УДК 517.5;519.65

Н. П. Корнейчук (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ИНФОРМАЦИОННЫЕ АСПЕКТЫ В ТЕОРИИ ПРИБЛИЖЕНИЯ И ВОССТАНОВЛЕНИЕ ОПЕРАТОРОВ

We present a brief review of new directions in the theory of approximation which are associated with information approach to problems of the optimal recovery of mathematical objects on the basis of discrete information. Within the framework of this approach, we formulate three problems of the recovery of operators and their values. In the case of integral operator, we obtain some estimates of an error.

Наведено короткий огляд нових напрямків в теорії наближень, пов'язаних з інформаційним підходом до задач оптимального відновлення математичних об'єктів за дискретною інформацією. В рамках цього підходу сформульовано три задачі відновлення операторів та їх значень; у випадку інтегрального оператора одержано деякі оцінки для похибки.

1. В последнее время в теории приближения, наряду с традиционным подходом, обозначилась тенденция рассматривать задачи аппроксимационного характера под углом зрения, который можно назвать информационным. При традиционном подходе, который сложился под влиянием идей П. Л. Чебышева, в основу кладется понятие наилучшего приближения

$$E(x, F_N)_X = \inf_{u \in F_N} \|x - u\|_X$$

элемента x нормированного пространства X элементами фиксированного подпространства $F_N \subset X$ конечной размерности N. Внимание концентрируется вокруг вопросов существования, единственности и характеризации элемента наилучшего приближения, а также, — если $\{F_N\}_1^\infty$ есть последовательность однородных подпространств, $F_N \subset F_{N+1}$, $N = 1, 2, \ldots$, — вокруг связи скорости убывания при $N \to \infty$ числовой последовательности $E(x, F_N)_X$ с теми или иными внутренними характеристиками элемента x. Если этими характеристиками в пространстве X задано множество $\mathfrak{M}$, то возникает экстремальная задача нахождения величины

$$E(\mathfrak{M}, F_N)_X = \sup_{x \in \mathfrak{M}} E(x, F_N)_X \tag{1}$$

при фиксированном N или выяснения поведения ее при $N \to \infty$.

Параллельно изучаются аппроксимативные свойства конкретных линейных методов приближения (в функциональных пространствах — в первую очередь полиномов и сплайнов), которые позволяют оценить величину (1) сверху. Ясно, что особый интерес представляют линейные методы, реализующие на том или ином множестве $\mathfrak{M}$ верхнюю грань (1). В связи с этим рассматривается величина

$$\mathscr{E}(\mathfrak{M}, F_N)_X = \inf_{A \in \mathcal{L}(X, F_N)} \sup_{x \in \mathfrak{M}} \|x - Ax\|_X, \tag{2}$$

где $\mathcal{L}(X, F_N)$ — множество всех линейных операторов $A : X \to F_N$.

В функциональных пространствах C и L_p задачи (1) и (2) исследовались (и исследуются сейчас) весьма интенсивно, и, что касается классов функций одной действительной переменной, в большинстве важных случаев усилиями многих математиков, начиная с А. Н. Колмогорова [1], Ж. Фавара [2], С. М. Никольского [3], получены окончательные результаты. Надо отметить, что разработанные при этом методы решения экстремальных задач существенно обогатили современную теорию функций.

На новый уровень развития теорию приближения вывела работа А. Н. Колмогорова [4], где сформулирована задача о поперечниках:

$$d_N(\mathfrak{M}, X) = \inf_{F_N} E(\mathfrak{M}, F_N)_X, \quad N = 1, 2, \ldots, \tag{3}$$

множества $\mathfrak{M}$ в нормированном пространстве X. Начиная с 50-х годов задачи о колмогоровских поперечниках (3), а также о введенных В. М. Тихомировым [5] линейных поперечниках

$$\lambda_N(\mathfrak{M}, X) = \inf_{F_N} \mathscr{E}(\mathfrak{M}, F_N)_X, \quad N = 1, 2, \ldots, \tag{4}$$

привлекают внимание многих математиков. Достигнуты значительные успехи, связанные, главным образом, с нахождением в функциональных пространствах точных значений величин (3) и (4) или установлением их порядковой асимптотики при $N \to \infty$ (см., например, [6–8]). При этом выяснилось, что заслуживает внимания взгляд на проблему оптимизации приближений под несколько иным углом зрения.

Во-первых, было замечено (см., например, [9–11]), что большинство аппроксимационных задач можно интерпретировать как задачи приближенного восстановления некоторого математического объекта по неполной информации. Действительно, если речь идет о приближении элементов $x \in \mathfrak{M} \subset X$ подпространством $F_N \subset X$, то эффективное построение элемента u из F_N, достаточно близкого к x, можно осуществить, лишь располагая о x некоторой дополнительной информацией. Обычно приближающий элемент для x в F_N строится в виде линейной комбинации $u = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \ldots + c_N u_N$, где $\{u_k\}_1^N$ — некоторый базис F_N, а c_k, $k = 1, 2, \ldots, N$, — числовые коэффициенты, несущие определенную информацию об x (коэффициенты Фурье, значения функции $x(t)$ в некоторых точках и т. п.).

