УДК 517.977.52

К. Б. Мансимов

Квазиособые управления в системах с запаздыванием

Как известно [1], всякое управление, особое в смысле принципа максимума Понтрягина, является квазиособым, тогда как квазиособые управления могут и не быть особыми в смысле принципа максимума Понтрягина. Поэтому условия оптимальности, полученные для квазиособых управлений, позволяют получить дополнительную информацию и об управлениях, не являющихся особыми в смысле принципа максимума Понтрягина.

В настоящей работе, примыкающей к работам [2, 3], получены новые необходимые условия оптимальности для квазиособых управлений в системах с запаздыванием.

1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу о минимуме функционала

$$S(u) = \varphi(x(t_1)) \tag{1}$$

при ограничениях

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(h(t)), u(t)), \quad t \in [t_0, t_1] = T, \quad x(t) = x^0(t), \quad t \in E_{t_0} = [h(t_0), t_0]. \tag{2}$$

Здесь $x(t)$ — n-мерный вектор фазовых переменных, $u(t)$ — r-мерный кусочно-непрерывный (в точках разрыва непрерывный справа) управляющий вектор со значениями из заданного непустого, ограниченного и выпуклого множества U — r-мерного евклидова пространства R^r (допустимое управление), $\varphi(x) \in C^2(R^n)$, t_0, t_1 фиксированы, $f(t, x, y, u)$ — заданная n-мерная вектор-функция, определенная и непрерывная на $T \times R^n \times R^n \times \times R^r$ вместе с частными производными по x, y, u до второго порядка включительно, $h(t) = t - \omega(t)$ — непрерывно-дифференцируемая функция, причем $\omega(t) > 0$, $\dot{\omega}(t) < 1$, $x^0(t)$ — непрерывная на E_{t_0} начальная вектор-функция.

В дальнейшем предполагается, что каждому допустимому управлению $u(t) \in U$, $t \in T$, соответствует единственное непрерывное и кусочно-непрерывно дифференцируемое решение $x(t)$ системы (2), определенное на $[t_0, t_1]$.

2. Формула приращения второго порядка критерия качества и необходимые условия оптимальности. Пусть $(u(t), x(t))$ — фиксированный допустимый процесс. Положим $H(t, x, y, u, \psi) = \psi' f(t, x, y, u)$, где $\psi = \psi(t)$ — n-мерная вектор-функция сопряженных переменных, являющаяся решением сопряженной системы

$$\dot{\psi}(t) = -H_x[t] - \dot{r}(t) H_y[r(t)], \quad \psi(t_1) = -\varphi_x(x(t_1)), \quad \psi(t) \equiv 0, \quad t > t_1.$$

Здесь и в дальнейшем приняты обозначения $H_x[t] = H_x(t, x(t), y(t), u(t), \psi(t))$, $H_y[t] \equiv H_y(t, x(t), y(t), u(t), \psi(t))$, $r(t)$ — функция, обратная к $h(t)$.

Известно (см., например, [4, 5]), что для оптимальности допустимого управления $u(t)$ в задаче (1), (2) необходимо, чтобы выполнялось условие

$$H'_u[\theta](v - u(\theta)) \leqslant 0, \quad v \in U, \quad \theta \in [t_0, t_1), \tag{3}$$

где $\theta \in [t_0, t_1) = T_0$ — произвольная точка непрерывности $u(t)$. Условие (3) является необходимым условием оптимальности первого порядка.

Следуя [1], $u(t)$ назовем квазиособым, если вдоль процесса $(u(t), x(t))$

$$H'_u[\theta](v - u(\theta)) \equiv 0, \quad v \in U, \quad \theta [t_0, t_1).$$

Для оптимальности квазиособого управления $u(t)$ необходимое условие имеет вид

$$(v - u(\theta))' H_{uu}[\theta](v - u(\theta)) \leqslant 0, \quad v \in U, \quad \theta \in [t_0, t_1). \tag{4}$$

Условие (4), как и условие (3), является прямым следствием принципа максимума Понтрягина (см., например, [4, 5]) для задачи (1), (2).

Определение. *Квазиособое управление $u(t)$ назовем сильно квазиособым, если вдоль процесса $(u(t), x(t))$*

$$(v - u(\theta))' H_{uu}[\theta](v - u(\theta)) \equiv 0, \quad v \in U, \Theta \in [t_0, t_1).$$

Нашей целью является исследование на оптимальность сильно квазиособых управлений.

