УДК 512.949

А. А. Керефов (Кабард.-Балк. ун-т, Россия)

К ЗАДАЧАМ С КОНТИНУАЛЬНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ В ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Problems with continual derivatives in boundary conditions for a parabolic equation are reduced to a system of two singular integral Volterra equations of the second order.

Задачі з континуальними похідними в крайових умовах для параболічного рівняння зведено до системи двох сингулярних інтегральних рівнянь Вольтерри другого роду.

При математическом моделировании различных синергетических систем, как показано в [1], часто возникают континуальные производные как в дифференциальных уравнениях, так и в краевых условиях. Исследованию такого нового класса дифференциальных уравнений и задач посвящены работы [1, 2].

Пусть $\Omega = \{ (x, t) : \ 0 < x < +\infty, \ 0 < t < T \}$,

$$u_t = u_{xx} + f(x, t). \tag{1}$$

Для уравнения (1) рассмотрим следующую задачу:

найти ограниченное в области Ω решение уравнения (1) из класса $C(\overline{\Omega}) \cap$ $\cap \ C^1(\Omega)$, удовлетворяющее начальному условию

$$u(x, 0) = \varphi(x), \qquad 0 \le x < +\infty, \tag{2}$$

и граничному условию

$$u_x(0, t) - \int_0^1 D_{0t}^{\alpha} u(0, t)\, d\alpha = -c(t), \tag{3}$$

где D_{0t}^{α} — оператор дробного дифференцирования порядка α, $\alpha \in (0, 1)$ [3]; $c(t)$, $\varphi(x)$ — заданные непрерывные функции.

В силу интегральной теоремы о среднем значении [4, 5] имеем

$$\int_0^1 D_{0t}^{\alpha} u(0, t)\, d\alpha = D_{0t}^{\beta} u(0, t), \quad 0 < \beta < 1.$$

Тогда граничное условие (3) можно представить в виде

$$u_x(0, t) - D_{0t}^{\beta} u(0, t) = -c(t). \tag{4}$$

Пусть $u(0, t) \equiv \tau(t)$, $u_x(0, t) \equiv \nu(t)$, тогда условие (4) можно переписать следующим образом:

$$\nu(t) - D_{0t}^{\beta} \tau(t) = -c(t). \tag{5}$$

Предположим, что решение задачи $u(x, 0) = \varphi(x)$, $u_x(0, t) \equiv \nu(t)$ для уравнения (1) в области Ω существует. Тогда оно допускает интегральное представление [6]

$$u(x, t) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 (t-\eta)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{4(t-\eta)}} \nu(\eta)\, d\eta \ +$$

$$+\ \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}}\left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}+e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4t}}\right]\varphi(\xi)\,d\xi\ +$$

$$+\ \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{1}\int\limits_0^{+\infty}(t-\eta)^{-\frac{1}{2}}\left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\eta)}}+e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4(t-\eta)}}\right]f(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta. \qquad (6)$$

В представлении (6) перейдем к пределу при $x\to 0+$. В результате получим функциональное соотношение между функциями $\tau(t)$ и $\nu(t)$ вида

$$\tau(t)=-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t (t-\eta)^{-\frac{1}{2}}\nu(\eta)\,d\eta+\Phi(t),$$

где

$$\Phi(t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t\int\limits_0^{+\infty}(t-\eta)^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{\xi^2}{4(t-\eta)}}f(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta\ +\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}t^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{\xi^2}{4t}}\varphi(\xi)\,d\xi.$$

В силу того, что $\nu(t)=D_{0t}^{\beta}\tau(t)-c(t)$, из последнего выражения находим

$$\tau(t)+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t(t-\eta)^{-\frac{1}{2}}D_{0\eta}^{\beta}\,\tau(\eta)\,d\eta\ =\ \Phi(t)+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t(t-\eta)^{-\frac{1}{2}}c(\eta)\,d\eta,$$

что равносильно равенству

$$\tau(t)+\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int\limits_0^t(t-\eta)^{-\frac{1}{2}}D_{0\eta}^{\beta}\,\tau(\eta)\,d\eta\ =\ \Phi(t)+D_{0t}^{-\frac{1}{2}}c(t). \qquad (7)$$