Таким образом, дополнительная информация обычно имеет вид числового вектора значений на x некоторого набора

$$M_N = \{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_N\}, \quad N = 1, 2, \ldots, \tag{5}$$

заданных на X функционалов, которые естественно считать, по крайней мере, непрерывными. Элемент

$$U\left(x, M_N, \{u_k\}_1^N\right) = \sum_{k=1}^{N} \mu_k(x)\, u_k, \quad \{u_k\}_1^N \subset F_N,$$

можно рассматривать как приближенное восстановление элемента $x \in \mathfrak{M}$ по информации

$$M_N(x) = \{\mu_1(x), \mu_2(x), \ldots, \mu_N(x)\}. \tag{6}$$

Если речь идет об оптимальном восстановлении, то можно указать два пути использования дискретной информации вида (6). Можно, ориентируясь на худший случай, рассматривать величину

$$\sup\left\{\left\| x - U\left(x, M_N, \{u_k\}_1^N\right)\right\|_X : x \in \mathfrak{M}\right\},$$

которую надо минимизировать (при фиксированном N) по всем подпространствам $F_N \subset X$ и наборам функционалов (5). На этом пути мы придем опять же к аппроксимационным поперечникам (3), если предполагать функционалы μ_k только непрерывными, или к (4), если считать μ_k и линейными [6, 11, 12].

Другой путь оптимизации в задаче приближенного восстановления лежит через минимизацию области неопределенности для $x \in \mathfrak{M}$. На этом пути естественным образом возникают величины, которые можно рассматривать как информационные поперечники. Существенно, что эти поперечники можно ввести в произвольном метрическом пространстве.

Пусть $X = (X, \rho)$ — метрическое пространство с расстоянием ρ, X' — множество заданных на X непрерывных функционалов. Набор (5) из X' каждому элементу $x \in X$ ставит в соответствие вектор (точку в R^N) (6), который, если $x \in \mathfrak{M} \subset X$, определяет множество

$$Q = Q(x, M_N) = \{ y : y \in \mathfrak{M},\ M_N(y) = M_N(x) \}$$

— область неопределенности элемента x; чебышевский центр этой области естественно взять в качестве приближенного восстановления для x. Информационный N-поперечник получаем, минимизируя диаметр или чебышевский радиус наибольшей для $x \in \mathfrak{M}$ области неопределенности (подробнее см. [6, 13]). В первом случае, обозначив

$$D(\mathfrak{M}, M_N)_X = \sup \{ \rho(x, y) : x, y \in \mathfrak{M},\ M_N(x) = M_N(y) \},$$

положим

$$\gamma^N(\mathfrak{M}, X) = \inf_{M_N \subset X'} D(\mathfrak{M}, M_N)_X, \qquad N = 1, 2, \ldots . \tag{7}$$

Величина (7) есть минимально возможная погрешность восстановления любого элемента $x \in \mathfrak{M}$ по вектору информации (6). В нормированном пространстве X аналогичным образом определяется линейный информационный N-поперечник множества $\mathfrak{M}$ в пространстве X:

$$\lambda^N(\mathfrak{M}, X) = \inf_{M_N \subset X^*} \sup \{ \| x - y \|_X : x, y \in \mathfrak{M},\ M_N(x) = M_N(y) \}. \tag{8}$$

Величины (7) и (8) связаны, конечно, с аппроксимационными поперечниками (3) и (4); разработанные в теории приближения методы решения экстремальных задач позволили в ряде важных случаев найти точные значения и тех и других [6–8, 10–12].

2. В рамках информационного подхода возникают аспекты, не являющиеся характерными для традиционной проблематики. Один из них связан с различными способами выбора кодирующих функционалов.

Находя набор функционалов (5), позволяющий по информации (6) восстановить любой элемент $x \in \mathfrak{M}$ с наименьшей (при фиксированном N) погрешностью, мы можем, вместо того, чтобы, как в (7) и (8), варьировать целыми наборами M_N, выбирать функционалы $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$ последовательно, используя на каждом шаге, при выборе функционала μ_k, уже имеющуюся информацию $\{ \mu_1(x),\ \mu_2(x), \ldots ,\ \mu_{k-1}(x) \}$. Такой подход (его называют адаптивным) в некоторых случаях позволяет восстановить любой элемент $x \in \mathfrak{M}$ с заданной погрешностью, используя существенно меньшее количество единиц дискретной информации [14, 15]. Заметим, что в силу адаптивной специфики выбора кодирующих функционалов задача оптимизации может быть сформулирована по-разному. Некоторые варианты определения адаптивного информационного поперечника предложены в [13].

При рассмотрении задач оптимального восстановления по дискретной информации естественно возникает и вопрос о сравнении при фиксированном $N = 1, 2, \ldots$ наборов (5) кодирующих функционалов по объему информации о восстанавливаемом элементе $x \in \mathfrak{M}$, которая содержится в векторе (6). В статье [16] введено понятие информативности набора M_N (при фиксированном $N = 1$ — одного функционала μ) относительно множества $\mathfrak{M}$ как гарантированной на этом множестве величины уменьшения области неопределенности для $x \in \mathfrak{M}$ за счет учета информации $M_N(x)$. Ясно, что нижняя грань в (7) и (8) достигается на наборах M_N, имеющих наибольшую информативность относительно множества $\mathfrak{M}$. В [16] установлено, что относительно некоторых классов функций в функциональном пространстве C среди всех линейных функционалов наибольшую информативность имеют функционалы интерполяционного вида.

Еще один информационный аспект в теории приближения связан с понятием сложности аппроксимационной задачи. Задачу оптимального восстановления по неполной информации можно рассматривать не только с точки зрения минимизации погрешности, но и с точки зрения минимизации ресурсов, которые надо затратить для получения решения с заданной точностью. Под сложностью задачи понимается (в грубом приближении) величина, характеризующая минимальное количество (объем) требуемых ресурсов.

