УДК 517.95

Г. Д. Завалыкут, О. Д. Нуржанов

О периодической краевой задаче для одного класса дифференциально-операторных уравнений

В работах [1—3] численно-аналитическим методом А. М. Самойленко [4] изучены периодические краевые задачи для автономных систем дифференциальных уравнений.

В данной работе рассматривается вопрос применимости этого метода к исследованию периодической краевой задачи для дифференциально-операторного уравнения с правой частью, явно не зависящей от времени

$$dx/dt = f(x, Ax), \tag{1}$$

$$x(0) = x(T), \tag{2}$$

где A — оператор, заданный на пространстве непрерывных функций

Аналогичный вопрос для неавтономного дифференциально-операторного уравнения, а именно для уравнения вида (1) с правой частью $f(t, x, Ax)$, явно зависящей от времени t и периодической по t с периодом T, рассмотрен в [5]. Там же обоснован алгоритм отыскания периодических решений таких уравнений и даны теоремы существования их периодических решений.

Краевая задача (1), (2), поскольку правая часть ее уравнения не содержит явно времени t, может иметь периодическое решение с некоторым периодом, заранее не известным. С другой стороны, если $x(t)$ — периодическое решение уравнения (1), а h — постоянная величина, то функция $x(t+h)$ также будет периодическим решением этого уравнения. В силу этих особенностей периодическая краевая задача (1), (2) требует отдельного изучения.

Пусть в уравнении (1) $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — n-мерный вектор, $f(x, u) = (f_1(x, u), f_2(x, u), \ldots, f_n(x, u))$ — n-мерная вектор-функция, $Ax = u = (u_1, u_2, \ldots u_p)$ — конечномерный ($p < \infty$) или бесконечномерный ($p = \infty$) вектор. Предположим, что вектор-функция $f(x, u)$ определена, непрерывна для $(x, u) \in \Delta \times \Delta_1$ и удовлетворяет условиям Липшица по x и u в области $\Delta \times \Delta_1$, где Δ — ограниченная, замкнутая область n-мерного евклидова пространства E^n; Δ_1 — область конечномерного или бесконечномерного пространства.

Относительно оператора $A = (A_1, A_2, \ldots, A_j, \ldots, A_p)$ будем предполагать, что его координата A_j, $j = \overline{1, p}$, определена на классе непрерывных на $[a_j, b_j]$ функций и переводит его в класс непрерывных на $[c_j, d_j]$ функций, сохраняя при этом автономность уравнения (1). Будем также предполагать, что оператор A таков, что $Ax(t) \in \Delta_1$ для каждой непрерывной периодической функции $x(t) \in \Delta$ и

$$|Ax_1(t) - Ax_2(t)|_0 \leqslant K |x_1(t) - x_2(t)|_0 \tag{3}$$

для любой пары $x_1(t)$, $x_2(t)$ таких функций, где $K = \{K_{ij}\}$ — $(p \times n)$-мерная постоянная матрица с неотрицательными элементами $K_{ij} \geqslant 0$, $i = \overline{1, p}$, $j = \overline{1, n}$, $|x(t)|_0 = \max_{t \in [0,T]} |x(t)|$, $|x| = (|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|)$.

Заменой $t\omega = \theta$, $\omega = 2\pi/T$, краевую задачу (1), (2) приводим к задаче с фиксированным периодом

$$dx/d\theta = \mu f(x, Ax), \ \mu = 1/\omega, \ x \in \Delta, \ u \in \Delta_1, \tag{4}$$

$$x(0) = x(2\pi). \tag{5}$$

Предположим, что задача (4), (5) имеет нетривиальное решение при $\mu = \mu_0 > 0$ и этим решением является функция $x = x^0(\theta)$.

Поскольку уравнение (4) автономное, в силу периодичности и непрерывности решения выбором параметра h всегда можно добиться того, что фиксированная $i = j$ координата x_i^0 решения $x^0(\theta + h) = (x_1^0(\theta + h), \ldots$ $\ldots, x_n^0(\theta + h))$ принимает свое экстремальное значение в точке $\theta = 0$ [1]. Это означает, что краевая задача (4), (5) может иметь решение лишь при дополнительном условии, что в точке $\theta = 0$ значение $x^0(0) = x_0$ решения этой задачи находится на поверхности

$$f_j(x, Ax) = 0. \tag{6}$$

Пусть уравнение (6) для $x \in \Delta$ имеет решение, задаваемое параметрически

$$x = x_0(c), \tag{7}$$

где $c = (c_1, c_2, \ldots, c_{n-1})$ — параметр, изменяющийся в некоторой области $G_1 \subset E^{n-1}$.