Рассмотрим выражение

$$\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int\limits_0^t(t-\eta)^{-\frac{1}{2}}\frac{d}{d\eta}D_{0\eta}^{-(1-\beta)}\,\tau(\eta)\,d\eta\ =$$

$$=\ \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(1-\beta)}\int\limits_0^t(t-\eta)^{-\frac{1}{2}}d\int\limits_0^{\eta}\frac{\tau(s)\,ds}{(\eta-s)^{\beta}}\ =$$

$$=\ \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(1-\beta)}\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_0^{t-\varepsilon}(t-\eta)^{-\frac{1}{2}}d\int\limits_0^{\eta}\frac{\tau(s)\,ds}{(\eta-s)^{\beta}}\ =$$

$$=\ \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(1-\beta)}\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\int\limits_0^{t-\varepsilon}\frac{\tau(s)\,ds}{(\eta-\varepsilon-\beta)^{\beta}}-\frac{1}{2}\int\limits_0^{t-\varepsilon}\frac{d\eta}{(t-\eta)^{3/2}}\int\limits_0^{\eta}\frac{\tau(s)\,ds}{(\eta-s)^{\beta}}\right].$$

Поскольку справедливо равенство

$$\frac{d}{dt}\int\limits_0^t(t-\eta)^{-\frac{1}{2}}d\eta\int\limits_0^{\eta}\frac{\tau(s)\,ds}{(\eta-s)^{\beta}}\ =\ \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{d}{dt}\int\limits_0^{t-\varepsilon}(t-\eta)^{-\frac{1}{2}}d\eta\int\limits_0^{\eta}\frac{\tau(s)\,ds}{(\eta-s)^{\beta}}\ =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\int_0^{t-\varepsilon}\frac{\tau(s)\,ds}{(\eta-\varepsilon-\beta)^{\beta}}-\frac{1}{2}\int_0^{t-\varepsilon}\frac{d\eta}{(t-\eta)^{3/2}}\int_0^{\eta}\frac{\tau(s)\,ds}{(\eta-s)^{\beta}}\right]$$

при $\varepsilon\to 0$, из последних двух выражений получаем

$$\int_0^t (t-\eta)^{-\frac{1}{2}}\frac{d}{d\eta}\int_0^{\eta}\frac{\tau(s)\,ds}{(\eta-s)^{\beta}} = \frac{d}{dt}\int_0^t (t-\eta)^{-\frac{1}{2}}d\eta\int_0^{\eta}\frac{\tau(s)\,ds}{(\eta-s)^{\beta}}.$$

Следовательно, представление (7) можно переписать в виде

$$\tau(t)+\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(1-\beta)}\frac{d}{dt}\int_0^t (t-\eta)^{-\frac{1}{2}}d\eta\int_0^{\eta}\frac{\tau(s)\,ds}{(\eta-s)^{\beta}} = \Phi(t)+D_{0t}^{-\frac{1}{2}}c(t). \tag{8}$$

Рассмотрим более подробно второе слагаемое в левой части выражения (8). Выполнив сначала перестановку Дирихле порядка интегрирования, а затем во внутреннем интеграле сделав замену переменной интегрирования по формуле $\eta = s+(t-s)z$, будем иметь

$$\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(1-\beta)}\frac{d}{dt}\int_0^t (t-\eta)^{-\frac{1}{2}}d\eta\int_0^{\eta}(\eta-s)^{-\beta}\tau(s)\,ds =$$

$$= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(1-\beta)}\frac{d}{dt}\int_0^t \tau(s)\,(t-s)^{\frac{1}{2}-\beta}ds\int_0^1 z^{-\beta}(1-z)^{-\frac{1}{2}}dz =$$

$$= \frac{B\left(1-\beta,\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(1-\beta)}\frac{d}{dt}\int_0^t (t-s)^{\frac{1}{2}-\beta}\tau(s)\,ds = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{3}{2}-\beta\right)}\frac{d}{dt}\int_0^t (t-s)^{\frac{1}{2}-\beta}\tau(s)\,ds =$$

$$= \begin{cases} D_{0t}^{\frac{3}{2}-\beta}\tau(t), & \text{если } \beta-\frac{1}{2}>0;\\ \dfrac{1}{\Gamma\left(\frac{3}{2}-\beta\right)}\tau(t), & \text{если } \beta-\frac{1}{2}=0;\\ \dfrac{(1-2\beta)\,\Gamma\left(\beta-\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{3}{2}-\beta\right)}D_{0t}^{\beta-\frac{1}{2}}\tau(t), & \text{если } \beta-\frac{1}{2}<0,\end{cases}$$

где $B(p,q)$ — бета-функция.