В зависимости от того, что понимать под ресурсами, определились два направления. В монографии [17] А. Г. Витушкина и в докладе [18] А. Н. Колмогорова на Международном конгрессе математиков в Стокгольме в 1962 г. сложность задачи ε-представления (или ε-задания) функции определяется числом параметров, характеризующих минимальный объем необходимой информации. В монографиях [19–21] Дж. Ф. Трауба, Х. Вожьняковского и Г. В. Васильковского под сложностью задачи понимается минимальная стоимость построения ε-приближения, которая складывается из стоимости получения нужного массива информации об элементе x и из стоимости реализации эффективного алгоритма построения по имеющейся информации элемента $y = y_x$ такого, что $\rho(x, y)_X \le \varepsilon$.

В работах автора [22, 23] предложен подход к проблеме сложности аппроксимационной задачи, который, с одной стороны, можно рассматривать как развитие идеи А. Н. Колмогорова о численном выражении сложности ε-задания функции, а с другой — позволяет продвинуться в русле идеологии книг [19–21] при сравнительной оценке стоимости эффективного построения ε-приближения. При этом постулируется, что информационный оператор задается на метрическом пространстве $X = (X, \rho)$ в виде набора (5) непрерывных $(M_N \subset \subset X')$ функционалов, отображающего X в R^N. Под сложностью ε-задания элемента $x \in \mathfrak{M} \subset X$ понимается наименьшее число $N = N_\varepsilon$, когда существует набор $M_N \subset X'$ и оператор $\varphi : M_N(x) \to X$ такие, что для всех $x \in \mathfrak{M}$ выполняется неравенство $\rho(x, \varphi(M_N(x))) \le \varepsilon$.

Если $\gamma_r^N(\mathfrak{M}, X)$ — информационный поперечник множества $\mathfrak{M}$ в X, определенный по тому же правилу, что и (7), но при условии, что минимизируется не диаметр области неопределенности, а ее чебышевский радиус, то

$$N_\varepsilon = N_\varepsilon(\mathfrak{M}, X) = \min\left\{N : \gamma_r^N(\mathfrak{M}, X) \le \varepsilon\right\}.$$

В [22] получены оценки (в том числе и точные) для сложности ε- задания функций класса W_∞^m в $C_{2\pi}$, а также некоторых классов векторнозначных функций в пространстве с хаусдорфовой метрикой; рассмотрены вопросы, связанные с оценкой вычислительной сложности ε-восстановления.

3. Информационный подход существенно расширяет круг интересов теории приближения и ее возможных приложений. Рассмотрим здесь три задачи восстановления операторов и их значений. Заметим, что вопросы наилучшего приближения линейных неограниченных операторов ограниченными исследовались С. Б. Стечкиным [24] и его учениками (см., например, [25]).

Пусть X и Y — нормированные пространства, $\mathcal{A}$ — пространство линейных ограниченных операторов из X в Y. Если элементы $x \in X$, $y \in Y$, $A \in \mathcal{A}$ связаны равенством

$$Ay = y, \tag{9}$$

то информация о двух из них определяет в какой-то мере и третий элемент, — если не однозначно, то позволяет указать для него в соответствующем пространстве область неопределенности, т. е. наименьшее множество, которому третий элемент заведомо принадлежит. Поэтому можно говорить о восстановлении (вообще говоря, приближенном) любого из трех элементов в (9) по информации о двух остальных.

Что касается вида информации, то, кроме случая, когда элемент, скажем, x, известен (например, явно задан аналитически), будем говорить, что он *слабо известен*, если мы можем снять с него информацию в виде вектора (6) для любого набора (5) функционалов, заданных на соответствующем пространстве.

Кроме того, эффективная оценка погрешности восстановления по дискретной информации (6), как правило, требует наличия о слабо известном элементе априорной информации о принадлежности его к некоторому компакту.

Сформулируем задачи в общей постановке, а затем рассмотрим некоторые аспекты их решения в случае интегрального оператора.

Задача 1. *Известен или слабо известен оператор A, слабо известен элемент x, принадлежащий компакту $\mathfrak{M}$ в пространстве X; требуется, используя снятую с элемента x (а может быть, и с оператора A) дискретную информацию, приближенно восстановить элемент $y = Ax$ в пространстве Y.*

Разумеется, в эту схему можно включить и случай единичного оператора $A = I$, когда снятая информация используется для его же приближенного восстановления (об этом шла речь выше).

Для нетривиального оператора A задача 1 представляет интерес в оптимизационной постановке, и некоторые результаты известны. В [26–28] задача оптимального восстановления значений оператора рассматривалась в плане оценки информационных поперечников в функциональных пространствах C и L_1, когда A — оператор k-го дифференцирования или заданный интегральный оператор, в частности интеграл Пуассона. В [23] эта задача изучалась с точки зрения оценки сложности ε-задания элемента y, причем рассмотрена и ситуация с адаптивным выбором кодирующих функционалов.

Задача 2. *Известен или слабо известен оператор A, слабо известно в пространстве Y его значение $y = Ax$ на элементе x, который надо приближенно восстановить, зная лишь, что он принадлежит области определения Q оператора A в пространстве X.*

Если считать оператор A известным, то при фиксированном наборе функционалов $M_N = \{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_N\} \subset Y^*$ речь идет о приближенном решении уравнения $Ax = y$ по дискретной информации $M_N(y)$ при наличии, может быть, еще и априорной информации $y \in \mathfrak{M}$, где $\mathfrak{M}$ — заданный компакт в области значений оператора A.

