УДК 511.6+517.56

А. В. Крытов

О росте целых кривых нижнего порядка меньше единицы

Пусть $\vec{G}(z) = \{g_n(z)\}_{n=1}^{p}$ — p-мерная ($p \geqslant 2$) целая кривая и вектор $\vec{a} \in C^p$. Всюду далее будем пользоваться обозначениями теории роста и распределения значений целых кривых [1 — 4]. В частности, $\delta(\vec{a}, \vec{G})$ — дефект в смысле Р. Неванлинны целой кривой $\vec{G}(z)$ относительно вектора $\vec{a}$, $\Delta(\vec{a}, \vec{G})$ — дефект в смысле Ж. Валирона, $\beta(\vec{a}, \vec{G})$ — величина отклонения в смысле В. П. Петренко,

$$K(\vec{G}) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\sum_{n=1}^{p} N(r, 0, g_n)}{T(r, \vec{G})}.$$

В работе [5] определена величина $\alpha(\vec{a}, \vec{G}) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\mu(r, \vec{a}, \vec{G})}{T(r, \vec{G})}$, где $\mu(r, \vec{a}, \vec{G}) = \min_{|z|=r} \ln \frac{\|\vec{G}(z)\| \cdot \|\vec{a}\|}{|(\vec{G}(z) \cdot \vec{a})|}$. В этой же работе установлена оценка снизу для величины $\alpha(\vec{a}, \vec{G})$.

В настоящей работе получена новая* для целых кривых оценка $\alpha(\vec{a}, \vec{G})$, связывающая величины $\alpha(\vec{a}, \vec{G})$; $\beta(\vec{a}, \vec{G})$, $\delta(\vec{a}, \vec{G})$ и $K(\vec{G})$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $\vec{G}(z)$ — p-мерная целая кривая нижнего порядка $\lambda < 1$, $\vec{a}$ — произвольный ненулевой вектор из пространства C^p. Тогда*

$$\beta(\vec{a}, \vec{G}) \leqslant \alpha(\vec{a}, \vec{G}) + \pi\lambda \operatorname{tg} \frac{\pi\lambda}{2} \{1 - \delta(\vec{a}, \vec{G}) + K(\vec{G})\}.$$

Следствие 1. *Для произвольной p-мерной целой кривой $\vec{G}(z)$ нулевого нижнего порядка и любого ненулевого вектора $\vec{a} \in C^p$ справедливы соотношения*

$$\delta(\vec{a}, \vec{G}) \leqslant \beta(\vec{a}, \vec{G}) \leqslant \alpha(\vec{a}, \vec{G}) \leqslant \Delta(\vec{a}, \vec{G}).$$

Это утверждение уточняет теорему 2 работы [6] для целых кривых в случае $\lambda = 0$. Результат, аналогичный следствию 1, известен для мероморфных функций нулевого порядка [7].

Следствие 2. *Если для p-мерной целой кривой $\vec{G}(z)$ нижнего порядка $\lambda < 1$ можно указать вектор $\vec{a} \in C^p$ такой, что*

$$\beta(\vec{a}, \vec{G}) > \pi\lambda \operatorname{tg} \frac{\pi\lambda}{2} \{1 - \delta(\vec{a}, \vec{G}) + K(\vec{G})\},$$

то существует последовательность окружностей $\{|z| = r_k\}$, $r_k \to \infty$, на которой

$$\frac{\|\vec{G}(z)\| \cdot \|\vec{a}\|}{|(\vec{G}(z) \cdot \vec{a})|} \to \infty \tag{1}$$

равномерно относительно $\arg z$.

Ранее [5, с. 275] было известно условие, которое нужно наложить на $\delta(\vec{a}, \vec{G})$, чтобы выполнялось соотношение (1).

Доказательство теоремы 1. Предположим, что $\theta_1 = \theta_1(r, \vec{a})$ и $\theta_2 = \theta_2(r, \vec{a})$ определяются соотношениями

$$L(r, \vec{a}, \vec{G}) = \ln \frac{\|\vec{G}(re^{i\theta_1})\| \cdot \|\vec{a}\|}{|(\vec{G}(re^{i\theta_1}) \cdot \vec{a})|}, \quad \mu(r, \vec{a}, \vec{G}) = \ln \frac{\|\vec{G}(re^{i\theta_2})\| \cdot \|\vec{a}\|}{|(\vec{G}(re^{i\theta_2}) \cdot \vec{a})|}.$$

* Для допустимой системы векторов $\vec{a}_k = \{0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0\}$ (единица на k-м месте) оценка $\beta(\vec{a}_{p-1})$ теоремы 3.5 [10] более точна.