Пусть $\beta-\frac{1}{2}>0$, тогда уравнение (8) имеет вид

$$\tau(t)+D_{0t}^{\frac{3}{2}-\beta}\tau(t) = \Phi(t)+D_{0t}^{-\frac{1}{2}}c(t). \tag{9}$$

Подействуем на обе части (9) оператором $D_{0t}^{\beta-\frac{3}{2}}$. В силу того, что [3]

$$D_{0t}^{-\alpha}D_{0t}^{\alpha}f(t) \equiv f(t)-\frac{f_{1-\alpha}(0)}{\Gamma(\alpha)},\quad 0<\operatorname{Re}\alpha<1,$$

и $f_{1-\alpha}(t) = \dfrac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\displaystyle\int_0^t \frac{f(s)\,ds}{(t-s)^\alpha}$ при $f(t)\in I_{0t}^{\alpha}(L_1)$, имеем $D_{0t}^{\beta-\frac{3}{2}} D_{0t}^{\frac{3}{2}-\beta}\tau(t) \equiv \tau(t)$.
Таким образом, в итоге получаем

$$D_{0t}^{\beta-\frac{3}{2}}\tau(t) + \tau(t) = D_{0t}^{\beta-\frac{3}{2}}\left[\Phi(t) + D_{0t}^{-\frac{1}{2}} c(t)\right] \tag{10}$$

— интегральное уравнение Вольтерра второго рода.

Если же $\beta - \dfrac{1}{2} < 0$, то уравнение (8) можно переписать в виде

$$\tau(t) + \frac{(1-2\beta)\,\Gamma\left(\beta-\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{3}{2}-\beta\right)} D_{0t}^{-\left(\frac{1}{2}-\beta\right)}\tau(t) = \Phi(t) + D_{0t}^{-\frac{1}{2}} c(t),$$

что также сводится к уравнению Вольтерра второго рода, ядро которого имеет интегрируемую особенность.

Пусть теперь $\Omega = \{(x,t):\ 0<x<l,\ 0<t<T\}$ и для уравнения (1) рассмотрим следующую задачу:

найти регулярное решение уравнения (1) в области Ω из класса $C(\overline{\Omega}) \cap$ $\cap\ C^1(\Omega)$, удовлетворяющее начальному условию

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0\le x\le l, \tag{11}$$

и граничным условиям

$$\begin{aligned} u_x(0,t) - \int_0^1 D_{0t}^{\alpha} u(0,t)\,d\alpha &= -\varphi_1(t),\\ u_x(l,t) - \int_0^1 D_{0t}^{\alpha} u(l,t)\,d\alpha &= \varphi_2(t), \end{aligned} \tag{12}$$

где $\varphi(x)\in C^1[0,l]$, φ_i — непрерывные функции, $i = 1,2$, удовлетворяющие условиям согласования.

Решение уравнения (1), удовлетворяющее начальному условию (11) в области Ω, допускает интегральное представление [7]

$$\begin{aligned} u(x,t) = &-\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^t (t-\eta)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{4(t-\eta)}}\left[u_\xi(0,\eta) - \frac{x}{2(t-\eta)}u(0,\eta)\right]d\eta\ + \\ &+ \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^l t^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\varphi(\xi)\,d\xi\ + \\ &+ \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^t (t-\eta)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{(x-l)^2}{4(t-\eta)}}\left[u_\xi(l,\eta) - \frac{x-l}{2(t-\eta)}u(l,\eta)\right]d\eta\ + \\ &+ \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^t\int_0^l f(\xi,\eta)(t-\eta)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\eta)}}\,d\xi\,d\eta. \end{aligned} \tag{13}$$

