УДК 513.88

В. П. Фонф

Сопряженные подпространства и инъекции банаховых пространств

Линейная ограниченная инъекция (в дальнейшем просто инъекция) T банахова пространства Y в такое же X называется полупогружением [1], если образ $T(U(Y))$ единичного шара $U(Y)$ пространства Y замкнут в пространстве X. Инъекция $T: Y \to X$ называется G_δ-погружением [2], если образ $T(K)$ каждого замкнутого ограниченного подмножества $K \subset Y$ есть множество типа G_δ в X. Если пространство Y сепарабельно и T — полупогружение Y в X, то T — G_δ-погружение [2]. Однако, если пространство Y несепарабельно, то, как показывают простые примеры, последнее утверждение неверно.

В настоящей работе устанавливается связь между существованием в банаховом пространстве подпространств, изометричных (изоморфных) сопряженным, и возможностью неизоморфного полупогружения (G_δ-погружения) этого пространства. В качестве приложения получены некоторые обобщения на несепарабельный случай результатов работы [3]. Кроме того, результаты настоящей работы дополняют и уточняют некоторые результаты из [4].

Назовем инъекцию T банахова пространства Y в такое же X G_δ-инъекцией, если: 1) $T(U(Y))$ — множество типа G_δ в X, 2) линейное многообразие $T^*(X^*)$ — нормирующее для прсстранства Y.

Напомним, что линейное многообразие $E \subset Y^*$ называется λ-нормирующим для пространства Y, если $\inf\limits_{\substack{y \in Y \\ \|y\|=1}} \sup\limits_{f \in U(E)} |f(y)| \geqslant \lambda$.

Многообразие E называется нормирующим, если оно λ-нормирующее при некотором $\lambda > 0$. Если A и B — подмножества соответственно банахова пространства X и сопряженного к нему X^*, то через $[A]$ обозначим замкнутую линейную оболочку A, через $B_\perp$ — анулятор множества B в X, через $\|\cdot\|$—cl A (или просто cl A) — замыкание по норме множества A. Как обычно, если $f \in X^*$ и $A \subset X$, то $f|_A$ — сужение функционала f на подмножество A.

Используя результаты работ [2, 5], нетрудно показать, что любая G_δ-инъекция сепарабельного пространства есть G_δ-погружение. В случае несепарабельного пространства G_δ-инъекция является более общим понятием.

Лемма 1. *Пусть отображение T банахова пространства Y в банахово пространство X является либо полупогружением либо G_δ-погружением. Тогда T — G_δ-инъекция.*

Доказательство. В случае полупогружения утверждение леммы тривиально следует из того, что замкнутое подмножество банахова пространства является G_δ-множеством, и теоремы Хана — Банаха об отделении точки от замкнутого, выпуклого, ограниченного множества. Вслучае G_δ-погружения необходимо проверить, что линейное многообразие $T^*(X^*)$ — нормирующее. Последнее доказывается аналогично доказательству леммы 1 в [5, с. 187].

Через $U(E)$ ($S(E)$) будем обозначать единичный шар (единичную сферу) линейного нормированного пространства E. Все рассматриваемые пространства предполагаются вещественными и (если не оговорено противное) бесконечномерными.

Теорема 1. *Пусть банахово пространство Y таково, что существует G_δ-инъекция T пространства Y в некоторое банахово пространство X, не являющаяся изоморфным вложением. Тогда пространство Y содержит бесконечномерное подпространство Z, изоморфное сопряженному к некоторому банахову пространству с базисом.*