Обозначим через c_k корни целой функции $F(z) = (\vec{G}(z)\cdot\vec{a})$. Применяя лемму работы [8, с. 136] к функции $F(z)$ и указанным выше θ_1 и θ_2, для любого фиксированного r $(r > r_0)$ получаем $(R > r_0)$

$$\ln\frac{\|\vec{G}(re^{i\theta_2})\|\cdot\|\vec{a}\|}{|(\vec{G}(re^{i\theta_2})\cdot\vec{a})|} + \ln\frac{\|\vec{G}(re^{i\theta_1})\|}{\|\vec{G}(re^{i\theta_2})\|} = \ln\frac{\|\vec{G}(re^{i\theta_1})\|\cdot\|\vec{a}\|}{|(\vec{G}(re^{i\theta_1})\cdot\vec{a})|} +$$

$$+ \sum_{|c_k|\leqslant 2R}\ln\left|\frac{re^{i\theta_1}-c_k}{re^{i\theta_2}-c_k}\right| + \frac{r}{R}Q(r,\theta_1,\theta_2,F) + C,$$

где C — различные положительные постоянные, зависящие лишь от рассматриваемой целой кривой или функции. Учитывая определения величин $\alpha(\vec{a},\vec{G})$ и $\beta(\vec{a},\vec{G})$, представим последнее равенство в виде $(\varepsilon_1 > 0,\ \varepsilon_2 > 0)$

$$(\alpha(\vec{a},\vec{G})+\varepsilon_1)\cdot T(r,\vec{G}) + \ln\frac{\|\vec{G}(re^{i\theta_1})\|}{\|\vec{G}(re^{i\theta_2})\|} \geqslant (\beta(\vec{a},\vec{G})-\varepsilon_2)\cdot T(r,\vec{G}) +$$

$$+ \sum_{|c_k|\leqslant 2R}\ln\left|\frac{re^{i\theta_1}-c_k}{re^{i\theta_2}-c_k}\right| + \frac{r}{R}Q(r,\theta_1,\theta_2,F) + C. \tag{2}$$

Очевидно, что $(j = 1,\ 2)$

$$|g_{\nu_j}(re^{i\theta_j})| \leqslant \|\vec{G}(re^{i\theta_j})\| \leqslant \sqrt{p}\,|g_{\nu_j}(re^{i\theta_j})|, \tag{3}$$

где $(j = 1, 2)$

$$|g_{\nu_j}(re^{i\theta_j})| = \max_{1\leqslant n\leqslant p}\{|g_n(re^{i\theta_j})|\}\ \ (\nu_j = \nu_j(re^{i\theta_j})). \tag{4}$$

Поэтому

$$\ln\frac{\|\vec{G}(re^{i\theta_1})\|}{\|\vec{G}(re^{i\theta_2})\|} \leqslant \ln\frac{|g_{\nu_1}(re^{i\theta_1})|}{|g_{\nu_2}(re^{i\theta_2})|} + \ln\sqrt{p} =$$

$$= \ln\frac{|g_{\nu_1}(re^{i\theta_1})|}{|g_{\nu_1}(re^{i\theta_2})|} + \ln\frac{|g_{\nu_1}(re^{i\theta_2})|}{|g_{\nu_2}(re^{i\theta_2})|} + \ln\sqrt{p} \leqslant \ln\frac{|g_{\nu_1}(re^{i\theta_1})|}{|g_{\nu_1}(re^{i\theta_2})|} + \ln\sqrt{p}. \tag{5}$$

Согласно формулам (2) и (5) имеем $(r > r_0)$

$$(\alpha(\vec{a},\vec{G})+\varepsilon_1)\cdot T(r,\vec{G}) + \ln\frac{|g_{\nu_1}(re^{i\theta_1})|}{|g_{\nu_1}(re^{i\theta_2})|} + \sum_{|c_k|\leqslant 2R}\ln\left|\frac{r+|c_k|}{r-|c_k|}\right| +$$

$$+ C\frac{r}{R}\{T(4R,\vec{G}) + T_1(4R,\vec{G})\} + C \geqslant (\beta(\vec{a},\vec{G})-\varepsilon_2)\cdot T(r,\vec{G}). \tag{6}$$

