УДК 517.944

Ю. А. Митропольский, Г. П. Хома

О периодических решениях волновых уравнений второго порядка. III

В данной работе исследуем структуру обобщенных периодических решений 2π-гиперболических систем первого рода, описанных уравнениями

$$u_{tt} - u_{xx} = f(x, t, u, u_t, u_x), \quad 0 < x < \pi, \quad t \in \mathbb{R}, \quad u(0, t) = u(\pi, t) = 0,$$
$$u(x, t + 2\pi) = u(x, t). \tag{1}$$

Предположим, что функция $f(x, t, u, u_t, u_x)$ определена в области

$$I \times \mathbb{R} \times D = I \times \mathbb{R} \times I^1 \times I^2 \times I^3 : x \in [0, \pi], \quad t \in \mathbb{R}, \quad u \in [a, b] = I^1,$$
$$u_t \in [-c, c] = I^2, \quad u_x \in [-c, c] = I^3, \tag{2}$$

непрерывна по переменным x, t, периодическая по t с периодом 2π и удовлетворяет условиям

$$|f(x, t, u, u_t, u_x)| \leqslant M; \qquad |f(x, t, u'', u''_t, u''_x) - f(x, t, u', u'_t, u'_x)| \leqslant$$
$$\leqslant K\{|u'' - u'| + |u''_t - u'_t| + |u''_x - u'_x|\}, \tag{3}$$

где M, K — положительные постоянные.

Рассмотрим класс непрерывных 2π периодических функций $\mu(t)$, разлагающихся в ряд Фурье $\mu(t) = \alpha_0/2 + \sum\limits_{k=1} \alpha'_k \cos kt + \alpha''_k \sin kt$.

Обозначим через $\alpha = \{\alpha_0, \alpha'_1, \alpha''_1, \alpha'_2, \alpha''_2, \ldots\}$ набор коэффициентов Фурье, определяющих функцию $\mu(t)$ такую, что

$$|\mu(t)| \leqslant c - M\pi, \quad c \geqslant M\pi, \tag{4}$$

а через $D_\mu = \{\alpha\}$ — множество коэффициентов Фурье, для которых выполнено условие (4).

Определение. *Уравнение второго порядка* (1) *определим как 2π-гиперболическую дифференциальную систему первого рода в области* (2), *когда постоянные a, b, c, M связаны неравенствами*

$$c \geqslant M\pi, \quad a \leqslant -c\pi + M\pi^2/2 \leqslant c\pi - M\pi^2/2 \leqslant b \tag{5}$$

и выполнено условие $f(x, t, 0, 0, 0) = 0$.

Лемма 1. *Пусть функция $f(x, t, u, u_t, u_x)$ определена в области* (2), *непрерывна по x, t, периодична по t с периодом 2π и удовлетворяет неравенствам* (3) *и* (5).

Тогда для каждой непрерывной 2π-периодической функции $|\mu(t)| \leqslant \leqslant c - M\pi$ последовательность 2π-периодических по t функций

$$u_1^0(x, t, \alpha) = \mu(t + x), \quad u_2^0(x, t, \alpha) = -\mu(t - x), \quad u^0(x, t, \alpha) =$$
$$= \int_0^x \frac{\mu(t + \xi) + \mu(t - \xi)}{2}\, d\xi, \quad u_1^{m+1}(x, t, \alpha) = \mu(t + x) -$$
$$- \int_0^x \tilde{F}[u^m, u_1^m, u_2^m](\eta, t + x - \eta)\, d\eta, \quad u_2^{m+1}(x, t, \alpha) = -\mu(t - x) +$$
$$+ \int_0^x \tilde{F}[u^m, u_1^m, u_2^m](\eta, t - x + \eta)\, d\eta, \quad u^{m+1}(x, t, \alpha) =$$
$$= \int_0^x \frac{u_1^{m+1}(\xi, t, \alpha) - u_2^{m+1}(\xi, t, \alpha)}{2}\, d\xi \equiv \int_0^x \frac{\mu(t + \xi) + \mu(t - \xi)}{2}\, d\xi -$$
$$- \frac{1}{2}\int_0^x d\xi \int_0^\xi \{\tilde{F}[u^m, u_1^m, u_2^m](\eta, t + \xi - \eta) + \tilde{F}[u^m, u_1^m, u_2^m](\eta, t - \xi + \eta)\}\, d\eta;$$
$$m = 0, 1, 2, \ldots; \tag{6}$$

$$\tilde{F}[u, u_1, u_2](x, t) = f(x, t, u(x, t), \quad u_t(x, t), \quad u_x(x, t)), \quad u_1 = u_t + u_x,$$
$$u_2 = u_t - u_x \Leftrightarrow u_t = \frac{1}{2}(u_1 + u_2), \quad u_x = \frac{1}{2}(u_1 - u_2) \tag{7}$$

сходится при $m \to \infty$ равномерно относительно

$$x, t, \alpha \in I \times \mathbb{R} \times D_\mu \tag{8}$$

к функциям $u_{10}(x, t, \alpha)$, $u_{20}(x, t, \alpha)$, $u_0(x, t, \alpha)$, определенным в области (8), *периодическим по t с периодом 2π и удовлетворяющим системе интеграль-*