В случае существования обратного оператора A^{-1} задачу 2 можно интерпретировать как приближенное восстановление его значения $x = A^{-1}y$ по информации $M_N(y)$. Отличие от задачи 1 в том, что здесь известен не оператор A^{-1}, а оператор A; это существенно усложняет дело, но задача становится более содержательной, особенно в оптимизационной постановке.

Пусть $\bar{x}$, $\bar{x} \in Q$, — некоторое приближение к точному решению x. Если $\bar{y} = A\bar{x}$ и обратный оператор A^{-1} существует и ограничен, то

$$\|\bar{x} - x\|_X \le \left\|A^{-1}\right\| \|\bar{y} - y\|_Y, \tag{10}$$

т. е. погрешность решения оценивается через погрешность невязки $\bar{y} - y$. Если построена последовательность $\{x_n\} \subset Q$ такая, что $x_n \to x_* \in Q$ и $y_n = Ax_n \to$ $\to y = Ax$, то в силу (10) $x_n \to x$, т. е. x_* — точное решение уравнения $Ax = y$.

При каждом наборе $M_N = \{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_N\} \in Y^*$ вектор $M_N(y) = \{\mu_1(y), \mu_2(y), \ldots, \mu_N(y)\}$ содержит информацию о решении x в неявном виде; эффективное построение на базе $M_N(y)$ приближенного решения $\bar{x}$ проблематично, однако, используя конкретное задание оператора A, можно искать элемент $\bar{x}$, который удовлетворяет равенству

$$M_N(A\bar{x}) = M_N(y) \tag{11}$$

и может быть назван M_N-*слабым решением* уравнения (9). Будем искать такое решение в виде

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{N} c_i x_i, \quad \{c_i\}_1^N \subset R^1, \quad \{x_i\}_1^N \subset Q. \tag{12}$$

Тогда

$$A\bar{x} = \sum_{i=1}^{N} c_i A x_i$$

и равенство (11) приводит к системе

$$\sum_{i=1}^{N} c_i \mu_k(Ax_i) = \mu_k(y), \quad k = 1, 2, \ldots, N,$$

решение которой, если оно существует, дает M_N-слабое решение $\bar{x}$ по базису $\{x_i\}_1^N$, причем

$$\|A\bar{x} - y\|_Y \le \sup\left\{\|z - y\|_Y :\ y, z \in \mathfrak{M},\ M_N(z) = M_N(y)\right\}. \tag{13}$$

Здесь возникают оптимизационные задачи, связанные как с наилучшим выбором в (12) c_i и x_i, так и с минимизацией верхней грани в (13) по наборам M_N.

Задачу о сложности ϵ-задания решения уравнения $Ax = y$ можно сформулировать следующим образом, используя понятие области неопределенности. В исходном положении такой областью для x является все множество $A^{-1}\mathfrak{M}$ решений при условии, что $y \in \mathfrak{M} \subset Y$. Для фиксированного набора M_N функционалов из Y^* положим

$$Q_y = Q_y(M_N) = \{z : z \in \mathfrak{M},\ M_N(z) = M_N(y)\}.$$

Областью неопределенности для x, определяемой неявной информацией $M_N(y)$, будет множество

$$Q_x = Q_x(y, M_N, A) = \left\{v : v \in X,\ Av = z,\ z \in Q_y(M_N)\right\}. \tag{14}$$

Наилучшее восстановление точного решения x оператором $\varphi : M_N(y) \to X$ доставляет чебышевский центр $\bar{x}$ множества Q_x, при этом погрешность восстановления не превышает чебышевского радиуса $r(Q_x)_X$ множества (14). Ориентируясь на худший случай, положим

$$r\left(M_N, A^{-1}\mathfrak{M}\right)_X = \sup\{r(Q_x(y, M_N, A)) : y \in \mathfrak{M}\},$$

тогда величину

$$\lambda_r^N(A^{-1}\mathfrak{M}, X) = \inf_{M_N \subset Y^*} r(M_N, A^{-1}\mathfrak{M})_X$$

можно назвать линейным информационным N-поперечником множества решений $A^{-1}\mathfrak{M}$ в пространстве X. Сложностью ε-задания решения уравнения $Ax = y$ естественно считать наименьшее натуральное число $N = N_\varepsilon$ такое, что $\lambda_r^N(A^{-1}\mathfrak{M}, X) \le \varepsilon$. Вопрос об эффективном построении приближенного решения на базе информации $M_N(y)$ может быть рассмотрен в конкретной ситуации с учетом специфики оператора A.

Мы не рассматриваем здесь вариант задачи 2, когда оператор A только слабо известен и задача обычно сводится к решению системы линейных уравнений.

Задача 3. *Известны или слабо известны элементы $x \in X$ и $y \in Y$, связанные равенством $y = Ax$, где A — неизвестный оператор, который надо приближенно восстановить, снимая информацию с x и y.*

Ясно, что пара (x, Ax) содержит определенную информацию об операторе A. Один из вариантов точной постановки задачи таков. Для любого $x \in X$ оператор A выдает элемент $y = Ax \in Y$, с которого можно снимать информацию $M_N(y) = \{\mu_1(y), \ldots, \mu_N(y)\}$ с помощью набора функционалов $M_N = \{\mu_1, \ldots, \mu_N\} \subset Y^*$. Априори известно также, что A принадлежит заданному компакту $\mathfrak{M}$ линейных операторов из X в Y. Надо выбрать конечное число элементов $x_i \in X$, $i = 1, 2, \ldots, N$, а затем, используя информацию $M_N(y_i)$, где $y_i = Ax_i$, указать оператор $A_* \in \mathfrak{M}$, достаточно близкий к A в смысле погрешности

$$\|A - A_*\| = \sup\left\{\|Ax - A_*x\|_Y : x \in X,\ \|x\|_X \le 1\right\}. \tag{15}$$

