров группы G (Γ — дискретная группа без кручения). Ввиду леммы 3 ранг ее конечен. Обозначим этот ранг через r. Это означает, что в Γ содержится свободная абелева подгруппа Б, разложимая в прямую сумму r экземпляров бесконечной циклической группы C (группа Б имеет тип C^r), фактор-группа $\Gamma/$Б по которой — периодическая.

Далее доказательство разделим на части.

I. Пусть Δ — некоторая собственная подгруппа группы Γ, $\Delta \neq \Gamma$, $H = (G, \Delta)$ — ее аннулятор. Тогда $H \neq \{0\}$ и фактор-группа $\overline{G} = G/H$ является группой характеров группы Δ.

Поскольку по условию теоремы G удовлетворяет ОУМ, то $\overline{G}$ удовлетворяет УМ ($\overline{G}$ — связная группа). Из теоремы Глушкова о строении локально компактных абелевых групп, удовлетворяющих УМ, следует, что $\overline{G}$ — группа типа K^m. Тогда двойственная ей группа Δ — свободная абелева группа ранга m. При этом $m \leq r$.

Ниже будем накладывать на подгруппу Δ более жесткие условия.

II. Для подгруппы Б, определенной выше, представляются две взаимно исключающие возможности: либо Б $= \Gamma$, либо Б $\neq \Gamma$.

В первом случае группа G — группа характеров свободной абелевой группы Γ ранга r (группы типа C^r) и, значит, G — группа типа K^r. Это и утверждает теорема.

Во втором случае $Б \neq \Gamma$ фактор-группа $\overline{\Gamma} = \Gamma / Б$ — нетривиальная периодическая группа. Ввиду леммы 1 она имеет собственную подгруппу $\overline{\Delta}$, фактор-группа $\overline{\Gamma} / \overline{\Delta}$ по которой — либо циклическая группа простого порядка p, либо квазициклическая типа p^{∞} для некоторого простого числа p. Если Δ — полный прообраз $\overline{\Delta}$ в группе Γ, то $Б \subseteq \Delta$ и ранг подгруппы Δ равен рангу группы Γ; при этом фактор-группа Γ / Δ — либо циклическая порядка p, либо квазициклическая типа p^{∞}.

III. Предположим, что фактор-группа Γ / Δ — циклическая порядка p.

Согласно части I доказательства собственная подгруппа Δ — свободная абелева группа некоторого ранга m:

$$\Delta = \{f_1\} \oplus \{f_2\} \oplus \ldots \oplus \{f_m\},$$

где $\{f_k\}$ — бесконечная циклическая группа с образующим элементом f_k, $k = 1, 2, \ldots, m$.

Для выбранной подгруппы Δ выполняется равенство $m = r$. Если образующим элементом p-го порядка фактор-группы Γ / Δ выбрать $[f]$ с представителем f этого класса смежности, то $pf \in \Delta$. Конечное множество $\langle f_1, f_2, \ldots, f_r, f \rangle$ элементов порождает всю группу Γ, причем $pf = k_1 f_1 + k_2 f_2 + \ldots + k_r f_r$, где $k_1, k_2, \ldots, k_r$ — целые числа.

Согласно основной теореме об абелевых группах [4, с. 122] группа Γ разлагается в прямую сумму циклических подгрупп. Число слагаемых в этом разложении равно рангу r группы Γ.

Итак, группа Γ имеет тип C^r, а группа ее характеров — группа G — тип K^r.

IV. Пусть фактор-группа Γ / Δ — квазициклическая типа p^{∞}.

Если $H = (G, \Delta)$ — аннулятор подгруппы Δ, то согласно теореме о взаимности аннуляторов $\Delta = (\Gamma, H)$ и подгруппа H изоморфна группе характеров группы Γ / Δ. Это означает, что H изоморфна аддитивной группе J_p. Вместе с тем фактор-группа $\overline{G} = G / H$, будучи группой характеров подгруппы Δ, является группой типа K^r по тем же соображениям, что и в предыдущей части нашего доказательства.