Для дальнейшего исследования краевой задачи (4), (5) используем идею работы [1]. Выберем замену переменных

$$x = \Phi(\theta, y), \tag{8}$$

где $\Phi(\theta, y) = (\Phi_1(\theta, y), \Phi_2(\theta, y), \ldots, \Phi_n(\theta, y))$ — n-мерная вектор-функция, определенная в области $(\theta, y) \in [0, 2\pi] \times D$, непрерывно дифференцируемая по θ, y, периодическая по θ с периодом $T = 2\pi$, принимающая значения в области Δ и удовлетворяющая условию

$$\det[\partial\Phi(\theta, y)/\partial y] \neq 0, \ (\theta, y) \in [0, 2\pi] \times D. \tag{9}$$

Используя замену (8), периодическую краевую задачу (4), (5) можно свести к задаче о 2π-периодических решениях дифференциально-операторного уравнения с правой частью, явно зависящей от θ:

$$dy/d\theta = F(\theta, y, Ay, \mu), \tag{10}$$

где

$$F(\theta, y, Ay, \mu) = [\partial\Phi(\theta, y)/\partial y]^{-1}[\mu f(\Phi(\theta, y), A\Phi(\theta, y)) - \partial\Phi(\theta, y)/\partial\theta].$$

Отметим, что при преобразовании (8) начальные значения (7), при которых лишь возможно решение задачи (4), (5), переходят в начальные значения $y = y_0(c)$ периодического решения уравнения (10), где $y_0(c)$ определяется по $x_0(c)$ как решение $y = y_0(c)$ уравнения замены

$$x_0(c) = \Phi(\theta, y), \ c \in G_1. \tag{11}$$

В силу непрерывности преобразования (8) области Δ и Δ_1 переменных x и u обращаются в области D и D_1 переменных y и v, причем D является также замкнутой и ограниченной областью пространства E^n, а D_1 — область конечномерного или бесконечномерного пространства.

Поскольку по предположению функция $f(x, u)$ ограничена, непрерывна и удовлетворяет условию Липшица, то функция $F(\theta, y, v, \mu)$ также будет удовлетворять этим условиям и, следовательно, выполняются неравенства

$$|F(\theta, y, v, \mu)| \leqslant M, \tag{12}$$

$$|F(\theta, y_1, v_1, \mu) - F(\theta, y_2, v_2, \mu)| \leqslant K_1|y_1 - y_2| + K_2|v_1 - v_2| \tag{13}$$

$\forall (\theta, y, v, \mu) \in I \times D \times D_1 \times I_\mu$, любых $y_1, y_2 \in D$ и $v_1, v_2 \in D_1$. Здесь $|F| = (|F_1|, |F_2|, \ldots, |F_n|)$, $|y| = (|y_1|, |y_2|, \ldots, |y_n|)$, $|v| = (|v_1|, |v_2|, \ldots, |v_p|)$, $M = (M_1, M_2, \ldots, M_n)$, $M_j \geqslant 0$, $j = \overline{1, n}$, $K_1 = \{K'_{ij}\}$ — $(n \times n)$-мерная матрица с неотрицательными элементами, $K'_{ij} \geqslant 0$, $i, j = \overline{1, n}$; $K_2 = \{K''_{ij}\}$ — $(n \times p)$-мерная матрица с неотрицательными элементами $K''_{ij} \geqslant 0$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, p}$.

Так как по предположению оператор A таков, что $Ax(t) \in \Delta_1$ для каждой непрерывной периодической функции $x(t) \in \Delta$ и удовлетворяет неравенству (3), то для каждой такой функции $y(\theta) \in D$ имеет место включение $Ay(\theta) \in D_1$ и

$$|Ay_1(\theta) - Ay_2(\theta)|_0 \leqslant K_3 |y_1(\theta) - y_2(\theta)|_0 \tag{14}$$

для любых периодических функций $y_1(\theta), y_2(\theta) \in D$, где $K_3 = \{K'''_{ij}\}$ — $(p \times n)$-мерная матрица с неотрицательными элементами $K'''_{ij} \geqslant 0$, $i = \overline{1, p}$, $j = \overline{1, n}$.

Обозначим через D_F множество точек $y_0 \in E^n$, содержащееся в области D вместе со своей πM-окрестностью.