Доказательство. Пусть $T(U(Y)) = \bigcap\limits_{1}^{\infty} G_k$ (G_k — открытое подмножество пространства X, $k = 1, 2, \ldots$) и $T^*(X^*)$ — λ-нормирующее линейное многообразие, $\lambda > 0$. Без ограничения общности будем считать $\|T\| \leqslant 1$. Выберем элемент $y_1 \in S(Y)$ произвольно и положим $\delta_1 = \inf\{1, \|x - z\| : x \in T(U([y_1])),\ z \overline{\in} G_1\}$. Пользуясь λ-нормируемостью линейного многообразия $T^*(X^*)$, выберем элемент $f_{11} \in S(T^*(X^*))$ так, чтобы $f_{11}(y_1) \geqslant \lambda(1 - \delta_1/2^4)$. Воспользовавшись тем, что T не является изоморфным вложением, найдем элемент $y_2 \in S(Y) \cap [f_{11}]_\perp$ такой, что $\|Ty_2\| \leqslant \frac{\delta_1}{2^8}\lambda$ и положим $\delta_2 = \inf\{\delta_1, \|x - z\| : x \in T(U([y_1, y_2])),\ z \overline{\in} G_2\}$. В силу λ-нормируемости линейного многообразия $T^*(X^*)$ существует конечный набор линейных функционалов $\{f_{i2}\}_1^{m_2} \subset U(T^*(X^*))$ такой, что множество $\{f_{i2}|_{[y_1,y_2]}\}_1^{m_2}$ — $\frac{\lambda}{2^5}\delta_2$-сеть для множества $\lambda U([y_1, y_2]^*)$. Снова воспользовавшись тем, что инъекция T не является изоморфным вложением, выберем элемент $y_3 \in S(Y) \cap [f_{11}, \{f_{i2}\}_1^{m_2}]_\perp$ так, чтобы $\|Ty_3\| \leqslant \frac{\delta_2}{2^9}\lambda$ и т. д. Эти последовательности $\{y_i\}$ и $\{\delta_i\}$ обладают следующими свойствами.

a. $\|Ty_i\| \leqslant \frac{\delta_{i-1}}{2^{i+6}}\lambda$, $i = 1, 2, \ldots$, $\delta_1 < \delta_2 < \delta_3 < \ldots$.

b. Для любых натуральных чисел p и q и любого набора действительных чисел $\{a_i\}_1^{p+q}$:

$$\left\|\sum_1^p a_i y_i\right\| \leqslant \left(\lambda - \frac{\lambda\delta_p}{2^{p+3}}\right)^{-1} \left\|\sum_1^{p+q} a_i y_i\right\|. \qquad (1)$$

Действительно,

$$\left\|\sum_1^p a_i y_i\right\| = \frac{1}{\lambda}\max\left\{f\left(\sum_1^p a_i y_i\right) : f \in \lambda U([y_i]_1^{p^*})\right\} \leqslant \frac{1}{\lambda}\left(\max\left\{f_{pk}\left(\sum_1^p a_i y_i\right) : k = 1, \ldots, m_p\right\} + \frac{\lambda\delta_p}{2^{p+3}}\left\|\sum_1^p a_i y_i\right\|\right) = \frac{1}{\lambda}\left(\max\left\{f_{pk}\left(\sum_1^{p+q} a_i y_i\right) : k = 1, \ldots, m_p\right\} + \frac{\lambda\delta_p}{2^{p+3}}\left\|\sum_1^p a_i y_i\right\|\right) \leqslant \frac{1}{\lambda}\left\|\sum_1^{p+q} a_i y_i\right\| + \frac{\delta_p}{2^{p+3}}\left\|\sum_1^p a_i y_i\right\|,$$

откуда следует неравенство (1). Таким образом, $\{y_i\}$ — базисная последовательность с базисной константой, не превышающей $2/\lambda$.

c. Для каждого натурального числа p: $\sum_{p+1}^\infty \|Ty_i\| \leqslant \frac{\lambda\delta_p}{64}$ (следствие a), откуда, в частности, получаем (с использованием b), что для всех $y = \Sigma a_i y_i \in U([y_i]_1^\infty)$: $\left\|\sum_{p+1}^\infty a_i T y_i\right\| \leqslant \frac{\delta_p}{16}$.

d. Множество $T(U([y_i]_1^\infty))$ относительно компактно по норме пространства X следует из свойств b и c).