Объем используемой информации естественно измерять количеством как тестовых элементов x_i, так и кодирующих функционалов в наборе M_N. Пусть наборы $\Phi_N = \{x_1, x_2, \ldots, x_N\} \subset X$ и $M_N = \{\mu_1, \ldots, \mu_N\} \subset Y^*$ фиксированы, и на базе информации $M_N(y_i)$, $y_i = Ax_i$, $i = 1, \ldots, N$, построен оператор $A_* \in \mathfrak{M}$. Так как $A_* = A_*(\Phi_N, M_N)$, то возникает задача минимизации погрешности (15) по Φ_N и M_N как для конкретного оператора A, так и на всем множестве $\mathfrak{M}$.

Величину

$$\lambda^N(\mathfrak{M}, X \to Y) = \inf_{M_N, \Phi_N} \sup_{A \in \mathfrak{M}} \| A - A_*(\Phi_N, M_N) \|$$

можно по аналогии назвать линейным информационным N-поперечником множества $\mathfrak{M}$ в пространстве линейных операторов из X в Y. В рамках сформулированных в п. 1 определений сложность ε-задания оператора A из $\mathfrak{M}$ есть наименьшее натуральное $N = N_\varepsilon$ такое, что $\lambda^N(\mathfrak{M}, X \to Y) \le \varepsilon$. Можно говорить о вычислительной сложности ε-восстановления оператора A как минимальной суммарной стоимости получения информации $M_N(y_i)$, „работы" оператора A по преобразованию x_i в y_i, $i = 1, 2, \ldots, N$, а также построения оператора A_*.

В заключение этого пункта заметим, что задачи 2 и 3 сформулированы в рамках неадаптивного подхода, когда все функционалы кодирующего набора M_N предъявляются одновременно. Представляет интерес адаптивный подход, когда, например, в задаче 3 пары $(x_1, \mu_1), (x_2, \mu_2), \ldots$ выбираются последовательно, с учетом на каждом шаге уже полученной информации. Весьма вероятно, что в некоторых ситуациях такой метод восстановления окажется в том или ином смысле более экономным.

Отметим еще, что варианты задач 1–3 можно рассматривать в предположении, что X и Y — метрические пространства; для оптимизационной их постановки достаточно наличия в X и Y расстояния.

4. Пусть X и Y — пространства C или L_p, $1 \le p \le \infty$, заданных на отрезке $[0, 1]$ функций с обычной нормой, и оператор A задан равенством

$$Ax = \int_0^1 K(t, u)\, x(t)\, dt, \quad 0 \le u \le 1, \quad x \in X, \quad Ax \in Y, \tag{16}$$

где ядро $K(t, u)$, по крайней мере, суммируемо на квадрате $[0, 1]^2$.

Задача 1 для некоторых ядер $K(t, u)$ исследовалась в работах [21, 23–26]. Здесь мы рассмотрим для интегрального оператора (16) варианты задач 2 и 3.

В задаче 2 речь идет о приближенном решении уравнения Фредгольма I рода

$$\int_0^1 K(t, u)\, x(t)\, dt = y(u) \tag{17}$$

по дискретной информации, снятой с правой части $y(u)$ при известном или слабо известном ядре $K(t, u)$. В предположении, что ядро $K(t, u)$ непрерывно на $[0, 1]^2$ и, значит, правая часть $y(u)$ непрерывна на $[0, 1]$ при любых $x(t) \in L_1$, будем, выбрав разбиение

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = 1, \tag{18}$$

искать приближенное решение в виде кусочно-постоянной функции

$$s(t) = \sum_{i=1}^{N} c_i \psi_i(t), \tag{19}$$

$$\psi_i(t) = 1, \quad t \in (t_{i-1}, t_i), \quad \psi_i(t) = 0, \quad t \in [0, 1] \setminus (t_{i-1}, t_i). \tag{20}$$

Пусть

$$y_s(u) = \int_0^1 K(t, u) s(t)\, dt = \sum_{i=1}^{N} c_i \varphi_i(u), \quad \varphi_i(u) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} K(t, u)\, dt.$$

Зафиксируем набор функционалов $M_N = \{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_N\} \subset C^*$ и потребуем, чтобы выполнялось равенство $M_N(y_s) = M_N(y)$. Это приведет к системе уравнений

$$\sum_{i=1}^{N} c_i \mu_k(\varphi_i) = \mu_k(y), \quad k = 1, 2, \ldots, N, \tag{21}$$

относительно коэффициентов c_i. Если решение $\{\bar{c}_i\}_1^N$ системы (21) существует, то функция

$$\bar{s}(t) = \sum_{i=1}^{N} \bar{c}_i \psi_i(t) \tag{22}$$

есть M_N-слабое решение уравнения (17) относительно базиса (20). Оценить невязку $\|y - \bar{y}\|_C$, где $\bar{y}(u) = \int_0^1 K(t, u)\bar{s}(t)\, dt$, можно при наличии априорной информации о гладкости правой части $y(u)$ и ядра $K(t, u)$ с учетом задания функционалов μ_k.

