УДК 517.944

Г. И. Данилюк, И. В. Скрыпник

Априорные оценки обобщенных решений нелинейных параболических систем высшего порядка

В настоящей работе устанавливаются априорные оценки обобщенного решения нелинейной параболической системы дивергентного вида

$$\partial u^k/\partial t + \sum_{|\alpha|\leqslant m} (-1)^{|\alpha|} D_x^\alpha a_\alpha^k (x, t, u, \ldots, D_x^m u) = 0, \qquad k = 1, \ldots, N, \tag{1}$$

в цилиндрической области $Q_T = \Omega \times [0, T]$, где Ω — произвольная ограниченная область в R^n с гладкой границей $\partial\Omega$. Здесь $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, $D_x^\alpha = (\partial/\partial x_1)^{\alpha_1} \ldots (\partial/\partial x_n)^{\alpha_n}$, $D_x^m u = \{D_x^\alpha u^k : |\alpha| = m, k = 1, \ldots, N\}$.

Будем предполагать:

а) при $(x, t) \in Q_T$, $\xi = \{\xi_\gamma^k, |\gamma| \leqslant m, k = 1, \ldots, N\}$, $\xi_\gamma^k \in R^1$, функции $D_x^\beta D_\xi^\sigma a_\alpha^k (x, t, \xi)$, $|\alpha| \leqslant m$, $k = 1, \ldots, N$, при $|\beta| + \sigma = 2$ удовлетворяют на каждом компактном подмножестве условию Гельдера по x и ξ с показателем μ, $0 < \mu < 1$, а при $2 + \mu - |\beta| - \sigma > 0$ — условию Гельдера по t с показателем $\frac{1}{2m}(2 + \mu - |\beta| - \sigma)$;

б) с $q \geqslant 2$ и положительными K_1, K_2 при $(x, t) \in Q_T$, ξ_γ^k, $\eta_\gamma^k \in R^1$ выполняются неравенства

$$\sum_{k,l=1}^{N} \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} \frac{\partial a_\alpha^k (x, t, \xi)}{\partial \xi_\beta^l} \eta_\alpha^k \eta_\beta^l \geqslant K_1 [W(\xi)]^{q-2} \sum_{k=1}^{N} \sum_{|\alpha|=m} |\eta_\alpha^k|^2, \tag{2}$$

$$|a_\alpha^k| + \left|\frac{\partial a_\alpha^k}{\partial x_i}\right| + \left|\frac{\partial a_\alpha^k}{\partial t}\right| + \left\{\left|\frac{\partial a_\alpha^k}{\partial \xi_\beta^l}\right| + \left|\frac{\partial^2 a_\alpha^k}{\partial \xi_\beta^l \partial x_i}\right| + \right.$$
$$\left. + \left|\frac{\partial^2 a_\alpha^k}{\partial \xi_\beta^l \partial \xi_\gamma^j}\right| + \left|\frac{\partial^2 a_\alpha^k}{\partial \xi_\beta^l \partial t}\right|\right\} W(\xi) \leqslant K_2 [W(\xi)]^{q-1}. \tag{3}$$

В (3) $|\alpha|$, $|\beta|$, $|\gamma| \leqslant m$, $k, l, j = 1, \ldots, N$, $i = 1, \ldots, n$; $W(\xi) = 1 + \sum_{l=1}^{N} \sum_{|\beta|\leqslant m} |\xi_\beta^l|$.

Обозначим символом $V_{q,2}^{m,0}(Q_T)$, $m > 1$, $q \geqslant 2$, пространство функций $u(x, t)$, полученное замыканием по норме $\|u\|_{q,2,Q_T}^{(m,0)} = \operatorname{vrai\,max}_{0\leqslant t\leqslant T} \|u\|_{2,\Omega} + \sum_{|\alpha|=m} \|D_x^\alpha u\|_{q,Q_T}$ множества бесконечно дифференцируемых в $\overline{Q}_T$ функций. Здесь $\|\cdot\|_{2,\Omega}$, $\|\cdot\|_{q,Q_T}$ — нормы в пространствах $L_2(\Omega)$ и $L_q(Q_T)$ соответственно. Все элементы $V_{q,2}^{m,0}(Q_T)$ непрерывны по t в норме $L_2(\Omega)$. Через $\overset{0}{V}{}_{q,2}^{m,0}(Q_T)$ обозначим подпространство пространства $V_{q,2}^{m,0}(Q_T)$, плотным множеством которого является множество гладких в Q_T функций, равных нулю вблизи $\partial\Omega \times [0, T]$.