Пусть выполнены следующие условия:

а) множество D_F не пусто:

$$D_F \neq \varnothing; \tag{15}$$

б) все собственные числа матрицы $Q = \pi(K_1 + K_2 K_3)$ лежат в круге единичного радиуса, т. е.

$$|\lambda_j(Q)| < 1, \; j = 1, 2, \ldots, n. \tag{16}$$

Вектор-функция $F(\theta, y, v, \mu)$ явно зависит от θ и периодична по θ с периодом 2π. Поэтому, если существует преобразование (8) такое, что преобразованное уравнение (10) удовлетворяет условиям (12)—(16) для значений μ из некоторого отрезка $I_\mu = [\mu_1, \mu_2]$, $\mu_2 > \mu_1 > 0$ и значений $y \in D$, $v \in D_1$, то применима численно-аналитическая схема [4, 5] для исследования периодических по θ периода 2π решений дифференциально-операторного уравнения (10), и в этом случае алгоритм построения периодического решения описывает теорема 1 [5]. Согласно этой теореме последовательность периодических по θ с периодом 2π функций

$$y_{m+1}(\theta, c, \mu) = y_0(c) + \int_0^\theta \{F(\tau, y_m(\tau, c, \mu), Ay_m(\tau, c, \mu), \mu) - \Delta_m(c, \mu)\}\, d\tau, \tag{17}$$

$$\Delta_m(c, \mu) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(s, y_m(s, c, \mu), Ay_m(s, c, \mu), \mu)\, ds \tag{18}$$

при $m \to \infty$ сходится равномерно относительно

$$(\theta, y_0(c), \mu) \subset I \times D_F \times I_\mu, \; I = (-\infty, \infty), \; I_\mu = [\mu_1, \mu_2] \tag{19}$$

к функции $y^0(\theta, c, \mu)$, определенной в области (19), периодической по θ с периодом 2π и удовлетворяющей уравнению

$$y(\theta, c, \mu) = y_0(c) + \int_0^\theta [F(\tau, y(\tau, c, \mu), Ay(\tau, c, \mu), \mu) - \Delta(c, \mu)]\, d\tau, \tag{20}$$

$$\Delta(c, \mu) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(s, y(s, c, \mu), Ay(s, c, \mu), \mu)\, ds. \tag{21}$$

Здесь $y_0(\theta, c, \mu) = y_0(c)$ является решением уравнения (11) для $c \in G'_1 \subset G_1$, где G'_1 — такая подобласть G_1, что $y_0(c) \in D_F$ при $c \in G'_1$.

Из теоремы 1 [5] следует, что решение $y = y^0(\theta)$ уравнения, получаемого из (10) при $\mu = \mu_0$, которое при $\theta = 0$ проходит через точку $y =$

$= y^0(0, c_0, \mu_0) = y_0(c_0)$, будет периодическим с периодом 2π тогда и только тогда, когда вектор-функция (21) обращается в нуль:

$$\Delta(c_0, \mu_0) = 0, \tag{22}$$

причем справедливо равенство

$$y^0(\theta) = y^0(\theta, c_0, \mu_0) = \lim_{m\to\infty} y_m(\theta, c_0, \mu_0), \tag{23}$$

где $y_m(\theta, c_0, \mu_0)$ — функции последовательности (17). Более того, для разности $|y^0(\theta, c, \mu) - y_m(\theta, c, \mu)|$ справедлива оценка

$$|y^0(\theta, c, \mu) - y_m(\theta, c, \mu)| \leqslant \pi Q^m (E - Q)^{-1} M. \tag{24}$$

Следовательно, с учетом замены (8) предельная функция $y^0(\theta, c_0, \mu_0)$ и значения (c_0, μ_0) определяют решение

$$x = x^0(t) = \Phi(t/\mu_0, y^0(t/\mu_0, c_0, \mu_0)) \tag{25}$$

и период

$$T = T_0 = 2\pi\mu_0 \tag{26}$$

исходной краевой задачи (1), (2).

Таким образом, решение краевой задачи (1), (2) сведено к нахождению значений c_0, μ_0, которые удовлетворяют уравнению (22), т. е. являются нулями определяющих функций $\Delta(c, \mu)$. Поскольку известно лишь приближенное значение $y_m(\theta, c, \mu)$ решения $y^0(\theta, c, \mu)$, то практически удобной задачей является установление нулей $\Delta(c, \mu)$ по нулям приближенных определяющих функций $\Delta_m(c, \mu)$, задаваемых согласно (18).

Определяющие функции $\Delta(c, \mu)$ и $\Delta_m(c, \mu)$ определены и непрерывны по $c, \mu \in G_1 \times [\mu_1, \mu_2]$. Используя неравенства (13), (14) и (24), для их разности можно получить оценку

$$|\Delta(c, \mu) - \Delta_m(c, \mu)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |F(s, y(s, c, \mu), Ay(s, c, \mu), \mu) -$$

$$- F(s, y_m(s, c, \mu), Ay_m(s, c, \mu), \mu)|\, ds \leqslant Q^{m+1}(E - Q)^{-1} M. \tag{27}$$

Сформулируем теперь утверждение, которое дает условие разрешимости периодической краевой задачи (1), (2).