Исследуем выражение

$$\frac{x}{4\sqrt{\pi}}\int_0^t (t-\eta)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{x^2}{4(t-\eta)}} u(0,\eta)\,d\eta \quad \text{при} \quad x \to 0+.$$

Предварительно выполнив замену переменной интегрирования по формуле $2\sqrt{t-\eta}\,s = x$, получим

$$\frac{x}{4\sqrt{\pi}}\int_0^t (t-\eta)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{x^2}{4(t-\eta)}} u(0,\eta)\,d\eta \;=\; \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{x/2\sqrt{t}}^{+\infty} e^{-s^2} u(0,\, t-\frac{x^2}{4s^2})\,ds.$$

Следовательно, в силу последнего равенства имеем

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{x}{4\sqrt{\pi}}\int_0^t (t-\eta)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{x^2}{4(t-\eta)}} u(0,\eta)\,d\eta \;=\; \frac{1}{2}u(0,t). \tag{14}$$

Аналогичными рассуждениями можно убедиться в справедливости равенства

$$\lim_{x\to l-}\frac{x-l}{4\sqrt{\pi}}\int_0^t (t-\eta)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{(x-l)^2}{4(t-\eta)}} u(l,\eta)\,d\eta \;=\; -\frac{1}{2}u(l,t). \tag{15}$$

Переходя в (13) последовательно к пределу при $x \to 0+$, а затем и при $x \to l-$, с учетом (14) и (15) получаем

$$u(0,t) = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^t (t-\eta)^{-\frac{1}{2}} u_\xi(0,\eta)\,d\eta + \frac{1}{2}u(0,t) \;+$$

$$+\;\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^l t^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\xi^2}{4t}} \varphi(\xi)\,d\xi \;+$$

$$+\;\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^t (t-\eta)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{l^2}{4(t-\eta)}}\left[u_\xi(l,\eta) + \frac{l}{2(t-\eta)}u(l,\eta)\right]d\eta \;+$$

$$+\;\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^t\int_0^l f(\xi,\eta)\,(t-\eta)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\xi^2}{4(t-\eta)}}\,d\xi\,d\eta,$$

$$u(l,t) = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^t (t-\eta)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{l^2}{4(t-\eta)}}\left[u_\xi(0,\eta) - \frac{l}{2(t-\eta)}u(0,\eta)\right]d\eta \;+$$

$$+\;\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^l t^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{(l-\xi)^2}{4t}} \varphi(\xi)\,d\xi \;+$$

$$+\;\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^t (t-\eta)^{-\frac{1}{2}} u_\xi(l,\eta)\,d\eta + \frac{1}{2}u(l,t) \;+$$

$$+\;\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^t\int_0^l f(\xi,\eta)\,(t-\eta)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{(l-\xi)^2}{4(t-\eta)}}\,d\xi\,d\eta.$$

Граничные условия (12), содержащие континуальные производные следа искомого решения $u(x,t)$, в силу интегральной теоремы о среднем допускают линейные комбинации:

$$\nu_0(t) = D_{0t}^{\beta}\tau_0(t) - \varphi_1(t),$$
$$\nu_l(t) = D_{0t}^{\beta}\tau_l(t) + \varphi_2(t),$$

где $\tau_0(t) \equiv u(0, t)$; $\tau_l(t) \equiv u(l, t)$; $\nu_0(t) \equiv u_x(0, t)$; $\nu_l(t) \equiv u_x(l, t)$; $0 < \beta < 1$. Учитывая это, получаем

$$\tau_0(t) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t (t-\eta)^{-\frac{1}{2}} D_{0\eta}^{\beta}\tau_0(\eta)\,d\eta +$$
$$+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t (t-\eta)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{l^2}{4(t-\eta)}}\left[D_{0\eta}^{\beta}\tau_l(\eta) + \frac{l}{2(t-\eta)}\tau_l(\eta)\right]d\eta + \Phi_0(t),$$
$$\tau_l(t) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t (t-\eta)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{l^2}{4(t-\eta)}}\left[D_{0\eta}^{\beta}\tau_0(\eta) + \frac{l}{2(t-\eta)}\tau_0(\eta)\right]d\eta +$$
$$+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t (t-\eta)^{-\frac{1}{2}} D_{0\eta}^{\beta}\tau_l(\eta)\,d\eta + \Phi_l(t),$$