Положим $Y_1 = [y_i]_1^\infty$ и покажем, что

$$\operatorname{cl} T(\lambda U(Y_1)) \subset T(U(Y)). \qquad (2)$$

Пусть $z = \lim_k T(\Sigma a_i^k y_i)$, $\Sigma a_i^k y_i \in \lambda U(Y_1)$, $k = 1, 2 \ldots$. Не нарушая общности можно считать, что для всех $i = 1, 2, \ldots \lim_k a_i^k = a_i$ и, следовательно, $z = \Sigma a_i T y_i$. Нетрудно видеть, что $|a_i| \leqslant 4$, $i = 1, 2, \ldots$. Необходимо показать, что $z \in T(U(Y))$, т. е. для всех $p = 1, 2, \ldots z \in G_p$. Зафиксируем p и выберем k настолько большим, чтобы $\sum_1^p |a_i^k - a_i| < \delta_p/4$. Положим $u_p^k = \sum_1^p a_i^k y_i$. Из $\sum_1^\infty a_i^k y_i \in \lambda U(Y_1)$ и свойства b легко получим $\|u_p^k\| \leqslant \frac{2^{p+3}}{2^{p+3} - \delta_p}$, $p, k = 1, 2 \ldots$. Учитывая, что $\|T\| \leqslant 1$, и пользуясь свойством c, имеем

$$\left\|\frac{2^{p+3} - \delta_p}{2^{p+3}} T u_p^k - z\right\| = \left\|\sum_1^p (a_i^k - a_i) T y_i - \frac{\delta_p}{2^{p+3}} T u_p^k - \sum_{p+1}^\infty a_i T y_i\right\| \leqslant \frac{\delta_p}{4} + \frac{\delta_p}{4} + \frac{\lambda\delta_p}{16} < \delta_p,$$

откуда, заметив, что $\frac{2^{p+3}-\delta_p}{2^{p+3}} u_p^k \in U([y_i]_1^p)$ и $\delta_p = \inf\{\delta_{p-1}, \|x - z_1\| : x \in T(U([y_i]_1^p), z_1 \bar{\in} G_p\}$, получаем $z \in G_p$, $p = 1, 2, \ldots$. Последнее включение в силу равенства $T(U(Y)) = \bigcap G_p$ влечет $z \in T(U(Y))$, что и доказывает (2).

Положим $g_{ik} = f_{ik}|_{Y_1}$, $k = 1, 2, \ldots$, $i = 1, \ldots, m_k$, $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{g_{ik}\}_{i=1}^{m_k}$, $E = [A]$ и пусть $\{y_i^*\}$ — сопряженная система в Y_1^* к базису $\{y_i\}$. Покажем, что

$$\|\cdot\| - \mathrm{cl}\, A \supset \lambda U([y_i^*]_1^\infty). \tag{3}$$

Пусть $\varepsilon > 0$, $y^* = \Sigma b_j y_j^* \in \lambda U([y_i^*]_1^\infty)$ и номер l таков, что $\delta_l/2^{l+2} < \varepsilon/2$, $\left\|\sum_{l+1}^{\infty} b_j y_j^*\right\| \leqslant \varepsilon\lambda/8$. Из построения системы $\{f_{ik}\}$ следует, что существует функционал f_{il} такой, что $\|f_{il}|_{[y_i]_1^l} - y^*|_{[y_i]_1^l}\| \leqslant \lambda\delta_l/2^{l+3}$. Отсюда, пользуясь (1), для каждого $y = \Sigma a_i y_i \in U(Y_1)$ получаем

$$|(g_{il} - y^*)(y)| \leqslant \left|(g_{il} - y^*)\left(\sum_{1}^{l} a_i y_i\right)\right| + \left|(g_{il} - y^*)\left(\sum_{l+1}^{\infty} a_i y_i\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\lambda\delta_l}{2^{l+3}} \frac{2^{l+3}}{(2^{l+3} - \delta_l)\lambda} + \left|\left(\sum_{l+1}^{\infty} b_j y_j^*\right)\left(\sum_{l+1}^{\infty} a_i y_i\right)\right| \leqslant \frac{\delta_l}{2^{l+2}} + \frac{\varepsilon\lambda}{8}\frac{4}{\lambda} < \varepsilon,$$

что и завершает доказательство (3).