Теорема. *Пусть дифференциально-операторное уравнение* (1) *и замена переменных* (8) *таковы, что правая часть уравнения* (10) *определена и непрерывна по совокупности переменных* θ, y, v *в области* $I \times D \times D_1$, *периодична по* θ *с периодом* 2π *и удовлетворяет условиям* (12)—(16). *Кроме того, предположим, что для некоторого целого* $m \geqslant 0$ *приближенная определяющая функция* $\Delta_m(c, \mu)$, *задаваемая согласно* (18) *в области* $(c, \mu) \in G_1' \times I_\mu$, *имеет изолированный нуль* $(c, \mu) = (c_{0m}, \mu_{0m})$ *ненулевого индекса* $\Delta_m(c_{0m}, \mu_{0m}) = 0$, $\operatorname{ind}\Delta_m(c_{0m}, \mu_{0m}) \neq 0$ *и для некоторой замкнутой выпуклой области* $G_2 \times I_2 \subset G_1' \times I_\mu$ *с границей* Γ_{D_2}, *в которой* (c_{0m}, μ_{0m}) — *единственный нуль отображения* $\Delta_m(c, \mu)$ *выполняется неравенство*

$$\inf_{(c,\mu)\in\Gamma_{D_2}} |\Delta_m(c, \mu)| > Q^{m+1}(E - Q)^{-1} M. \tag{28}$$

Тогда периодическая краевая задача (1), (2) *имеет решение* $x = x^0(t)$ *такое, что* $T = 2\pi\mu_0$, $\mu_0 \in I_2$, $x^0(0) = x_0(c_0)$, $c_0 \in G_2$. *При этом за приближенное решение можно принять функцию*

$$\bar{x}_m(t) = \Phi(t/\mu_{0m}, y_m(t/\mu_{0m}, c_{0m}, \mu_{0m})), \tag{29}$$

где $y_m\left(\frac{t}{\mu_{0m}}, c_{0m}, \mu_{0m}\right)$ *вычисляется согласно* (17), *а для ее погрешности справедлива оценка*

$$|x^0(t) - \bar{x}_m(t)| \leqslant \pi K_4 Q^m (E - Q)^{-1} M + K_5 |W_0 - W_{0m}|. \tag{30}$$

Здесь $W_0 = \mathrm{col}\,(c_0, \mu_0)$, K_4, K_5 — *некоторые постоянные* $(n \times n)$-*мерные матрицы, определяемые матрицами Липшица функций* $\Phi(\theta, y)$ *и* $F(\theta, y, v, \mu)$.

Доказательство теоремы сводится к установлению существования нулей отображения $\Delta(c, \mu)$, что основано на оценках (27), (28) и проводится аналогично доказательству теоремы 7.1 [4].

В заключение отметим, что частными реализациями оператора A в уравнении (1), для которых изложена численно-аналитическая схема, являются уравнение с отклоняющимся аргументом [6], интегро-дифференциальные уравнения типа Вольтерра [7, 8]. Некоторые другие реализации приведены в работе [5]. Заметим также, что в работах [6—8] использованы частные случаи общей замены (8).

1. *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Периодическая краевая задача для автономных систем // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1984.— № 9.— С. 20—23.
2. *Самойленко А. М., Ле Лыонг Тай.* Численно-аналитический метод для автономных систем с малым возмущением // Укр. мат. журн.— 1979.— 31, № 3.— С. 214—220.
3. *Ле Лыонг Тай.* Численно-аналитический метод исследования автономных систем дифференциальных уравнений // Там же.— 1978.— 30, № 3.— С. 309—317.
4. *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Численно-аналитические методы исследования периодических решений.— Киев : Вища шк., 1976.— 180 с.
5. *Завалыкут Г. Д.* Численно-аналитический метод исследования периодических решений одного класса дифференциально-операторных уравнений // Диф. уравнения.— 1983.— 19, № 4.— С. 569—675.
6. *Козубовская И. Г., Мартынюк Д. И.* К вопросу о периодических решениях квазилинейных автономных систем с запаздыванием // Укр. мат. журн.— 1968.— 20, № 2.— С. 263—265.
7. *Нуржанов О. Д., Алымбаев А. Т.* Численно-аналитический метод исследования автономных систем интегро-дифференциальных уравнений // Там же.— 1981.— 33, № 4.— С. 540—547.
8. *Алымбаев А. Т.* О нахождении периодических решений автономных систем интегро-дифференциальных уравнений // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям.— 1983.— Вып. 16.— С. 226—233.

Киев. политехн. ин-т

Получено 03.06.85