Пусть $u(t)$ — сильно квазиособое оптимальное управление. Специальное приращение этого управления определим следующим образом: $\Delta u_{\varepsilon\mu}(t) = \varepsilon\delta u_\mu(t)$, где $0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1$, $\mu > 0$ — достаточно малое число,

$$\delta u_\mu(t) = \sum_{i=1}^{m} \delta u(t, \mu; \theta_j, v_j, l_j). \tag{5}$$

Здесь m — произвольное натуральное число, $\theta_j \in [t_0, t_1)$, $j = \overline{1, m}$, $t_0 \leqslant \theta_1 \leqslant \leqslant \theta_2 \leqslant \ldots \leqslant \theta_m < t_1$, — произвольные точки непрерывности $u(t)$, $l_j \geqslant 0$, $j = \overline{1, m}$, — произвольные действительные числа, $v_j \in U$, $j = \overline{1, m}$, а $\delta u(t, \mu; \theta_j, v_j, l_j)$ — игольчатая вариация управления,

$$\delta u(t, \mu; \theta_j, v_j\, l_j) = \begin{cases} v_j - u(t), & t \in [\theta_j, \theta_j + l_j\mu), \\ 0, & t \overline{\in} [\theta_j, \theta_j + l_j\mu). \end{cases}$$

Суммирование игольчатых вариаций понимается в обычном смысле [6].

Обозначим через $\Delta x_{\varepsilon\mu}(t)$ специальное приращение траектории, соответствующей приращению $\Delta u_{\varepsilon\mu}(t)$ управления. С помощью леммы Гронуолла — Беллмана нетрудно получить оценку $\| \Delta x_{\varepsilon\mu}(t) \| \leqslant L\varepsilon\mu$, $L = \mathrm{const} > 0$. Используя эту оценку, можно показать, что для оптимальности сильно квазиособого управления $u(t)$ необходимо выполнение вдоль процесса $(u(t), x(t))$ неравенства

$$\delta x'_\mu(t_1)\, \varphi_{xx}(x(t_1))\, \delta x_\mu(t_1) - \int_{t_0}^{t_1} [\delta x'_\mu(t)\, H_{xx}[t]\, \delta x_\mu(t) + \delta x'_\mu(t)\, H_{xy}[t]\, \delta y_\mu(t) +$$
$$+ \delta y'_\mu(t)\, H_{yx}[t]\, \delta x_\mu(t) + \delta y'_\mu(t)\, H_{yy}[t]\, \delta y_\mu(t) + 2\delta u'_\mu(t)\, H_{ux}[t]\, \delta x_\mu(t) +$$
$$+ 2\delta u'_\mu(t)\, H_{uy}[t]\, \delta y_\mu(t)]\, dt \geqslant 0. \tag{6}$$

Здесь $\delta x_\mu(t)$ — вариация траектории, являющаяся решением уравнения в вариациях:

$$\delta \dot{x}_\mu(t) = f_x[t]\, \delta x_\mu(t) + f_y[t]\, \delta y_\mu(t) + f_u[t]\, \delta u_\mu(t); \quad \delta x_\mu(t) \equiv 0, \quad t \in E_{t_0}. \tag{7}$$

Уравнение (7) является линейным неоднородным уравнением с запаздывающим аргументом относительно $\delta x_\mu(t)$. Поэтому на основе аналога формулы Коши (см., например, [5, 7]) имеем

$$\delta x_\mu(t) = \int_{t_0}^{t} \lambda(t, s)\, f_u[s]\, \delta u_\mu(s)\, ds, \tag{8}$$

где $\lambda(t, s)$ — $(n \times n)$-матричная функция, являющаяся решением уравнения

$$\lambda_s(t, s) = -\lambda(t, s)\, f_x[s] - \dot{r}(s)\, \lambda(t, r(s))\, f_y[r(s)], \quad t_0 \leqslant s < t \leqslant t_1,$$
$$\lambda(t, t) = E, \quad \lambda(t, s) = 0, \quad s > t_1 \tag{9}$$

(E — единичная матрица).