где

$$\Phi_0(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^l t^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\xi^2}{4t}}\varphi(\xi)\,d\xi + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t (t-\eta)^{-\frac{1}{2}}\varphi_1(\eta)\,d\eta +$$
$$+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^l (t-\eta)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{l^2}{4(t-\eta)}}\varphi_2(\eta)\,d\eta + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t\int_0^l f(\xi,\eta)(t-\eta)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\xi^2}{4(t-\eta)}}\,d\xi\,d\eta,$$
$$\Phi_l(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^l t^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{(l-\xi)^2}{4t}}\varphi(\xi)\,d\xi + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t (t-\eta)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{l^2}{4(t-\eta)}}\varphi_1(\eta)\,d\eta +$$
$$+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t (t-\eta)^{-\frac{1}{2}}\varphi_2(\eta)\,d\eta + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t\int_0^l f(\xi,\eta)(t-\eta)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{(l-\xi)^2}{4(t-\eta)}}\,d\xi\,d\eta.$$

Таким образом, для определения функций $\tau_0(t)$ и $\tau_l(t)$ получена следующая система интегральных уравнений:

$$\tau_0(t) + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t (t-\eta)^{-\frac{1}{2}} D_{0\eta}^{\beta}\tau_0(\eta)\,d\eta -$$
$$-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t (t-\eta)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{l^2}{4(t-\eta)}}\left[D_{0\eta}^{\beta}\tau_l(\eta) + \frac{l\,\tau_l(\eta)}{2(t-\eta)}\right]d\eta = \Phi_0(t), \tag{16}$$

$$\tau_l(t) - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t (t-\eta)^{-\frac{1}{2}} D_{0\eta}^{\beta}\tau_l(\eta)\,d\eta +$$
$$+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t (t-\eta)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{l^2}{4(t-\eta)}}\left[D_{0\eta}^{\beta}\tau_0(\eta) - \frac{l\,\tau_0(\eta)}{2(t-\eta)}\right]d\eta = \Phi_l(t). \tag{17}$$

Рассмотрим выражение

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t (t-\eta)^{-\frac{1}{2}} D_{0\eta}^{\beta} \tau_0(\eta)\, d\eta =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{t} (t-\eta)^{-\frac{1}{2}} D_{0,\eta-\varepsilon}^{\beta} \tau_0(\eta)\, d\eta =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(1-\beta)} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{t} (t-\eta)^{-\frac{1}{2}} d\eta \frac{d}{d\eta} \int_0^{\eta-\varepsilon} (\eta-\eta_1)^{-\beta} \tau_0(\eta_1)\, d\eta_1$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(1-\beta)} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{t} (t-\eta)^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{\tau_0(\eta-\varepsilon)}{\varepsilon^{\beta}} + \int_0^{\eta-\varepsilon} \frac{\tau_0(\eta_1)(-\beta)\, d\tau}{(\eta-\eta_1)^{\beta+1}} \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(1-\beta)} \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int_{\varepsilon}^{t} (t-\eta)^{-\frac{1}{2}} \varepsilon^{-\beta} \tau_0(\eta-\varepsilon)\, d\eta - \right.$$

$$\left. - \beta \int_{\varepsilon}^{t} (t-\eta)^{-\frac{1}{2}} d\eta \int_0^{\eta-\varepsilon} (\eta-\eta_1)^{-\beta-1} \tau_0(\eta_1)\, d\eta_1 \right].$$

Во втором интеграле выполнив перестановку Дирихле порядка интегрирования, получим