Обобщенным решением системы (1) будем называть вектор-функцию $u(x, t) = (u^1(x, t), \ldots, u^N(x, t))$ такую, что $u^k(x, t) \in V_{q,2}^{m,0}(Q_T)$, $k = 1, \ldots, N$, и для произвольной функции $v^k(x, t) \in \overset{0}{V}{}_{q,2}^{m,0}(Q_T)$, имеющей принадлежащую $L_2(Q_T)$ производную по t, при $0 < t_0 \leqslant T$, $k = 1, \ldots, N$ выполняются равенства

$$\int_\Omega u^k v^k dx \Big|_{t=0}^{t=t_0} + \int_0^{t_0} \int_\Omega \Big(-u^k \partial v^k/\partial t + \sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha^k (x, t, u, \ldots, D_x^m u) D_x^\alpha v^k\Big) dx dt = 0. \tag{4}$$

Легко проверить, что при выполнении условий (3) все входящие в равенства (4) интегралы конечны для любых функций $u^k(x, t)$ и $v^k(x, t)$ из указанных классов.

Замечание. В предположениях а), б) для обобщенного решения $u(x, t)$ системы (1), имеющего производные $\partial u^k/\partial t$, $k = 1, \ldots, N$, принадлежащие $L_2(Q_T)$, существует подмножество $Z \subset Q_T$ меры нуль такое, что $Q_T \setminus Z$ открыто и в $Q_T \setminus Z$ функции $u^k(x, t)$, $k = 1, \ldots, N$, m раз непрерывно дифференцируемы по x [1]. При доказательстве этого факта важную роль играют априорные оценки обобщенного решения системы (1). В данной работе приводятся необходимые для этого оценки.

Лемма 1. *Для любой функции* $u(x, t) \in V_{q,2}^{m,0}(Q_T)$ *справедлива оценка*

$$\| D_x^\alpha u \|_{q_\alpha, Q_T} \leqslant c \| u \|_{q,2,Q_T}^{(m,0)}, \tag{5}$$

где $0 \leqslant |\alpha| \leqslant m$, $q_\alpha = q(n + 2m)/(n + 2|\alpha|)$.

Доказательство леммы элементарно и проводится с помощью интерполяционного неравенства Ниренберга—Гальярдо [2].

Теорема 1. *Пусть* $u(x, t)$ — *обобщенное решение системы* (1) *и выполнены условия* (2), (3). *Тогда для произвольной бесконечно дифференцируемой в* R^{n+1} *функции* $\omega(x, t)$, *равной нулю вне* Q_T, *справедлива оценка*

$$\sum_{k=1}^{N} \int_{R^1} \int_{R^1} \int_{\Omega} \left| \frac{\Delta_t(h) [\tilde{u}^k(x, t) \omega(x, t)]}{h} \right|^2 dx dt dh < c_1, \tag{6}$$

где постоянная c_1 *зависит от* n, m, q, N, K_1, K_2, $\| u^k \|_{q,2,Q_T}^{(m,0)}$, ω; $\Delta_t(h) \times \varphi(x, t) = \varphi(x, t + h) - \varphi(x, t)$; $\tilde{u}^k(x, t)$ — *продолжение функции* $u^k(x, t)$ *на* $\Omega \times R^1$ *нулем вне* Q_T.

Доказательство. Подставим в равенства (4) $v^k(x, t) = \omega(x, t) \psi^k(x, t)$, где $\omega(x, t)$ — некоторая фиксированная функция, удовлетворяющая условиям теоремы, $\psi^k(x, t)$ — произвольная функция класса $V_{q,2}^{m,0}(Q_T)$, имеющая принадлежащую $L_2(Q_T)$ производную по t, и представим равенства в виде

$$\int_0^T \int_\Omega \Big(- u^k \omega \partial \psi^k / \partial t + \sum_{l=1}^{N} \sum_{|\alpha| \leqslant m} F_\alpha^{kl} D_x^\alpha \psi^k \Big) dx dt = 0, \tag{7}$$