Следуя [3], положим

$$K(\tau, s) = \int_{\max(\tau, s)}^{t_1} [\lambda'(t, \tau)\, H_{xx}[t]\, \lambda(t, s) + \lambda'(t, \tau)\, H_{xy}[t]\, \lambda(h(t), s) +$$
$$+ \lambda'(h(t), \tau)\, H_{yx}[t]\, \lambda(t, s) + \lambda'(h(t), \tau)\, H_{yy}[t]\, \lambda(h(t), s)]\, dt -$$
$$- \lambda'(t_1, \tau)\, \varphi_{xx}(x(t_1))\, \lambda(t_1, s). \tag{10}$$

Принимая во внимание (10), с помощью (8) неравенство (6) можно представить в следующем виде:

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1} \delta u'_\mu(\tau) f'_u[\tau] K(\tau, s) f_u[s] \delta u_\mu(s)\, ds d\tau +$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1}\left[\int_{t}^{t_1} (\delta u'_\mu(s) H_{ux}[s] \lambda(s, t) + \delta u'_\mu(s) H_{uy}[s] \lambda(h(s), t))\, ds\right] f_u[t] \delta u_\mu(t)\, dt \leqslant 0. \tag{11}$$

Из неравенства (11) с учетом (5) следует такая теорема.

Т е о р е м а. *Для оптимальности сильно квазиособого управления* $u(t)$ *в задаче* (1), (2) *необходимо, чтобы для любого натурального числа* m *неравенство*

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} l_i l_j (v_i - u(\theta_i))' f'_u[\theta_i] K(\theta_i, \theta_j) f_u[\theta_j] (v_j - u(\theta_j)) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} l_i (v_i - u(\theta_i))' H_{ux}[\theta_i] \Big\{ l_i f_u[\theta_i] (v_i - u(\theta_i)) +$$

$$+ 2 \sum_{j=1}^{i-1} l_j \lambda(\theta_i, \theta_j) f_u[\theta_j] (v_j - u(\theta_j))\Big\} +$$

$$+ 2 \sum_{i=1}^{m} l_i (v_i - u(\theta_i))' H_{uy}[\theta_i] \left(\sum_{j=1}^{i-1} l_j \lambda(h(\theta_i), \theta_j) f_u[\theta_j] (v_j - u(\theta_j))\right) \leqslant 0$$

выполнялось для всех $v_i \in U$, $l_i \geqslant 0$, $\theta_i \in [t_0, t_1)$, $i = \overline{1, m}$, $t_0 \leqslant \theta_1 \leqslant \theta_2 \leqslant \ldots \leqslant \theta_m < t_1$.

Таким образом, для сильно квазиособых управлений получена последовательность необходимых условий оптимальности, которые вдоль исследуемого на оптимальность процесса должны выполняться независимо одно от другого. Это в свою очередь позволяет существенно сократить число квазиособых управлений, подозрительных на оптимальность.

Из условия (12) легко можно получить различные более простые по структуре и удобные для проверки необходимые условия оптимальности. При $m = 1$ из (12) следует условие оптимальности, полученное при иных предположениях в работе [8].

Однако, условия оптимальности, получающиеся из (12) при $m = 2, 3, \ldots$, более сильные, чем соответствующий результат из [8].

1. *Габасов Р., Кирилова Ф. М.* Особые оптимальные управления.— М. : Наука, 1973.— 256 с.
2. *Мансимов К. Б.* Об одной последовательности необходимых условий оптимальности особых управлений в системах с запаздыванием // Докл. АН АзССР.— 1978.— **34**, № 10.— С. 8—12.
3. *Мансимов К. Б.* Новые многоточечные необходимые условия оптимальности особых управлений в системах с запаздыванием.— М., 1981.— 23 с.— Деп. в ВИНИТИ, № 2778-81.
4. *Габасов Р., Кирилова Ф. М.* Принцип максимума в теории оптимального управления.— Минск : Наука и техника, 1974.— 274 с.
5. *Харатишвили Г. Л. и др.* Абстрактная вариационная теория и ее применение к оптимальным задачам с запаздыванием.— Тбилиси : Мецниереба, 1973.— 175 с.
6. *Гороховик С. Я.* Необходимые условия оптимальности в задаче с подвижным правым концом траектории // Дифференц. уравнения.— 1975.— **11**, № 10.— С. 1765—1773.
7. *Габасов Р., Кирилова Ф. М.* Оптимизация линейных систем. — Минск: Изд-во Белорус. ун-та, 1973.— 1985 с.
8. *Меликов Т. К.* Исследование особых процессов в некоторых оптимальных системах : Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук.— Баку, 1976.— 16 с.

Ин-т кибернетики АН АзССР, Баку

Получено 13.02.84,
после доработки — 04.02.86