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t (t-\eta)^{-\frac{1}{2}} D_{0\eta}^{\beta} \tau_0(\eta)\, d\eta = \frac{1}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(1-\beta)} \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int_{\varepsilon}^{t} \varepsilon^{-\beta} (t-\eta)^{-\frac{1}{2}} \tau_0(\eta-\varepsilon)\, d\eta - \right.$$

$$\left. - \beta \int_0^{t-\varepsilon} \tau_0(\eta_1)\, d\eta_1 \int_{\eta_1+\varepsilon}^{t} (\eta-\eta_1)^{-\beta-1} (t-\eta)^{-\frac{1}{2}} d\eta \right],$$

а так как

$$\frac{d}{d\eta_1} \int_{\eta_1+\varepsilon}^{t} (t-\eta)^{-\frac{1}{2}} (\eta-\eta_1)^{-\beta} d\eta =$$

$$= -\varepsilon^{-\beta} (t-\eta_1-\varepsilon)^{-\frac{1}{2}} + \beta \int_{\eta_1+\varepsilon}^{t} (t-\eta)^{-\frac{1}{2}} (\eta-\eta_1)^{-\beta-1} d\eta,$$

то

$$\beta \int_{\eta_1+\varepsilon}^{t} (t-\eta)^{-\frac{1}{2}} (\eta-\eta_1)^{-\beta-1} d\eta =$$

$$= \frac{d}{d\eta_1} \int_{\eta_1+\varepsilon}^{t} (t-\eta)^{-\frac{1}{2}} (\eta-\eta_1)^{-\beta} d\eta + \varepsilon^{-\beta} (t-\eta_1-\varepsilon)^{-\frac{1}{2}}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t (t-\eta)^{-\frac{1}{2}} D_{0\eta}^{\beta} \tau_0(\eta)\, d\eta =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(1-\beta)} \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int_{\varepsilon}^{t} \varepsilon^{-\beta} (t-\eta)^{-\frac{1}{2}} \tau_0(\eta-\varepsilon)\, d\eta - \right.$$

$$- \int_0^{t-\varepsilon} \varepsilon^{-\beta} (t-\eta_1-\varepsilon)^{-\frac{1}{2}} \tau_0(\eta_1)\, d\eta_1 -$$

$$\left. - \int_0^{t-\varepsilon} \tau_0(\eta_1)\, d\eta_1 \frac{d}{d\eta_1} \int_{\eta_1+\varepsilon}^{t} (t-\eta)^{-\frac{1}{2}} (\eta-\eta_1)^{-\beta}\, d\eta \right] =$$

$$= \frac{1-2\beta}{2\Gamma(3/2-\beta)} \int_0^t (t-\eta)^{-\beta-\frac{1}{2}} \tau_0(\eta)\, d\eta.$$

Аналогичными рассуждениями можно также показать, что

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t (t-\eta)^{-\frac{1}{2}} D_{0\eta}^{\beta} \tau_l(\eta)\, d\eta = \frac{1-2\beta}{2\Gamma(3/2-\beta)} \int_0^t (t-\eta)^{-\frac{1}{2}} \tau_l(\eta)\, d\eta.$$

Рассмотрим теперь выражения

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t (t-\eta)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{l^2}{4(t-\eta)}} D_{0\eta}^{\beta} \tau_l(\eta)\, d\eta +$$

$$+ \frac{l}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t (t-\eta)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{l^2}{4(t-\eta)}} \tau_l(\eta)\, d\eta =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \tau_l(\eta)\, D_{\eta T}^{\beta} K_1(t,\eta)\, d\eta + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t K_2(t,\eta)\, \tau_l(\eta)\, d\eta,$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t (t-\eta)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{l^2}{4(t-\eta)}} D_{0\eta}^{\beta} \tau_0(\eta)\, d\eta -$$

$$- \frac{l}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t (t-\eta)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{l^2}{4(t-\eta)}} \tau_0(\eta)\, d\eta =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \tau_0(\eta)\, D_{\eta T}^{\beta} K_1(t,\eta)\, d\eta - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t K_2(t,\eta)\, \tau_0(\eta)\, d\eta,$$

при преобразовании которых применена формула дробного интегрирования по частям [3], где

$$K_1(t,\eta) = (t-\eta)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{l^2}{4(t-\eta)}} \quad \text{и} \quad K_2(t,\eta) = \frac{l}{2} (t-\eta)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{l^2}{4(t-\eta)}}$$