Пусть $M_N = M_N^I$ — набор интерполяционных функционалов

$$\mu_k(y) = y(u_k), \quad u_k = \frac{2k-1}{2N}, \quad k = 1, 2, \ldots, N, \tag{23}$$

причем известно, что

$$\left| y(u') - y(u'') \right| \le \omega_1\left(\left| u' - u'' \right| \right), \quad u', u'' \in [0, 1], \tag{24}$$

и для любого $t \in [0, 1]$

$$\left| K(t, u') - K(t, u'') \right| \le \omega_2\left(\left| u' - u'' \right| \right), \quad u', u'' \in [0, 1], \tag{25}$$

где $\omega_1(\delta)$ и $\omega_2(\delta)$ — заданные модули непрерывности.

Равенство $M_N^I(\bar{y}) = M_N^I(y)$ означает, что $\bar{y}(u_k) = y(u_k)$, $k = 1, 2, \ldots, N$, поэтому если u_j — ближайший узел интерполяции к точке $u \in [0, 1]$, то

$$y(u) - \bar{y}(u) = y(u) - y(u_j) + \bar{y}(u_j) - \bar{y}(u) \quad \text{и} \quad \left| y(u) - y(u_j) \right| \le \omega_1(1/2N).$$

Далее

$$\left| \bar{y}(u_j) - \bar{y}(u) \right| = \left| \sum_{i=1}^{N} \bar{c}_i \left(\varphi_i(u) - \varphi_i(u_j) \right) \right| \le \sum_{i=1}^{N} |\bar{c}_i| \left| \varphi_i(u) - \varphi_i(u_j) \right|,$$

и так как

$$\left|\varphi_i(u) - \varphi_i(u_j)\right| = \left|\int_{t_{i-1}}^{t_i}\left(K(t,u) - K(t,u_j)\right)dt\right| \le |t_i - t_{i-1}|\,\omega_2\left(\frac{1}{2N}\right),$$

то

$$\left|\bar{y}(u_j) - \bar{y}(u)\right| \le \sum_{i=1}^{N} |\bar{c}_i|\,|t_i - t_{i-1}|\,\omega_2\left(\frac{1}{2N}\right) = \|\bar{s}\|_{L_1}\omega_2\left(\frac{1}{2N}\right).$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Утверждение 1. *Если правая часть* $y(u)$ *и ядро* $K(t, u)$ *уравнения* (17) *удовлетворяют условиям* (24) *и* (25), *то для невязки* M_N^I*-слабого решения* (22) *справедлива оценка*

$$\|\bar{y} - y\|_C \le \omega_1\left(\frac{1}{2N}\right) + \|\bar{s}\|_{L_1}\omega_2\left(\frac{1}{2N}\right). \tag{26}$$

Пусть теперь $u_k = k/N$, $k = 0, 1, \ldots, N$, а $M_N = M_N^*$ — набор функционалов вида

$$\mu_k(y) = N\int_{u_{k-1}}^{u_k} y(u)\,du \quad k = 1, 2, \ldots, N, \tag{27}$$

т. е. $\mu_k(y)$ есть среднее значение $\eta_k(y)$ функции $y(u)$ на интервале (u_{k-1}, u_k).

Требование $M_N^*(y_s) = M_N^*(y)$ равносильно системе

$$\sum_{i=1}^{N} c_i \int_{u_{k-1}}^{u_k}\varphi(u)\,du = \frac{1}{N}\eta_k(y), \quad k = 1, 2, \ldots, N,$$

решение которой $\left\{c_i^*\right\}_1^N$ (если оно существует) определяет M_N^*-слабое решение

$$s_*(t) = \sum_{i=1}^{N} c_i^*\psi_i(t) \tag{28}$$

уравнения (17) относительно базиса (20). Полагая

$$y_*(u) = \int_0^1 K(t,u)\,s_*(t)\,dt,$$

оценим невязку $\|y - y_*\|_C$ при выполнении условий (22) и (23).

Так как $\eta_k(y_*) = \eta_k(y)$, то существуют точки $u', u'' \in (u_{k-1}, u_k)$ такие, что $y(u') = \eta_k(y) = \eta_k(y_*) = y_*(u'')$. Поэтому для $u \in (u_{k-1}, u_k)$

$$y_*(u) - y(u) = y_*(u) - y_*(u'') + y(u') - y(u).$$

Легко видеть, что

$$\left|y(u') - y(u)\right| \le N\int_0^{1/N}\omega_1(\delta)\,d\delta.$$

Кроме того,

$$y_*(u) - y_*(u'') = \sum_{i=1}^{N} c_i^* \left[\varphi_i(u) - N \int_{u_{k-1}}^{u_k} \varphi_i(u)\, du \right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} c_i^* \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left[K(t,u) - N \int_{u_{k-1}}^{u_k} K(t,u)\, du \right] dt$$

и, значит,

$$\left| y_*(u) - y_*(u'') \right| \le N \| s_* \|_{L_1} \int_0^{1/N} \omega_2(\delta)\, d\delta.$$

Этим доказано следующее утверждение.

Утверждение 2. *В условиях утверждения* 1 *для невязки* M_N^**-слабого решения* (28) *уравнения* (17) *справедлива оценка*

$$\| y_* - y \|_C \le N \left[\int_0^{1/N} \omega_1(\delta)\, d\delta + \| s_* \|_{L_1} \int_0^{1/N} \omega_2(\delta)\, d\delta \right]. \tag{29}$$

Сделаем несколько замечаний.

1. Приближенное решение (19) строилось по произвольному разбиению, выбором которого можно распорядиться, чтобы обеспечить существование решения системы (21) для конкретного набора M_N.