Пусть теперь $a_k(n)$ означают корни целых функций $g_n(z)$, $1\leqslant n\leqslant p$. Рассмотрим второе слагаемое в левой части неравенства (6). Лемма работы [8, с. 136] для целой функции $g_{\nu_1}(te^{i\varphi})$ дает $(r > r_0)$

$$(\beta(\vec{a},\vec{G})-\varepsilon_2)\cdot T(r,\vec{G}) \leqslant (\alpha(\vec{a},\vec{G})+\varepsilon_1)\cdot T(r,\vec{G}) +$$

$$+ \sum_{|c_k|\leqslant 2R}\ln\left|\frac{r+|c_k|}{r-|c_k|}\right| + \sum_{n=1}^{p}\sum_{|a_k(n)|\leqslant 2R}\ln\left|\frac{r+|a_k(n)|}{r-|a_k(n)|}\right| +$$

$$+ C\frac{r}{R}\{T(4R,\vec{G}) + T_1(4R,\vec{G})\} + C.$$

Окончание доказательства теоремы проводится обычным методом (см. формулу 2.2.7 из [9] и далее [9, с. 51]). Теорема 1 доказана.

Лемма работы [8, с. 136] дает возможность получить следующее утверждение, связывающее рост $\sum_{n=1}^{p} N(r, 0, g_n)$ не только с величиной нижнего порядка λ целой кривой $\vec{G}(z)$, как в результатах Н. Тоды [3, 4], но и с ростом величин $\mu(r, \vec{G}) = \min_{|z|=r} \ln \| \vec{G}(z) \|$ и $L(r, \vec{G}) = \max_{|z|=r} \ln \| \vec{G}(z) \|$.

Теорема 2. *Для произвольной p-мерной целой кривой $\vec{G}(z)$ нижнего порядка λ, $0 < \lambda < 1$, справедливо неравенство*

$$K(\vec{G}) \geqslant (\pi\lambda)^{-1} \operatorname{ctg} \frac{\pi\lambda}{2} \cdot \varlimsup_{r\to\infty} \frac{L(r, \vec{G}) - \mu(r, \vec{G})}{T(r, \vec{G})}.$$

Доказательство. Предположим, что $\theta_1(r)$ и $\theta_2(r)$ определяются из соотношений

$$L(r, \vec{G}) = \ln \| \vec{G}(re^{i\theta_1(r)}) \|, \ \mu(r, \vec{G}) = \ln \| \vec{G}(re^{i\theta_2(r)}) \|.$$

Для таких θ_1 и θ_2 введем обозначение (4). Легко видеть, что при этом сохраняется справедливость неравенств (3), а следовательно, и (5). Используя лемму работы [8, с. 136] для целой функции $g_{\nu_1}(\zeta)$ (ζ — независимая переменная) с указанными выше θ_1 и θ_2 и принимая во внимание неравенство (5), получаем ($r > r_0$)

$$L(r, \vec{G}) \leqslant \mu(r, \vec{G}) + \sum_{n=1}^{p} \sum_{|a_k(n)| \leqslant 2R} \ln \left| \frac{r + |a_k(n)|}{r - |a_k(n)|} \right| +$$

$$+ C \frac{r}{R} \{T(4R, \vec{G}) + T_1(4R, \vec{G})\} + C,$$

где $a_k(n)$ — корни целых функций $g_n(z)$, $1 \leqslant n \leqslant p$. Далее следуем обычному методу (см. [9, с. 49, 51]). Теорема 2 доказана.

1. *Виттих Г.* Новейшие исследования по однозначным аналитическим функциям.— Пер. с нем.— М. : Физматгиз, 1960. (Доп. Гольдберг А. А. Некоторые вопросы теории распределения значений).— С. 263—300.
2. *Петренко В. П., Хуссайн М.* О росте целых кривых // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1973.— 37, № 2.— С. 466—477.
3. *Toda N.* Sur une relation entre la croissance et le nombre de valeurs deficientes de fonctions algebroides ou de systemes // Kodai Math. Semin. Repts.— 1970.— 22, N 1.— P. 114—121.
4. *Toda N.* Sur la croissance de fonctions algebroides a valeurs deficientes // Ibid.— N 3.— P 324—337.
5. *Крытов А. В.* О дефектах целых кривых конечного нижнего порядка // Укр. мат. журн.— 1979.— 31, № 3.— С. 273—278.
6. *Ламзина Т. Б.* О росте мероморфных функций и целых кривых // Теория функций, функц. анализ и их прил.— 1973.— Вып. 18.— С. 202—215.
7. *Kubota Y.* On meromorphic functions of order zero// Kodai Math. Semin. Repts.— 1969.— 21, N 4.— P. 405—412.
8. *Петренко В. П.* О росте целых кривых нижнего порядка $\lambda < 1$ // Теория функций, функц. анализ и их прил.— 1974.— Вып. 20.— С. 134—141.
9. *Петренко В. П.* Рост мероморфных функций.— Харьков : Вища шк., 1978.— 136 с.
10. *Петренко В. П.* Целые кривые.— Харьков : Вища шк., 1984.— 136 с.