Положим $V = \mathrm{cl}\, T(U(Y_1))$ и $W = T^{-1}(V)$. Очевидно, W — замкнутое, абсолютно выпуклое и в силу (2) ограниченное подмножество пространства Y. Из (2) и свойства d также следует, что V — компактное по норме множество. Пусть $z \neq 0$ — произвольная точка алгебраической границы W (т. е. $z \in W$, но для каждого $a > 0$ $(1 + a) z \bar{\in} W$).

Покажем, что $\|z\| \geqslant \lambda$. Из того, что точка z принадлежит алгебраической границе множества W, легко следует, что точка $u = Tz$ принадлежит алгебраической границе множества V, откуда с помощью теоремы Хана — Банаха немедленно получаем, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует функционал $h = h_\varepsilon \in X^*$ такой, что $h(u) > 1 - \varepsilon$ и $\sup h(V) \leqslant 1$. Далее, нетрудно установить, что для каждого $x \in V$ имеет место представление $x = \Sigma a_i T y_i$, $\sup_i |a_i| \leqslant 2/\lambda$. Воспользовавшись свойством а, найдем номер $N = N(\varepsilon)$ такой, что $\frac{2}{\lambda}\|h\| \sum_{N+1}^{\infty} \|Ty_i\| \leqslant \varepsilon$. Отсюда нетрудно получить, что для каждого $x = \Sigma a_i T y_i \in V$

$$\left|\sum_{1}^{N} a_i h(Ty_i)\right| < 1 + \varepsilon \tag{4}$$

и, если $u = \Sigma b_i T y_i$, то

$$\sum_{1}^{N} b_i h(Ty_i) > 1 - 2\varepsilon. \tag{5}$$

Далее пользуясь способом построения систем $\{y_i\}$ и $\{g_{ij}\}$, можно показать, что каждый функционал y_j^* имеет представление $y_j^* = \sum_{i=1}^{m_j} p_i^j g_{ij}$, $j = 1, 2, \ldots$.

Пусть теперь функционал $h_{ij} \in X^*$ такой, что $T^* h_{ij} = f_{ij}$, $i = 1, \ldots, m_j$; $j = 1, 2, \ldots$. Положим $t_j = \sum_{i=1}^{m_j} p_i^j h_{ij}$, $j = 1, 2, \ldots$, и $l = \sum_{j=1}^{N} h(Ty_j) t_j$. Из (4) и (5) получаем

$$\sup l(V) \leqslant 1 + \varepsilon, \tag{6}$$

$$l(u) > 1 - 2\varepsilon. \tag{7}$$

Из того, что $V \supset T(U(Y_1))$ и (6), заключаем $\|T^*l|_{Y_1}\| \leqslant 1+\varepsilon$. Кроме того, очевидно, $T^*l|_{Y_1} = \sum\limits_1^N h(Ty_i)\, y_i^* \in [y_i^*]_1^\infty$. Значит, по (3) существует функционал $g_{nm} \in A$ такой, что

$$\left\| \frac{\lambda}{1+\varepsilon} T^*l|_{Y_1} - g_{nm} \right\| < \varepsilon. \tag{8}$$

Так как $u \in \mathrm{cl}\, T(U(Y_1))$, то существует последовательность $\{u_n\} \subset U(Y_1)$ такая, что $u = \lim Tu_n$. Имеем

$$\frac{(1+\varepsilon)}{\lambda} h_{nm}(u) = \frac{1+\varepsilon}{\lambda} h_{nm}(\lim_k Tu_k) = \frac{1+\varepsilon}{\lambda} \lim_k h_{nm}(Tu_k) =$$

$$= \frac{1+\varepsilon}{\lambda} \lim_k (T^*h_{nm})(u_k) = \frac{1+\varepsilon}{\lambda} \lim_k g_{nm}(u_k).$$