2. Если условиям (24) и (25) удовлетворяют некоторые производные функций $y(u)$ и (по переменной u) $K(t, u)$, то, используя то же количество единиц дискретной информации, погрешность $\| y_s - y \|_C$ можно существенно уменьшить, взяв $s(t)$ в виде сплайна более высокого, согласованного с гладкостью $y(u)$ и $K(t, u)$ порядка.

3. Если имеется явная оценка для нормы обратного оператора, то на основании (26) и (29) с учетом (10) можно оценить и погрешность $\| x - s \|_{L_\infty}$ ($s = \bar{s}$ или s_*) решения уравнения (17). Это позволит оценить сверху и сложность ε-задания этого решения.

Для оператора (16) в задаче 3 требуется приближенно восстановить ядро $K(t, u)$ по информации, которая содержится в парах функций

$$(x_i(t), y_i(u)), \quad y_i(u) = \int_0^1 K(t,u)\, x_i(t)\, dt, \quad i = 1, 2, \ldots, N,$$

при наличии некоторой априорной информации, например, о гладкости $K(t, u)$. Если выбор входных функций $x_i(t)$ в нашем распоряжении, то естественно выбирать их так, чтобы функции $y_i(u)$ содержали о ядре $K(t, u)$ возможно больше информации, которую можно измерять величиной уменьшения области неопределенности для $K(t, u)$.

В предположении, что ядро $K(t, u)$ непрерывно на $[0, 1]^2$ и априорная информация о нем задается ограничениями на модуль непрерывности, рассмотрим два варианта выбора тестовых функций, которые представляются нам в этом случае более предпочтительными в указанном выше смысле.

Выберем $x_i(t)$ в виде δ-функций Дирака:

$$x_i(t) = \delta(t-t_i), \quad t_i = \frac{2i-1}{2N}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \tag{30}$$

тогда

$$y_i(u) := \int_0^1 K(t,u)\,x_i(t)\,dt = K(t_i,u), \quad 0 \le u \le 1.$$

Считая функции $y_i(u)$, $i = 1, 2, \dots, N$, слабо известными, задаем набор функционалов $M_N = \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N\} \subset C^*$, и по информации

$$M_N(y_i) = \{\mu_1(y_i), \mu_2(y_i), \dots, \mu_N(y_i)\}, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

строим приближение для ядра $K(t,u)$. Пусть $M_N = M_N^I$ — набор интерполяционных функционалов (23). Тогда

$$\mu_k(y_i) = y_i(u_k) = K(t_i, u_k), \quad i, k = 1, 2, \dots, N. \tag{31}$$

По информации (31) определим непрерывное на $[0, 1]^2$ ядро $K_I(t,u)$ следующим образом:

$$K_I(t_i, u_k) = K(t_i, u_k), \quad i, k = 1, 2, \dots, N,$$

и на квадрате $[0, 1]^2$ $K_I(t,u) \in \mathfrak{M}$, а $\mathfrak{M}$ есть множество операторов A вида (16) с ядром $K(t,u)$, удовлетворяющим условию (25), а также условию

$$\left|K(t',u) - K(t'',u)\right| \le \omega_3\left(\left|t' - t''\right|\right) \quad \forall\, u \in [0,1], \tag{32}$$

где $\omega_3(\delta)$ — также некоторый модуль непрерывности. Несложные выкладки позволяют заключить, что

$$\|K - K_I\|_C \le \omega_2\left(\frac{1}{2N}\right) + \omega_3\left(\frac{1}{2N}\right), \tag{33}$$

причем существует ядро $K(t,u)$, удовлетворяющее условиям (25) и (32), для которого в (33) будет знак равенства.

Полученный результат сформулируем следующим образом.

Утверждение 3. *Если оператор* A *вида* (16) *принадлежит множеству* $\mathfrak{M}$, Φ_N — *набор функций* (30) *и* $A_I = A(\Phi_N, M_N^I)$ — *оператор, определяемый построенным выше ядром* $K_I(t,u)$, *то*

$$\|A - A_I\|_{L_1 \to C} \le \omega_2\left(\frac{1}{2N}\right) + \omega_3\left(\frac{1}{2N}\right).$$

Оценка на множестве $\mathfrak{M}$ *точная.*

Заметим, что если считать функции $y_i(u)$ известными в каждой точке, то нетрудно построить непрерывное приближение ядра $K(t,u)$ с равномерной погрешностью $\le \omega_3\left(\frac{1}{2N}\right)$.

Пусть теперь $t_i = i/N$, $u_k = k/N$, $i, k = 1, 2, \dots, N$, и

$$x_i(t) = \begin{cases} N, & t \in (t_{i-1}, t_i); \\ 0, & t \in [0,1] \setminus (t_{i-1}, t_i), \quad i = 1, 2, \dots, N. \end{cases} \tag{34}$$