Группа $\overline{G}$ содержит элемент любого простого порядка q, $q \neq p$. Согласно лемме 2 в группе G существует элемент w некоторого простого порядка $q \neq p$. С помощью подгруппы $\{w\}$ и подгруппы H порождаем сумму $W = \{w\} + H$, где W — компактная подгруппа, $W = \{w\} \oplus H$. Подгруппа H изоморфна группе J_p, имеет строго убывающую последовательность $\ldots \subset H_{n+1} \subset H_n \subset \ldots \subset H_2 \subset H_1$ подгрупп, где $H_n \simeq p^n J_p$. Последовательность подгрупп $W_n = \{w\} \oplus H_n$, $n = 1, 2, \ldots$, также строго убывающая: $\ldots \subset W_{n+1} \subset W_n \subset \ldots \subset W_2 \subset W_1$. Она не содержит сколь угодно малых подгрупп, так как $\{w\} \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} W_n$. Значит, группа G не удовлетворяет ОУМ для замкнутых подгрупп.

Вторая возможность, когда фактор-группа Γ / Δ является группой типа p^{∞}, приводит к противоречию с условием теоремы. Теорема доказана.

Следствие. Абелева локально компактная связная группа G, удовлетворяющая ОУМ для замкнутых подгрупп, это группа типа K^r (торовидная группа конечной размерности r).

Доказательство. Из теоремы о структуре абелевых локально компактных групп [5, с. 278] непосредственно следует, что связная локально компактная абелева группа G разлагается в прямую сумму

$$G = D^n \oplus H,$$

где D^n — прямая сумма n экземпляров аддитивной группы D действительных чисел; H — связная компактная группа.

Если же G удовлетворяет ОУМ для замкнутых подгрупп, то в этой прямой сумме первое слагаемое тривиально (равно $\{0\}$). В противном случае в этом слагаемом D^n найдется бесконечная дискретная циклическая подгруппа C, не удовлетворяющая ОУМ для подгрупп.

Итак, $G \equiv H$ — связная компактная группа. Согласно теореме 1 она изоморфна торовидной группе K^r.

Теорема 2. *Пусть связная компонента нуля G_0 абелевой локально компактной группы G нетривиальна и G удовлетворяет ОУМ для замкнутых подгрупп. Тогда группа G удовлетворяет УМ для замкнутых подгрупп.*

Доказательство. Ввиду следствия из теоремы 1 связная компонента G_0 нуля группы изоморфна торовидной группе K^r и, следовательно, удовлетворяет УМ для замкнутых подгрупп. Фактор-группа G/G_0 также удовлетворяет УМ для таких подгрупп. Тогда согласно теореме Глушкова сама группа G удовлетворяет УМ для замкнутых подгрупп.

Теорема 3. *Абелева компактная вполне несвязная группа G, удовлетворяющая ОУМ для замкнутых подгрупп, либо конечна, либо изоморфна группе J_p, p — простое число.*

Доказательство. Группа Γ характеров группы G — дискретная периодическая группа. Пусть Δ — некоторая нетривиальная собственная подгруппа группы Γ и $H = (G, \Delta)$ — ее аннулятор. Тогда $H \neq \{0\}$ и фактор-группа $\overline{G} = G/H$ — группа характеров подгруппы Δ. Группа $\overline{G}$ компактна и вполне несвязна. Кроме того, она удовлетворяет УМ для замкнутых подгрупп. В силу теоремы Глушкова о строении абелевых групп с таким УМ группа $\overline{G}$ — дискретна. Будучи компактной, она может быть только конечной. Поэтому и подгруппа Δ группы Γ конечна.

Любая собственная подгруппа дискретной группы Γ конечна. Это возможно лишь тогда, когда Γ — либо конечная группа, либо изоморфна квазициклической группе типа p^∞ (p — простое число). Однако группа G, двойственная группе Γ, является либо конечной группой, либо изоморфной группе J_p.

Лемма 4. *Пусть топологическая группа G — абелева, без элементов конечного порядка и содержит подгруппу H, изоморфную группе J_p, фактор-группа G/H по которой — циклическая группа (простого) порядка p. Тогда отображение $\chi : z \to pz$, $z \in G$, является изоморфизмом G на H.*

Доказательство. Обозначим образующий элемент фактор-группы $\overline{G} = G/H$ через $[w]$, где w — некоторый представитель соответствующего класса смежности. Тогда $pw = h \in H$. Элемент h ввиду изоморфизма $H \simeq J_p$ рассматриваем как элемент кольца $\mathbb{Z}_p$. Он представим в виде $h = p^n e$, где n — натуральное число; e — p-адическая единица кольца.