где F_α^{kl} — линейные комбинации функций вида $a_\alpha^k(x, t, u, \ldots, D_x^m u) D_x^\gamma \omega$, $u^k \partial \omega / \partial t$. Функции F_α^{kl} принадлежат пространству $L_{q/(q-1)}(Q_T)$ и

$$\sum_{k,l=1}^{N} \sum_{|\alpha| \leqslant m} \| F_\alpha^{kl} \|_{q/(q-1), Q_T} \leqslant c' \sum_{k=1}^{N} \sum_{|\alpha| \leqslant m} \| D_x^\alpha u^k \|_{q,Q_T}^{q-1} \tag{8}$$

с постоянной c', зависящей лишь от известных параметров.

Продолжим функции F_α^{kl} на $\Omega \times R^1$, полагая их равными нулю при $t \notin [0, T]$, и обозначим так полученное продолжение через $\tilde{F}_\alpha^{kl}$. В равенствах (7) можно интегрирование по t по отрезку $[0, T]$ заменить интегрированием по R^1, заменяя u^k, F_α^{kl} соответственно на $\tilde{u}^k$, $\tilde{F}_\alpha^{kl}$. При этом ψ^k в так измененных равенствах может быть любой функцией, принадлежащей $V_{q,2}^{m,0}(\Omega \times R^1)$ и имеющей принадлежащую $L_2(\Omega \times R^1)$ производную по t. Возьмем в качестве $\psi^k(x, t)$ функцию

$$\psi^k(x, t) = \frac{1}{h} \int_{t-h}^{t} \eta(\tau) d\tau \varphi^k(x) = \eta_{\bar{h}}(t) \varphi^k(x),$$

где $h \in R^1$, $h \neq 0$, $\eta(t)$ — бесконечно дифференцируемая функция с компактным носителем, $\varphi^k(x) \in \mathring{W}_q^m(\Omega)$. Тогда

$$\frac{\partial \psi^k(x, t)}{\partial t} = \frac{\eta(t) - \eta(t - h)}{h} \varphi^k(x) = - \frac{\Delta_t(-h) \eta(t)}{h} \varphi^k(x)$$

и

$$\int\limits_{R^1}\int\limits_{\Omega}\left[\frac{\Delta_t(-h)\,\eta(t)}{h}\,\tilde{u}^k\omega\varphi^k+\sum_{l=1}^{N}\sum_{|\alpha|\leqslant m}\tilde{F}_\alpha^{kl}\eta_{\bar{h}}D_x^\alpha\varphi^k\right]dxdt=0.$$

Перебрасывая теперь разностный оператор в первом слагаемом в квадратной скобке с $\eta(t)$ на $\tilde{u}^k\omega$, оператор усреднения во втором слагаемом с $\eta(t)$ на $\tilde{F}_\alpha^{kl}$, имеем

$$\int\limits_{R^1}\int\limits_{\Omega}\left[\frac{\Delta_t(h)\,[\tilde{u}^k\omega]}{h}\,\eta\varphi^k+\sum_{l=1}^{N}\sum_{|\alpha|\leqslant m}[\tilde{F}_\alpha^{kl}]_h\,\eta D_x^\alpha\varphi^k\right]dxdt=0. \tag{9}$$

Отсюда в силу произвольности $\eta(t)$ следует, что почти при всех t

$$\int\limits_{\Omega}\left[\frac{\Delta_t(h)\,[\tilde{u}^k\omega]}{h}\,\varphi^k+\sum_{l=1}^{N}\sum_{|\alpha|\leqslant m}[\tilde{F}_\alpha^{kl}]_h\,D_x^\alpha\varphi^k\right]dx=0. \tag{10}$$

Применяя к левой части (10) преобразование Фурье по t

$$\Phi_t\rho(x,\tau)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\rho(x,t)\,e^{i\tau t}dt,$$

получаем

$$\int\limits_{\Omega}\left[\frac{e^{-i\tau h}-1}{h}\,\Phi_t[\tilde{u}^k\omega]\,\varphi^k+\sum_{l=1}^{N}\sum_{|\alpha|\leqslant m}\Phi_t\,[\tilde{F}_\alpha^{kl}]_h\,D_x^\alpha\varphi^k\right]dx=0. \tag{11}$$