Тогда

$$y_i(u) = \int_0^1 K(t,u)\, x_i(t)\, dt = N \int_{t_{i-1}}^{t_i} K(t,u)\, dt$$

— функция средних значений по t ядра $K(t, u)$ в полосе $t_{i-1} < t < t_i$. Если, как и выше, M_N^* — набор функционалов μ_k вида (27), то

$$\mu_k(y_i) = N^2 \iint_{\gamma_{ik}} K(t,u)\, dt\, du, \quad \gamma_{ik} = (t_{i-1}, t_i) \times (u_{k-1}, u_k), \tag{35}$$

$$i, k = 1, 2, \ldots, N.$$

Заменив на каждом из квадратов γ_{ik} ядро $K(t, u)$ его средним значением (35), получим кусочно-постоянное ядро $K_*(t, u)$. Если для $K(t, u)$ выполнены условия (25) и (32), то на каждом квадрате γ_{ik}

$$\max_{t, u \in \gamma_{ik}} \left| K(t,u) - \mu_k(y_i) \right| \le N^2 \int_0^{1/N} \int_0^{1/N} [\omega_3(t) + \omega_2(u)]\, dt\, du =$$

$$= N \int_0^{1/N} [\omega_2(\delta) + \omega_3(\delta)]\, d\delta, \tag{36}$$

причем можно указать ядро $K(t, u)$, удовлетворяющее условиям (25) и (32), для которого (36) выполняется со знаком равенства. Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Утверждение 4. *Пусть оператор A вида* (16) *принадлежит множеству* $\mathfrak{M}$, Φ_N — *набор функций* (34) *и* $A_* = A(\Phi_N, M_N^*)$ — *оператор, определяемый построенным выше ядром* $K_*(t, u)$. *Тогда*

$$\| A - A_* \|_{L_1 \to L_\infty} \le N \int_0^{1/N} [\omega_2(\delta) + \omega_3(\delta)]\, d\delta.$$

Оценка точная.

1. *Kolmogoroff A.* Zyr Grössenordnung des restgliedes Fourierscher Reihen differenzierbarer Functionen // Ann. Math. – 1935. – **36**. – S. 521 – 536.
2. *Favard J.* Sur l'approximation des funktions periodiques par des polinomes trigonometriques // C. r. Acad. sci. (Paris). – 1936. – **203**. – P. 1122 – 1124.
3. *Никольский С. М.* Приближение периодических функций тригонометрическими многочленами // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1945. – **15**. – С. 1 – 76.
4. *Kolmogoroff A.* Über die besste Annäherung von Funktionen einer gegebenen Funktionklassen // Ann. Math. – 1936. – **37**. – S. 107 – 110.
5. *Тихомиров В. М.* Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений // Успехи мат. наук. – 1960. – **15**, № 3. – С. 81 – 120.
6. *Тихомиров В. М.* Некоторые вопросы теории приближений. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1976. – 304 с.
7. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи теории приближения. – М.: Наука, 1976. – 320 с.
8. *Тихомиров В. М.* Теория приближений // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики / ВИНИТИ. – 1987. – **14**. – С. 103 – 260.
9. *Корнейчук Н. П.* Оптимальное восстановление функций и их производных в метрике L_p // Теория кубатурных формул и вычислительная математика. – Новосибирск: Наука, 1980. – С. 152 – 157.

10. *Корнейчук Н. П.* Поперечники в L_p классов непрерывных и дифференцируемых функций и оптимальные методы кодирования и восстановления функций и их производных // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1981. – **45**, № 2. – С. 266 – 290.
11. *Корнейчук Н. П.* Сплайны в теории приближения. – М.: Наука, 1984. – 352 с.
12. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближения. – М.: Наука, 1987. – 424 с.
13. *Корнейчук Н. П.* Информационные поперечники // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 11. – С. 1506 – 1518.
14. *Korneichuk N. P.* Optimization of active alhorithms for recovery of monotonic functions from Hölder's class // J. Complexity. – 1994. – **10**. – P. 265 – 269.
15. *Корнейчук Н. П.* Оптимизация адаптивных алгоритмов восстановления монотонных функций класса H^{ω} // Укр. мат. журн. – 1993. – **45**, № 12. – С. 1627 – 1634.
16. *Корнейчук Н. П.* Информативность функционалов // Там же. – 1994. – **46**, № 9. – С. 1156 – 1163.
17. *Витушкин А. Г.* Оценка сложности задачи табулирования. – М.: Физматгиз, 1959. – 228 с.
18. *Колмогоров А. Н.* Различные подходы к оценке трудности приближенного задания и вычисления функций // Proc. Int. Congr. Math. – Stockholm, 1963. – P. 369 – 376.
19. *Traub J. F., Wozniakowski H.* A general theory of optimal algorithms. – New York: Acad. Press, 1980. – 382 p. (Русск. пер. М.: Мир, 1983).
20. *Traub J. F., Wasilkowski G. W., Wozniakowski H.* Information, uncertainty, complexity. – Mass.: Addison-Wesley, 1983. – 184 p. (Русск. пер. М.: Мир, 1988).
21. *Traub J. F., Wasilkowski G. W., Wozniakowski H.* Information-based complexity. – New York: Acad. Press, 1988. – 524 p.
22. *Корнейчук Н. П.* Сложность аппроксимационных задач // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 12. – С. 1683 – 1694.
23. *Korneichuk N. P.* On complexity of approximation problems // E. J. Approxim. – 1997. – **3**, № 3. – P. 251 – 273.
24. *Стечкин С. Б.* Наилучшее приближение линейных операторов // Мат. заметки. – 1967. – **1**, № 2. – С. 137 – 148.
25. *Арестов В. В.* Приближение операторов типа свертки линейными ограниченными операторами // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1980. – **145**. – С. 3 – 19.
26. *Korneichuk N. P.* Encoding and recovery of operator values // J. Complexity. – 1992. – **8**. – P. 79 – 91.
27. *Корнейчук Н. П.* Об оптимальном восстановлении значений операторов // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 10. – С. 1383 – 1389.
28. *Шабозов М. Ш.* Наилучшее и наилучшее одностороннее приближение ядра бигармонического уравнения и оптимальное восстановление значений операторов // Там же. – 1995. – **47**, № 11. – С. 1549 – 1557.

Получено 05.06.98