Предположим, что $n \geq 1$. Тогда $h = pa$, где a — целое p-адическое число. Выполняется равенство $p(w-a) = 0$, т. е. $v = w - a$ — элемент порядка p группы G. Согласно условию леммы группа G не имеет таких элементов. Значит, $n = 0$ и $pw = e$ — p-адическая единица, т. е.

$$e = k + pf, \tag{4}$$

где k — одно из чисел $1, 2, \ldots, p-1$ и $f \in \mathbb{Z}_p$.

Отметим, что группа G компактная. Отображение $\chi : G \to H$, определяемое законом $\chi(z) = pz$, $z \in G$, непрерывно и гомоморфно. Его ядро состоит из одного элемента — нулевого. Оно является мономорфизмом. Следует установить, что χ — эпиморфизм.

Для простоты будем отождествлять группу H с J_p: $H = J_p$.

Нужно установить, что для любого элемента $y \in J_p$ существует такой элемент $z \in G$, что $\chi(z) = y$.

Если $y \in J_p^1 = pJ_p$, то имеется $z \in J_p$, а значит, имеется $z \in G$ такое, что $\chi(z) = y$.

Пусть $y \in J_p$ и $y \notin J_p^1$. Это означает, что y является p-адической единицей, т. е.

$$y = l + pq, \tag{5}$$

где l — одно из целых чисел $1, 2, \ldots, p-1$ и $g \in \mathbb{Z}_p$.

Для целых чисел k и l из равенств (4) и (5) найдется такое натуральное число $m \not\equiv 0 \pmod p$, что

$$mk = l + pL, \quad l \in \mathbb{Z}. \tag{6}$$

Тогда $mpw = me = m(k+pf) = mk + pmf = l + p(L+mf) = l + pg'$, где $g' = L + + mf \in \mathbb{Z}_p$, т. е.

$$mpw = l + pg', \quad g' \in \mathbb{Z}_p. \tag{7}$$

Класс $[mw]$ является также образующим элементом группы $\overline{G} = G/H$. В этом классе выделим элемент $z = mw + (g - g')$. Для него

$$\chi(z) = pz = pmw + p(g-g') = l + pg' + p(g-g') = l + pg = y,$$

где y — образ элемента z при отображении χ.

Известно, что взаимно однозначное непрерывное отображение компактного пространства на хаусдорфово пространство является гомеоморфизмом этих пространств. В данном случае для компактной группы G отображение χ — изоморфизм топологических групп G и H.

Замечание. Из доказательства следует, в частности, существование такого элемента $\varepsilon \in G$, для которого $\chi(\varepsilon) = 1$, т. е.

$$p\varepsilon = 1. \tag{8}$$

Это означает, что ε выполняет роль, которую выполняет число $1/p$ в поле p-адических чисел. В этом смысле рассматриваемая в лемме группа G алгебраически и топологически тождественна аддитивной группе

$$p^{-1}J_p = \left\{ z \in R_p : z = \frac{1}{p}y,\ y \in J_p \right\}.$$

Лемма 5. *Пусть абелева группа G содержит подгруппу H, изоморфную группе J_p, фактор-группа G/H по которой разлагается в прямую сумму конечного числа $m \geq 2$ циклических подгрупп простого порядка p. Тогда в G имеются элементы конечного порядка.*

Доказательство. Ограничимся случаем, когда группа $\overline{G} = G/H$ разлагается в прямую сумму двух циклических подгрупп простого порядка p:

$$\overline{G} = \overline{U} \oplus \overline{V},$$

где $\overline{U}$ — циклическая подгруппа с образующим элементом $[u]$, $\overline{V}$ — аналогичная подгруппа с образующим элементом $[v]$, u и v — некоторые представители соответствующих классов смежности по подгруппе H, $pu = f \in H$, $pv = g \in H$.

Рассмотрим две взаимно исключающие возможности.

I. Допустим, что или $f = pa$ или $g = pb$, где $a, b \in \mathbb{Z}_p$, a, b — элементы группы J_p. Как и в самом начале доказательства предыдущей леммы в группе G обнаруживаются элементы (хотя бы один) порядка p.

II. Пусть f и g — p-адические единицы:

$$f = k + pa, \quad g = l + pb,$$

где k и l — целые числа из набора $1, 2, \ldots, p-1$ и $a, b \in \mathbb{Z}_p$. Найдется такое натуральное число $m \not\equiv 0 \pmod p$, что $mk \equiv l \pmod p$. Можно считать, что m — одно из чисел $1, 2, \ldots, p-1$.