Положив в (11) $\varphi^k(x)=\dfrac{e^{i\tau h}-1}{h}\,\overline{\Phi_t[\tilde{u}^k\omega]}$, где черта обозначает комплексное сопряжение, и проинтегрировав полученное выражение по τ, $h\in R^1$, будем иметь

$$\int\limits_{R^1}\int\limits_{R^1}\int\limits_{\Omega}\frac{4\sin^2\tau h/2}{h^2}\,|\Phi_t[\tilde{u}^k\omega]|^2\,dxd\tau dh=$$

$$=-\int\limits_{R^1}\int\limits_{R^1}\int\limits_{\Omega}\sum_{l=1}^{N}\sum_{|\alpha|\leqslant m}\Phi_t\,[\tilde{F}_\alpha^{kl}]_h\,\frac{e^{i\tau h}-1}{h}\,\overline{D_x^\alpha\Phi_t\,[\tilde{u}^k\omega]}\,dxd\tau dh. \tag{12}$$

Представляя выражение $\Phi_t\,[\tilde{F}_\alpha^{kl}]_h$ в виде $\Phi_t\,[\tilde{F}_\alpha^{kl}]_h=\dfrac{1-e^{-i\tau h}}{i\tau h}\,\Phi_t\,[\tilde{F}_\alpha^{kl}]$, можно переписать правую часть (12) следующим образом:

$$-4i\int\limits_{R^1}\int\limits_{R^1}\int\limits_{\Omega}\sum_{l=1}^{N}\sum_{|\alpha|\leqslant m}\Phi_t\,[\tilde{F}_\alpha^{kl}]\,\frac{\sin^2\tau h/2}{\tau h^2}\,\overline{D_x^\alpha\Phi_t\,[\tilde{u}^k\omega]}\,dxd\tau dh=$$

$$=-2i\int\limits_{R^1}\frac{\sin^2\varkappa}{\varkappa^2}\,d\varkappa\int\limits_{R^1}\int\limits_{\Omega}\sum_{l=1}^{N}\sum_{|\alpha|\leqslant m}\operatorname{sign}\tau\,\Phi_t\,[\tilde{F}_\alpha^{kl}]\,\overline{\Phi_t\,(D_x^\alpha\,[\tilde{u}^k\omega])}\,dxd\tau. \tag{13}$$

Первый интеграл в правой части (13) имеет конечное значение, второй по равенству Парсеваля можно представить в виде

$$\int\limits_{R^1}\int\limits_{\Omega}\sum_{l=1}^{N}\sum_{|\alpha|\leqslant m}\hat{F}_\alpha^{kl}D_x^\alpha\,[\tilde{u}^k\omega]\,dxdt, \tag{14}$$

где $\hat{F}_\alpha^{kl}=\Phi_t^{-1}\,[\operatorname{sign}\tau\Phi_t\,[\tilde{F}_\alpha^{kl}]]$.

Функция $\operatorname{sign}\tau$ является мультипликатором класса (L_p, L_p) при любом p, $1 < p < \infty$ [3], и поэтому с некоторой, зависящей лишь от q, постоянной A имеем $\|\widehat{F}_\alpha^{kl}\|_{q/(q-1),\Omega\times R^1} \leqslant A\|F_\alpha^{kl}\|_{q/(q-1),Q_T}$. Отсюда и из неравенства (8) следует ограниченность интеграла, стоящего в (14).

Таким образом, получаем оценку для левой части (12), а следовательно, и для интеграла, стоящего в левой части неравенства (6), так как в силу равенства Парсеваля левые части (6) и (12) совпадают.

Обозначим в дальнейшем при $\rho > 0$ через $Q_T^{(\rho)}$ подобласть цилиндра Q_T, состоящую из всех точек (x, t) таких, что $\operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \rho$, $\rho^{2m} < t < T - \rho^{2m}$.