Далее, воспользовавшись (8), легко получить

$$\frac{1+\varepsilon}{\lambda} h_{nm}(u) \geqslant \lim_k (T^*l)(u_k) - \frac{1+\varepsilon}{\lambda}\varepsilon = l(\lim_k Tu_k) -$$

$$- \frac{1+\varepsilon}{\lambda}\varepsilon = l(u) - \frac{1+\varepsilon}{\lambda}\varepsilon.$$

Таким образом, из (7) имеем

$$(T^*h_{nm})(z) \geqslant \frac{\lambda}{1+\varepsilon}\left(1 - 2\varepsilon - \frac{1+\varepsilon}{\lambda}\varepsilon\right), \tag{9}$$

откуда, учитывая $\|T^*h_{nm}\| \leqslant 1$ и произвольность $\varepsilon > 0$ в (9), получаем $\|z\| \geqslant \lambda$. Из (2) видно, что $\|z\| \leqslant 1/\lambda$. Обозначим через Z линейное многообразие, порожденное множеством W. Из того что для любого элемента z алгебраической границы W $\lambda \leqslant \|z\| \leqslant 1/\lambda$, легко следует, что Z — подпространство (т. е. замкнутое линейное многообразие) Y, причем, если ввести на Z норму с единичным шаром W, то оно станет изометрично сопряженному пространству. Последнее легко следует из компактности множества $T(W)$. Наконец, можно проверить, что пространство Z в этой эквивалентной норме (с единичным шаром W) сопряжено к пространству $[y_i^*]_1^\infty$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Из доказательства теоремы 1 очевидно, что если $T^*(X^*)$ — 1 — нормирующее многообразие (так будет, например, когда T — полупогружение), то построенное подпространство Z изометрично сопряженному пространству, причем $T|_Z$ — компактное полупогружение.

Следующая теорема характеризует класс банаховых пространств, допускающих нетривиальное (т. е. не являющееся изоморфизмом) полупогружение.

Т е о р е м а 2. *Для произвольного банахового пространства Y следующие утверждения эквивалентны:*

1) *в некоторой эквивалентной норме на Y существует нетривиальное полупогружение пространства Y;*

2) *в некоторой эквивалентной норме на Y существует нетривиальная G_δ-инъекция пространства Y;*

3) *в пространстве Y существует бесконечномерное подпространство Z, изоморфное сопряженному к пространству с базисом.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Импликация 1) $\Rightarrow$ 2) следует из леммы, 2) $\Rightarrow$ 3) — из теоремы 1, 3) $\Rightarrow$ 1) доказывается аналогично доказательству теоремы 2 в работе [6].

Т е о р е м а 3. *Пусть E — сепарабельное банахово пространство и Y — бесконечномерное подпространство E^*, причем $U(Y)$ — множество типа G_δ в единичном шаре $U(E^*)$, снабженном w^*-топологией. Тогда подпространство Y содержит бесконечномерное подпространство Y_1, единичный шар которого w^*-компакт. В частности, пространство Y_1 изометрично сопряженному.*

Доказательство. Пусть $\{x_i\}$ — плотное подмножество в $S(E)$. Введем на пространстве E^* новую (более слабую, чем исходная) норму $|||f||| = \sum_{1}^{\infty} 2^{-k} |f(x_k)|$, $f \in E^*$, и обозначим пополнение пространства E^* в норме $|||\cdot|||$ через X, а естественное вложение пространства E^* в X — через T. Нетрудно проверить, что $T|_Y$ — G_δ-инъекция, причем линейное многообразие $(T|_Y)^*(X^*)$ (и даже $T^*(X^*)$) — 1-нормирующее. Для завершения доказательства достаточно воспользоваться замечанием к теореме 1.