Элемент $w = mu$ группы G определяет класс смежности $[w]$, который можно считать образующим элементом циклической группы $\overline{U}$. И тогда

$$pw = pmu = mf = pk + pma = l + pa',$$

где $a' \in \mathbb{Z}_p$. Итак, имеем равенства

$$pw = l + pa', \quad pv = l + pb, \quad l \not\equiv 0 \pmod p; \quad a', b \in \mathbb{Z}_p.$$

В классе $[w]$ выделим другой элемент $w' = w + (b - a')$, $[w] = [w']$. Для него выполняются неравенства

$$pw' = pw + p(b - a') = l + pa' + p(b - a') = l + pb = pv.$$

Следовательно, $pw' = pv$ и, значит, $p(w' - v) = 0$. Элемент $t = w' - v$ имеет следующие свойства:

$$t \in G, \quad pt = 0, \quad t \notin H.$$

Группа G имеет элементы p.

Теорема 4. *Локально компактная абелева группа* G *с ОУМ для замкнутых подгрупп принадлежит одному из следующих типов групп:*

1) *группа с УМ для замкнутых подгрупп; она разлагается в прямую сумму конечной группы* F, *конечного числа дискретных квазициклических групп типа* p_i^{∞} (p_i — *простые числа*) *и группы типа* K^m;

2) *группа, изоморфная группе* J_p, p — *простое число;*

3) *группа, изоморфная группе* R_p, p — *простое число.*

Доказательство. Пусть G_0 — связная компонента нуля группы G. Если $G_0 \neq \{0\}$, то согласно теореме 2 группа G удовлетворяет УМ для замкнутых подгрупп. Ввиду теоремы Глушкова о строении локально компактных абелевых групп с УМ группа G принадлежит типу 1.

Рассматриваем вторую возможность : $G_0 = \{0\}$, т. е. G вполне несвязна. Тогда во всякой окрестности ее нулевого элемента найдется открытая компактная подгруппа H. Фактор-группа G/H — дискретная группа. По условию теоремы группа G удовлетворяет ОУМ. Этому же условию удовлетворяет и подгруппа H. Согласно теореме 3 группа H является либо конечной группой, либо изоморфна группе J_p для некоторого простого числа p.

Если H — конечная группа, то G — дискретная группа и удовлетворяет УМ. Она принадлежит типу 1 теоремы.

Пусть H изоморфна группе J_p. Прежде всего в этом случае группа G не содержит нетривиальных элементов конечного порядка. Предположим обратное. Пусть в ней найдется элемент $w \neq 0$ конечного порядка. Тогда циклическая подгруппа $\{w\}$ и H порождают подгруппу $W = \{w\} \oplus H$, которая не удовлетворяет ОУМ. Это устанавливается уже известным нам способом. Подгруппа H имеет бесконечную убывающую цепь подгрупп $\ldots \subset H_n \subset \ldots \subset H_2 \subset \subset H_1 \subset H_0$, где $H_n = p^n J_p$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Совокупность подгрупп $W = \{w\} \oplus \oplus H_n$ также строго убывающая и для всех $n = 1, 2, \ldots$ выполняется включение $\{w\} \subset W_n$. Это противоречит ОУМ.

Фактор-группа G/H дискретна и удовлетворяет УМ. Поэтому она разлагается в прямую сумму конечного числа циклических и квазициклических групп по некоторым простым числам. Предположим, что среди них имеются слагаемые, являющиеся циклическими q-группами для простого числа $q \neq p$. Тогда согласно лемме 2 в группе G найдется элемент простого порядка q. Как было установлено, это невозможно. Таким образом, все прямые слагаемые фактор-группы G/H являются p-группами. Если число таких слагаемых в прямой сумме не меньше 2, то по лемме 5 в группе G найдется элемент порядка p. Это снова невозможно. Значит, фактор-группа G/H дискретна и является либо циклической p-группой, либо квазициклической типа p^{∞}.

Если G/H — конечная циклическая p-группа, то в G имеется конечная возрастающая последовательность

$$H = G_0 \subset G_1 \subset G_2 \subset \ldots \subset G_n = G$$

подгрупп с циклическими факторами G_{i+1}/G_i порядка p, $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Из леммы 4 следует, что группа G изоморфна аддитивной группе J_p.

Если G/H — квазициклическая группа типа p^{∞}, то в G имеется бесконечная возрастающая последовательность

$$H = G_0 \subset G_1 \subset G_2 \subset \ldots \subset G_n \subset G_{n+1} \subset \ldots \tag{G}$$

подгрупп с циклическими факторами G_{n+1}/G_n порядка p. При этом $G = \bigcup_{n=0}^{\infty} G_n$.