Теорема 2. *Пусть $u(x, t)$ — обобщенное решение системы* (1) *и выполняются условия* (2), (3). *Тогда для произвольной строго внутренней подобласти Q' цилиндра Q_T, отстоящей от* $\Gamma_T = \{(x, t) : x \in \partial\Omega,\ t \in [0, T]\} \cup \{(x, t) : x \in \Omega,\ t = 0\}$ *на расстояние d, выполняется оценка*

$$\int\limits_{Q'} [V(x, t; h)]^{q-2} \sum_{k=1}^{N} \sum_{|\alpha|=m} |\Delta_t(h) D_x^\alpha u^k|^2\, dxdt \leqslant c_1' h^{\delta/m}, \tag{15}$$

где $\delta = \min\{1/2,\ 4m^2/(2mq + nq - 2n)\}$, $0 < h < d/2$, *постоянная c_1' определяется величинами* $m, q, N, K_1, K_2, T, \operatorname{mes}\Omega, d, \|u^k\|_{q,2,Q_T}^{(m,0)}$, *а* $V(x, t; h) = 1 + \sum\limits_{k=1}^{N} \sum\limits_{|\alpha| \leqslant m} (|D_x^\alpha u^k(x, t)| + |D_x^\alpha u^k(x, t + h)|)$.

Доказательство. Из равенств (4) следуют равенства [4]

$$\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial t} u_\tau^k \hat{v}^k + \sum_{|\alpha| \leqslant m} (a_\alpha^k(x, t, u, \ldots, D_x^m u))_\tau D_x^\alpha \hat{v}^k\right] dxdt = 0 \tag{16}$$

при $\tau \leqslant t_0 \leqslant t_1 \leqslant T - \tau$ с любой функцией $\hat{v}^k(x, t) \in \overset{0}{V}{}_{q,2}^{m,0}(Q_{T-\tau})$. Здесь $(\ldots)_\tau$ означает стекловское усреднение по t вверх.

Выберем бесконечно дифференцируемую в Q_T функцию $\varphi(x, t)$, равную единице в Q' и нулю вне $Q_T^{(d/2)}$ так, чтобы $\max\limits_{\bar{Q}_T}\left\{|\partial\varphi/\partial t|,\ \sum\limits_{|\alpha| \leqslant m} |D_x^\alpha \varphi|\right\} \leqslant \mathrm{const}$.

В равенства (16) подставим $\hat{v}^k(x, t) = \Delta_t(-h)\left\{\Delta_t(h)\dfrac{\partial}{\partial t} u_\tau^k \varphi^s\right\}$, $s = 2mq/(q - 2)$, перенесем разностный оператор $\Delta_t(-h)$ на рядом стоящие множители и совершим предельный переход по $\tau \to 0$, законность которого следует из условия (3) на функции $a_\alpha^k(x, t, \xi)$ и из принадлежности $u^k(x, t)$ пространству $V_{q,2}^{m,0}(Q_T)$. В результате этого при $k = 1, \ldots, N$ получим

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |\Delta_t(h) u^k|^2 \varphi^s dx \Big|_{t_0}^{t_1} + \int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{\Omega}\Big\{-|\Delta_t(h) u^k|^2 s\varphi^{s-1}\partial\varphi/\partial t +$$
$$+ \sum_{|\alpha| \leqslant m} \Delta_t(h) a_\alpha^k(x, t, u, \ldots, D_x^m u) D_x^\alpha(\Delta_t(h) u^k \varphi^s)\Big\} dxdt = 0. \tag{17}$$

В (17) t_0 и t_1 можно брать любыми из $[0, T]$. Проводя элементарные преобразования и оценки, пользуясь при этом неравенствами Коши и Юнга, из (17) при $t_0 = 0$, $t_1 = T$ легко получить неравенство

$$\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega} [V(x, t; h)]^{q-2} \sum_{k=1}^{N}\sum_{|\alpha|=m} |\Delta_t(h) D_x^\alpha u^k|^2 \varphi^s / h^{\delta/m} dxdt \leqslant$$
$$\leqslant c' \int\limits_0^T\int\limits_{\Omega} [V(x, t; h)]^q (1 + h^{q/(q-1)}) \sum_{\substack{|\alpha| \leqslant m \\ 1 \leqslant |\gamma| < |\alpha|}} \varphi^{s - \frac{2q}{q-2}(|\alpha| - |\gamma|)} dxdt +$$
$$+ c'' \int\limits_0^T\int\limits_{\Omega} (1 + h^{\frac{\delta q}{2m}}) \sum_{k=1}^{N} |\Delta_t(h) u^k|^q \varphi^s / h^{\delta q/m} dxdt. \tag{18}$$

Постоянные c' и c'' в этом неравенстве не зависят от h.