Харьков. ун-т

Получено 07.01.85,
после доработки — 22.04.86

Лемма работы [8, с. 136] дает возможность получить следующее утверждение, связывающее рост $\sum_{n=1}^{p} N(r, 0, g_n)$ не только с величиной нижнего порядка λ целой кривой $\vec{G}(z)$, как в результатах Н. Тоды [3, 4], но и с ростом величин $\mu(r, \vec{G}) = \min_{|z|=r} \ln \| \vec{G}(z) \|$ и $L(r, \vec{G}) = \max_{|z|=r} \ln \| \vec{G}(z) \|$.

Теорема 2. *Для произвольной р-мерной целой кривой* $\vec{G}(z)$ *нижнего порядка* λ, $0 < \lambda < 1$, *справедливо неравенство*

$$K(\vec{G}) \geqslant (\pi\lambda)^{-1} \operatorname{ctg} \frac{\pi\lambda}{2} \cdot \varliminf_{r\to\infty} \frac{L(r, \vec{G}) - \mu(r, \vec{G})}{T(r, \vec{G})}.$$

Доказательство. Предположим, что $\theta_1(r)$ и $\theta_2(r)$ определяются из соотношений

$$L(r, \vec{G}) = \ln \| \vec{G}(re^{i\theta_1(r)}) \|, \ \mu(r, \vec{G}) = \ln \| \vec{G}(re^{i\theta_2(r)}) \|.$$

Для таких θ_1 и θ_2 введем обозначение (4). Легко видеть, что при этом сохраняется справедливость неравенств (3), а следовательно, и (5). Используя лемму работы [8, с. 136] для целой функции $g_{\nu_1}(\zeta)$ (ζ — независимая переменная) с указанными выше θ_1 и θ_2 и принимая во внимание неравенство (5), получаем ($r > r_0$)

$$L(r, \vec{G}) \leqslant \mu(r, \vec{G}) + \sum_{n=1}^{p} \sum_{|a_k(n)| \leqslant 2R} \ln \left| \frac{r + |a_k(n)|}{r - |a_k(n)|} \right| +$$

$$+ C \frac{r}{R} \{T(4R, \vec{G}) + T_1(4R, \vec{G})\} + C,$$

где $a_k(n)$ — корни целых функций $g_n(z)$, $1 \leqslant n \leqslant p$. Далее следуем обычному методу (см. [9, с. 49, 51]). Теорема 2 доказана.

1. *Виттих Г.* Новейшие исследования по однозначным аналитическим функциям.— Пер. с нем.— М. : Физматгиз, 1960. (Доп. Гольдберг А. А. Некоторые вопросы теории распределения значений).— С. 263—300.
2. *Петренко В. П., Хуссайн М.* О росте целых кривых // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1973.— 37, № 2.— С. 466—477.
3. *Toda N.* Sur une relation entre la croissance et le nombre de valeurs deficientes de fonctions algebroides ou de systemes // Kodai Math. Semin. Repts.— 1970.— 22, N 1.— P. 114—121.
4. *Toda N.* Sur la croissance de fonctions algebroides a valeurs deficientes // Ibid.— N 3.— P 324—337.
5. *Крытов А. В.* О дефектах целых кривых конечного нижнего порядка // Укр. мат. журн.— 1979.— 31, № 3.— С. 273—278.
6. *Ламзина Т. Б.* О росте мероморфных функций и целых кривых // Теория функций, функц. анализ и их прил.— 1973.— Вып. 18.— С. 202—215.
7. *Kubota Y.* On meromorphic functions of order zero// Kodai Math. Semin. Repts.— 1969.— 21, N 4.— P. 405—412.
8. *Петренко В. П.* О росте целых кривых нижнего порядка $\lambda < 1$ // Теория функций, функц. анализ и их прил.— 1974.— Вып. 20.— С. 134—141.
9. *Петренко В. П.* Рост мероморфных функций.— Харьков : Вища шк., 1978.— 136 с.
10. *Петренко В. П.* Целые кривые.— Харьков : Вища шк., 1984.— 136 с.

Харьков. ун-т

Получено 07.01.85,
после доработки — 22.04.86