В последнем случае группа G изоморфна аддитивной группе R_p поля p-адических чисел.

В силу изоморфизма $H \simeq J_p$ далее ради простоты будем полагать всюду $H = H_0 = J_p$.

Согласно лемме 4 все члены последовательности G изоморфны группе J_p. Из той же леммы непосредственно следует (см. замечание к этой лемме), что в группе G имеется бесконечная последовательность элементов

$$\varepsilon_0 = 1, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{n-1}, \varepsilon_n, \ldots$$

со следующим свойством:

$$p\varepsilon_n = \varepsilon_{n-1}, \tag{9}$$

где $\varepsilon_n \in G_n$, $\varepsilon_n \notin G_{n-1}$ для всех $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Последовательности G сопоставим бесконечную последовательность подгрупп

$$H = H_0 \subset H_1 \subset H_2 \subset \ldots \subset H_n \subset H_{n+1} \subset \ldots \tag{H}$$

группы R_p, где

$$H_n = p^{-n}J_p = \left\{ v \in R_p : v = \frac{1}{p^n}x,\ x \in J_p \right\}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots; \quad H = H_0 = J_p.$$

При этом $R_p = \bigcup_{n=0}^{\infty} H_n$ и все H_n — открытые подмножества в R_p.

Для каждой подгруппы G_n последовательности G определим ее отображение φ_n на подгруппу H_n из H по следующему индуктивному правилу.

Пусть φ_0 — тождественное отображение $G_0 = H$ на $H_0 = H$, т. е. группы J_p на себя.

Элементы подгруппы G_1 однозначно представимы в виде суммы $\alpha = a + k\varepsilon_1$, $a \in H$; $k = 0, 1, 2, \ldots, p-1$. Элемент ε_1 — представитель класса смежности $[\varepsilon_1]$, являющийся образующим элементом фактор-группы G_1/H. Аналогично элементы подгруппы H_1 однозначно представимы в виде

$$\overline{\alpha} = a + k\frac{1}{p},$$

где $a \in H$; $k = 0, 1, 2, \ldots, p-1$.

Определим отображение $\varphi_1 : G_1 \to H_1$, полагая $\varphi_1(\alpha) = \varphi_1(a + k\varepsilon_1) = \varphi_0(a) + k\frac{1}{p} = a + k\frac{1}{p} = \overline{\alpha}$.

Предположим, что φ_n — определенное однозначное отображение G_n на H_n из соответствующих последовательностей, причем $\varphi_n(\varepsilon_n) = \frac{1}{p^n}$. Тогда для любого элемента $\alpha = a + k\varepsilon_{n+1} \in G_{n+1}$, $a \in G_n$, $k = 0, 1, 2, \ldots, p-1$, полагаем $\varphi_{n+1}(\alpha) = \varphi_n(a) + k\frac{1}{p^{n+1}} = \overline{\alpha}$, где $\overline{\alpha}$ — элемент подгруппы H_{n+1}; φ_{n+1} — взаимно однозначное отображение G_{n+1} на H_{n+1} и $\varphi_{n+1}(\varepsilon_{n+1}) = \frac{1}{p^{n+1}}$. Заметим, что φ_n является ограничением φ_{n+1} на G_n: $\varphi_n = \varphi_{n+1}|_{G^n}$. Значит, $\varphi_0 = \varphi_n|_H$. Построенное отображение φ_n является изоморфизмом подгрупп G_n и H_n.

Доказательство этого утверждения снова ведем индукцией по номеру n. Если $n = 0$, то оно очевидно. Допустим, что оно верно для φ_n. На этом основании доказываем изоморфизм отображения φ_{n+1}.

Пусть $\alpha, \beta \in G_{n+1}$, т. е. $\alpha = a + k\varepsilon_{n+1}$, $\beta = b + l\varepsilon_{n+1}$, где $a, b \in G_n$, $k, l = 0, 1, 2, \ldots, p-1$. Сначала установим $\varphi_{n+1}(\alpha + \beta) = \varphi_{n+1}(\alpha) + \varphi_{n+1}(\beta)$.