Покажем теперь, что

$$\int_0^T \int_\Omega \sum_{k=1}^N |\Delta_t(h) u^k|^q \varphi^s / h^{\delta q/m} dxdt \leqslant \text{const} < \infty. \tag{19}$$

Из оценки (6) следует, что при почти всех $h \in R^1$

$$\int_0^T \int_\Omega \sum_{k=1}^N \frac{|\Delta_t(h) u^k|^2 \omega^2}{h^2} dxdt \leqslant \text{const} < \infty, \tag{20}$$

где $\omega(x, t)$ — произвольная функция из $C_0^\infty(Q_T)$, а в силу леммы 1 справедлива оценка

$$\| u^k \varphi^{sn/(nq+2mq)} \|_{q\frac{n+2m}{n}, Q_T} \leqslant \text{const} < \infty. \tag{21}$$

Пользуясь неравенством Юнга, можем записать

$$\int_0^T \int_\Omega \sum_{k=1}^N \frac{|\Delta_t(h) u^k|^q}{h^{\delta q/m}} \varphi^s dxdt \leqslant \int_0^T \int_\Omega \sum_{k=1}^N \Bigg[\frac{\delta q}{2m} \varepsilon^{\frac{2m}{\delta q}} \frac{|\Delta_t(h) u^k|^2}{h^2} +$$

$$+ \frac{2m - \delta q}{2m} \varepsilon^{-\frac{2m}{2m-\delta q}} |\Delta_t(h) u^k|^{\left(q - \frac{\delta q}{m}\right)\frac{2m}{2m-\delta q}} \Bigg] \varphi^s dxdt. \tag{22}$$

Оценка (19) следует из (20)—(22) в силу выбора числа δ.

С учетом предположения о функции $\varphi(x, t)$, а также оценок (5) и (19), из (18) непосредственно следует оценка (15).

Лемма 2. *При выполнении предположений теоремы* 1 *для любого обобщенного решения* $u(x, t)$ *системы* (1) *справедлива оценка*

$$\int_{R^1} \int_{R^1} \int_\Omega [\tilde{V}(x, t; h)]^{q-2} \sum_{k=1}^N \sum_{|\alpha|=m} \frac{|\Delta_t(h) D_x^\alpha [\tilde{u}^k \omega]|^2}{h^{1+\lambda}} dxdtdh \leqslant c_1'', \tag{23}$$

где c_1'' *зависит от тех же параметров, что и постоянные* c_1 *в* (6) *и* c_1' *в* (15), $\lambda = \delta/[2m(2q-1)]$, δ — *число, указанное в теореме* 2.

Доказательство этой леммы аналогично доказательству теоремы 2. Отметим только, что при этом используется оценка (15).

Лемма 3. *При выполнении предположений теоремы* 1 *для любого обобщенного решения* $u(x, t)$ *системы* (1) *справедлива оценка*

$$\sum_{k=1}^N \sum_{|\alpha| \leqslant m} \int_{R^1} \int_{R^1} \int_\Omega \frac{|\Delta_t(h) D_x^\alpha [\tilde{u}^k \omega]|^2}{h^{2-|\alpha|/m+\lambda|\alpha|/m}} dxdtdh \leqslant c_1''', \tag{24}$$

где c_1''' *зависит от тех же параметров, что и постоянные* c_1, c_1, c_1'', λ — *положительное число, указанное в лемме* 2.

Доказательство. Как следует из оценок (6), (23) при почти всех h, $t \in R^1$ конечен интеграл

$$\int_\Omega \sum_{k=1}^N \left\{ \frac{|\Delta_t(h) [\tilde{u}^k \omega]|^2}{h^2} + \sum_{|\alpha|=m} \frac{|D_x^\alpha \Delta_t(h) [\tilde{u}^k \omega]|^2}{h^{1+\lambda}} \right\} dx.$$

Применяя при таких значениях h, t к функции $\Delta_t(h) [\tilde{u}^k \omega]$ известное интерполяционное неравенство, при $1 \leqslant |\gamma| \leqslant m-1$ и произвольном положительном ε имеем

$$\int_\Omega \sum_{k=1}^N |D_x^\gamma \Delta_t(h) [\tilde{u}^k \omega]|^2 dx \leqslant c \int_\Omega \sum_{k=1}^N \left\{ \varepsilon^{-|\gamma|} |\Delta_t(h) [\tilde{u}^k \omega]|^2 + \right.$$

$$+\varepsilon^{m-|\gamma|}\sum_{|\alpha|=m}|D_x^\alpha\Delta_t(h)[\widetilde{u^k\omega}]|^2\Big\}\,dx \tag{25}$$

с постоянной c, зависящей лишь от m и Ω.