— бесконечно дифференцируемые функции. В результате выражения (16) и (17) принимают вид

$$\tau_0(t) + \lambda \int_0^t (t-\eta)^{-\beta-\frac{1}{2}} \tau_0(\eta)\, d\eta - \int_0^t N_1(t,\eta)\, \tau_l(\eta)\, d\eta = \Phi_0(t), \tag{18}$$

$$\tau_l(t) - \lambda \int_0^t (t-\eta)^{-\beta-\frac{1}{2}} \tau_l(\eta)\, d\eta + \int_0^t N_2(t,\eta)\, \tau_0(\eta)\, d\eta = \Phi_l(t), \tag{19}$$

где

$$\lambda = \frac{1-2\beta}{\Gamma(3/2-\beta)}, \quad N_1(t,\eta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} D_{\eta T}^{\beta} K_1(t,\eta) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} K_2(t,\eta),$$

$$N_2(t,\eta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} D_{\eta T}^{\beta} K_1(t,\eta) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} K_2(t,\eta).$$

Итак, для определения $\tau_0(t)$ и $\tau_l(t)$ получена система интегральных уравнений (18) и (19). При $0<\beta<1/2$ уравнения (18) и (19) представляют собой интегральные уравнения Вольтерра второго рода, ядра которых $K(t,\eta) = (t - \eta)^{-\beta-1/2}$ имеют интегрируемую особенность. При $\beta \in (1/2, 1)$ в силу функциональной связи интеграла в смысле конечной части по Адамару с междупредельной (дробной) производной [8]

$$D_{ax}^{\alpha}\varphi(x) \equiv \frac{\operatorname{sign}^{[\alpha]}(x-a)}{\Gamma(-\alpha)} H_{ax}^{\alpha+1}\varphi(x)$$

имеем

$$H_{0t}^{\beta+1/2}\tau_0(t) = \left| \int_0^t (t-\eta)^{-\beta-\frac{1}{2}} \tau_0(\eta)\,d\eta = \Gamma\left(\frac{1}{2}-\beta\right) D_{0t}^{\beta-1/2}\tau_0(t), \right.$$

$$H_{0t}^{\beta+1/2}\tau_l(t) = \left| \int_0^t (t-\eta)^{-\beta-\frac{1}{2}} \tau_l(\eta)\,d\eta = \Gamma\left(\frac{1}{2}-\beta\right) D_{0t}^{\beta-1/2}\tau_l(t). \right.$$

С учетом этого уравнения (18) и (19) окончательно принимают вид

$$\tau_0(t) + D_{0t}^{\beta-1/2}\tau_0(t) - \int_0^t \tau_l(\eta)\,N_1(t,\eta)\,d\eta = \Phi_0(t), \tag{20}$$

$$\tau_l(t) - D_{0t}^{\beta-1/2}\tau_l(t) + \int_0^t \tau_0(\eta)\,N_2(t,\eta)\,d\eta = \Phi_l(t). \tag{21}$$

Как нетрудно заметить, уравнения (20) и (21) образуют систему интегральных уравнений Вольтерра второго рода, решение которой существует и единственно.

1. *Нахушев А. М.* Об уравнениях состояния одномерных систем и их приложениях. – Нальчик, 1995. – 50 с.
2. *Шхануков М. Х., Керефов А. А., Березовский А. А.* Краевые задачи для уравнения теплопроводности с дробной производной в граничных условиях и разностные методы их численной реализации // Укр. мат. журн. – 1993. – 45, № 9. – С. 1289–1298.
3. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.
4. *Рудин У.* Основы математического анализа. – М.: Мир, 1976. – 316 с.
5. *Кудрявцев Л. Д.* Краткий курс математического анализа. – М.: Наука, 1989. – 735 с.
6. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1966. – 724 с.
7. *Гурса Э.* Курс математического анализа: В 3-х т. – М.: Гостехиздат, 1933. – Т. 3, Ч. 1. – 272 с.
8. *Нахушев А. М.* Уравнения математической биологии. – М.: Высш. шк., 1995. – 301 с.

Получено 10.07.96