Для чисел $k, l = 0, 1, 2, \ldots, p-1$ найдем число m из того же набора $0, 1, 2, \ldots, p-1$, для которого $k + l \equiv m \pmod p$, т. е. $k + l \equiv m + Mp$, M — целое число. Тогда $\alpha + \beta = a + b + (k+l)\varepsilon_{n+1} = a + b + Mp\varepsilon_{n+1} + m\varepsilon_{n+1} = (a + b + M\varepsilon_n) + m\varepsilon_{n+1}$, так как $p\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n$. Здесь $a + b + M\varepsilon_n \in G_n$. Поэтому $\varphi_{n+1}(\alpha + \beta) = \varphi_n(a + b + M\varepsilon_n) + m\frac{1}{p^{n+1}}$. Согласно индукции φ_n-отображение изоморфное и, следовательно,

$$\varphi_n(a + b + M\varepsilon_n) = \varphi_n(a) + \varphi_n(b) + M\varphi_n(\varepsilon_n) = \varphi_n(a) + \varphi_n(b) + M\frac{1}{p^n}.$$

Поэтому

$$\varphi_{n+1}(\alpha + \beta) = \varphi_n(a) + \varphi_n(b) + M\frac{1}{p^n} + m\frac{1}{p^{n+1}} =$$

$$= \varphi_n(a) + \varphi_n(b) + (k+l)\frac{1}{p^{n+1}} = \left\{\varphi_n(a) + k\frac{1}{p^{n+1}}\right\} + \left\{\varphi_n(b) + l\frac{1}{p^{n+1}}\right\}.$$

Однако $\varphi_{n+1}(\alpha) = \varphi_n(a) + k\frac{1}{p^{n+1}}$, $\varphi_{n+1}(\beta) = \varphi_n(b) + l\frac{1}{p^{n+1}}$. Значит, выполняется равенство $\varphi_n(\alpha + \beta) = \varphi_{n+1}(\alpha) + \varphi_{n+1}(\beta)$.

Аналогично проверяется равенство $\varphi_{n+1}(-\alpha) = -\varphi_{n+1}(\alpha)$ для любого элемента α из G_{n+1}.

Покажем, что φ_{n+1} — отображение непрерывное. Пусть $\overline{\alpha} = \varphi_{n+1}(\alpha)$, $\alpha \in G_{n+1}$ и $\overline{W}$ — произвольная окрестность элемента $\overline{\alpha}$, принадлежащая открытому множеству H_{n+1} в группе R_p. Выберем настолько малую окрестность $U = p^m J_p$, $m > 0$, нуля группы $H = J_p$, что $\overline{\alpha} + U \subseteq \overline{W}$. Это происходит при достаточно большом натуральном числе m. Окрестность $V = \alpha + U$ элемента α является частью открытого множества G_{n+1} группы G. Вместе с тем имеем равенства

$$\varphi_{n+1}(V) = \varphi_{n+1}(\alpha + U) = \varphi_{n+1}(\alpha) + \varphi_{n+1}(U) = \overline{\alpha} + \varphi_{n+1}(U) = \overline{\alpha} + U = \overline{V},$$

ибо $\varphi_{n+1}|_H = \varphi_0$ — тождественное отображение. Итак, $\varphi_{n+1}(V) = \overline{V} \subseteq \overline{W}$. Непрерывность отображения φ_{n+1} проверена.

При любом n φ_n — взаимно однозначное, гомоморфное и непрерывное отображение компактной группы G_n на компактную группу H_n. Поэтому G_n и H_n — изоморфные группы. Отсюда сделаем следующее заключение.

Отображение $\varphi: G \to R_p$, совпадающее с φ_n на всех подгруппах G_n последовательности G, является искомым изоморфизмом групп G и R_p.

В связи с настоящей работой предлагается следующая новая задача.

Изучить свойства и установить строение локально компактных локально нильпотентных групп, удовлетворяющих ОУМ для замкнутых инвариантных подгрупп.

1. *Глушков В. М.* Локально бикомпактные группы с условием минимальности для замкнутых подгрупп // Укр. мат. журн. – 1956. – **8**, № 2. – С. 132–139.
2. *Глушков В. М.* К теории специальных локально бикомпактных групп // Там же. – 1959. – **11**, № 4. – С. 347–350.
3. *Хотеев В. А., Чарин В. С.* Группы с условием минимальности для подгрупп // Мат. заметки. – 1967. – **2**, № 1. – С. 3–10.
4. *Курош А. Г.* Теория групп. – М.: Наука, 1967. – 648 с.
5. *Понтрягин Л. С.* Непрерывные группы. – М.: Наука, 1973. – 520 с.

Получено 13.05.97