Неравенство (24) следует теперь непосредственно из (6), (23) и оценки (25) при $\varepsilon=h^{(1-\lambda)/m}$.

Теорема 3. *Пусть выполнены предположения леммы 2 и, кроме того, обобщенное решение системы* (1) *имеет принадлежащую $L_2(Q_T)$ производную по t. Тогда по любому внутреннему цилиндру $Q'=\Omega'\times\times(t_0,t_1)$, $\overline{\Omega}'\subset\Omega$, $0<t_0<t_1<T$ справедлива оценка*

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{\Omega'}\Big(1+\sum_{k=1}^N\sum_{|\alpha|\leqslant m}|D_x^\alpha u^k|\Big)^{qs}dxdt\leqslant c_0 \tag{26}$$

с некоторым $s>1$ и постоянной c_0, зависящей только от известных параметров.

Доказательство. Как следует из результатов работы М. И. Вишика [5], существует обобщенное решение $u(x,t)$ системы (1), обладающее требуемой в теореме производной по t и для него справедлива оценка

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{\Omega'}\Big(1+\sum_{k=1}^N\sum_{|\alpha|\leqslant m}|D_x^\alpha u^k|\Big)^{q-2}\sum_{k=1}^N\sum_{|\alpha|=m}\Big|\frac{\partial}{\partial x}D_x^\alpha u^k\Big|^2dxdt\leqslant K(Q').$$

Отсюда следует

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{\Omega'}\Bigg(1+\sum_{k=1}^N\Bigg|\frac{\partial}{\partial x}\Bigg(\sum_{|\alpha|=m}|D_x^\alpha u^k|\Bigg)^{q/2}\Bigg|^2dxdt\leqslant K(Q'). \tag{27}$$

Далее, согласно лемме 2 при $\omega(x,t)\equiv 1$ в Q' имеем

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1-h}\int_{\Omega'}\sum_{k=1}^N\sum_{|\alpha|=m}|\Delta_t(h)|D_x^\alpha u^k|^{q/2}|^2/h^{1+\delta_1/(2m)}dxdtdh\leqslant c_1''$$

с некоторым $\delta_1<1$. Отсюда и из оценки (27) следует, что при $k=1,\ldots,N$

$$\sum_{|\alpha|=m}(D_x^\alpha u^k)^{q/2}\in W_2^{1,\delta_1/2m}(Q')\subset W_2^{\delta_1,\delta_1/2m}(Q')$$

(определение пространства $W_2^{l,l/2m}(Q_T)$ с нецелым $l>0$ дано, например, в [6]). Поскольку $2\delta_1<n+2m$, то в силу теоремы 2.6 [6] при $k=1,\ldots$ $\ldots,N$ имеем $\sum_{|\alpha|=m}(D_x^\alpha u^k)^{q/2}\subset L_p(Q')$, где $p=2(n+2m)/(n+2m-2\delta_1)$. Отсюда следует, что оценка (26) справедлива при $s=p/2$.

1. *Данилюк Г. И., Скрыпник И. В.* О частичной регулярности обобщенных решений квазилинейных параболических систем // Докл. АН СССР.— 1980.— 250, № 4.— С. 790—793.
2. *Nirenberg L.* On elliptic partial differential equations // Ann. Scuola norm. super. Pisa. Sci. fis. e mat.— 1959.— Ser. 3.— 13.— P. 115—162.
3. *Стейн И.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций.— М. : Мир, 1968.— 427 с.
4. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.— М. : Наука, 1967.— 736 с.
5. *Вишик М. И.* О разрешимости краевых задач для квазилинейных параболических уравнений высших порядков // Мат. сб.— 1962.— 59.— С. 289—325.
6. *Солонников В. А.* Об оценках в L_p решений эллиптических и параболических систем // Тр. Мат. ин-та АН СССР.— 1967.— 102.— С. 137—160.

Ин-т прикл. математики и механики
АН УССР, Донецк

Получено 21.02.86