Следующее предложение легко следует из известной характеризации Розенталя пространств, не содержащих l_1 (см., например, [7]).

Предложение. *Пусть E — сепарабельное банахово пространство, не содержащее подпространств, изоморфных l_1 и $F \in E^{**}$. Тогда множество U (Ker F) имеет тип G_δ в множестве $U(E^*)$, снабженном w^*-топологией.*

Следствие 1. *Пусть E — сепарабельное банахово пространство, не содержащее l_1 и Y — бесконечномерное подпространство E^* такое, что фактор-пространство E^*/Y инъективно вкладывается в сепарабельное пространство. Тогда пространство Y содержит бесконечномерное подпространство Y_1 такое, что единичный шар $U(Y_1)$ — w^*-компакт.*

Доказательство. Доказательство следует из предложения и теоремы 2.

Следствие 2. *Пусть E — бесконечномерное сепарабельное банахово пространство и Y — бесконечномерное подпространство E^* счетной коразмерности. Тогда пространство Y содержит бесконечномерное подпространство, изоморфное сопряженному к сепарабельному пространству. Если подпространство Y имеет конечную коразмерность, то в Y существует бесконечномерное подпространство, единичный шар которого w^*-компакт.*

Доказательство. Если пространство E не содержит l_1, то достаточно применить следствие 2. Если же E содержит l_1, то [7] пространство E^* содержит подпространства, изоморфные $l_1(\Gamma)$ (Γ — некоторое несчетное множество) и $L_1[0, 1]$. В свою очередь, $L_1[0, 1]$ содержит l_2. Далее доказательство стандартно.

Следствие 3. *Пусть E — бесконечномерное сепарабельное банахово пространство и пространство E^* распадается в прямую сумму двух своих подпространств. Тогда одно из них содержит бесконечномерное подпространство, изометричное сопряженному.*

Доказательство. Пусть $E^* = Y + Z$. Отсюда, пользуясь сепарабельностью E, нетрудно построить две последовательности функционалов $\{F_n\}$ и $\{G_n\}$ из E^{**} такие, что $Y = [\{F_n\}]_\perp$ и $Z = [\{G_n\}]_\perp$. Далее, если E не содержит l_1, то, применив предложение и теорему 3, получим, что оба пространства Y и Z содержат подпространства, изометричные сопряженным. Если же E содержит l_1, то [7] E^* содержит подпространство, изоморфное l_2, и стандартные рассуждения показывают, что либо Y либо Z содержит подпространство, изоморфное l_2. Следствие доказано.

1. *Lotz H. P., Peck N. T., Porta H.* Semi-embeddings of Banach spaces // Proc. Edinburgh Mat. Soc.— 1979.— **22**.— P. 233—240.
2. *Bourgain J., Rosenthal H. P.* Applications of the theory of semi-embeddings to Banach space theory // J. Funct. Anal.— 1983.— **52**.— P. 149—188.
3. *Johnson W. B., Rosenthal H. P.* On w^*-basic sequences and their applications to the study of Banach spaces // Stud. math.— 1972.—**43**.— P. 77—92.
4. *Пличко А. Н.* Выбор в банаховом пространстве подпространств со специальными свойствами и некоторые свойства квазидополнений // Функцион. анализ.— 1981.— **15**, вып. 1.— С. 82—83.
5. *Петунин Ю. И., Пличко А. Н.* Теория характеристик подпространств и ее приложения.— Киев : Вища шк., 1980.— 216 с.
6. *Drewnowski L.* Semi-embeddings of Banach spaces which hereditarily c_0 // Proc. Edinburgh Mat. Soc.— 1983.— **26**.— P. 163—167.
7. *Rosenthal H. P.* Some recent discoveries in the isomorphic theory of Banach spaces // Bull. Amer. Math. Soc.— 1978.— **84**, N 3.— P. 803—831.

Бердян. пед. ин-т

Получено 14.05.85,
после доработки — 03.10.85