ных уравнений

$$u_1(x,t,\alpha)=\mu(t+x)-\int_0^x \tilde F[u,u_1,u_2](\eta,t+x-\eta)\,d\eta,\quad u_2(x,t,\alpha)=$$

$$=-\mu(t-x)+\int_0^x \tilde F[u,u_1,u_2](\eta,t-x+\eta)\,d\eta,\quad u(x,t,\alpha)=$$

$$=\int_0^x \frac{u_1(\xi,t,\alpha)-u_2(\xi,t,\alpha)}{2}\,d\xi\equiv\int_0^x\frac{\mu(t+\xi)+\mu(t-\xi)}{2}\,d\xi-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^x d\xi\int_0^\xi\{\tilde F[u,u_1,u_2](\eta,t+\xi-\eta)+\tilde F[u,u_1,u_2](\eta,t-\xi+\eta)\}\,d\eta.$$

При этом $|u^1(x,t,\alpha)-u_0(x,t,\alpha)|\leqslant MK(2+\pi/2)\pi^3/3!,\quad |u^m(x,t,\alpha)-u_0(x,t,\alpha)|\leqslant(3K)^{m-2}\gamma MK^2\pi^{m+2}/(m+2)!,\quad \gamma=(2+\pi/2)(2+\pi/3);\quad m=2,3,\ldots$.

Доказательство основано на методе последовательных приближений.

Так как задача Коши

$$u_{tt}-u_{xx}=f(x,t,u,u_t,u_x),\quad u(0,t)=0,\quad u_x(0,t)=\mu(t) \tag{10}$$

в треугольнике $\bar\Delta=\{0\leqslant x\leqslant\pi,\ x\leqslant t\leqslant 2\pi-x\}$ эквивалентна в классе гладких функций системе интегральных уравнений (9), то на основании леммы 1 получаем следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия леммы 1. Тогда для каждой непрерывной 2π-периодической функции $|\mu(t)|\leqslant c-M\pi$ задача Коши* (10) *имеет единственное непрерывное 2π-периодическое решение в области* $\Delta_\infty=\{0\leqslant x\leqslant\pi,\ 2\pi n+x\leqslant t\leqslant 2\pi(n+1)-x,\ n=0,\pm1,\pm2,\ldots\}$.

Замечание 1. Решение $u_{\bar\Delta}(x,t,\alpha)$ задачи Коши (10) удовлетворяет первому краевому условию $u_{\bar\Delta}(0,t,\alpha)=0$, а второе краевое условие $u_{\bar\Delta}(\pi,\pi,\alpha)=0$ выполняется, очевидно, не при каждой начальной функции $\mu(t)$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия леммы* 1 *и условие* $f(x,t,0,0,0)\equiv0$. *Для того чтобы для каждой непрерывной 2π-периодической функции $|\mu(t)|\leqslant c-M\pi$ краевая задача* (1) *имела в прямоугольнике* $\Pi_{2\pi}=\{0\leqslant x\leqslant\pi,\ 0\leqslant t\leqslant 2\pi\}$ *решение* $\tilde u(x,t,\alpha)\in L^\infty$ *вида*

$$\tilde u(x,t,\alpha)=\begin{cases}u_{\bar\Delta}(x,t,\alpha), & (x,t)\in\bar\Delta,\\ 0, & (x,t)\in\Pi_{2\pi}\setminus\bar\Delta,\end{cases} \tag{11}$$

необходимо и достаточно выполнение условия

$$\tilde\Delta(\alpha)\equiv\int_0^{2\pi}\mu(\xi)\,d\xi+\int_0^\pi d\xi\int_0^\xi\{F[u,u_t,u_x](\eta,\pi+\xi-\eta)+$$

$$+F[u,u_t,u_x](\eta,\pi-\xi+\eta)\}\,d\eta=0, \tag{12}$$

где

$$F[u,u_t,u_x](x,t)=f(x,t,u(x,t),\quad u_t(x,t),\quad u_x(x,t)). \tag{13}$$

Доказательство. Пусть краевая задача (1) имеет на $\Pi_{2\pi}$ решение вида (11). Тогда выполнены краевые условия $\tilde u(0,t,\alpha)=0$, $\tilde u(\pi,t,\alpha)=0$ или, что равносильно, $u_{\bar\Delta}(0,t,\alpha)=0$ и $u_{\bar\Delta}(\pi,\pi,\alpha)=0$. Так как функция $u_{\bar\Delta}(x,t,\alpha)$ удовлетворяет системе интегральных уравнений (9), то отсюда с учетом условия $u_{\bar\Delta}(\pi,\pi,\alpha)=0$ следует выполнение условия (12).

Пусть теперь для начальной функции $|u_x(0, t)| \equiv |\mu(t)| \leqslant c - M\pi$ и решения $u_{\bar{\Delta}}(x, t, \alpha)$ задачи Коши (10) выполнено условие (12). Тогда построенное решение (11) будет решением краевой задачи (1).

Теорема 2 доказана.

Следствие. *Пусть выполнены условия теоремы 2 и свободный член α_0 в наборе коэффициентов Фурье $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1', \alpha_1'', \alpha_2', \alpha_2'', \dots)$, определяющем 2π-периодическую функцию $|\mu(t)| \leqslant c - M\pi$, равен нулю. Для того чтобы краевая задача* (1) *в* $\Pi_{2\pi}$ *имела решение* $\tilde{u}(x, t, \alpha) \in L^\infty$ *вида* (11), *необходимо и достаточно выполнение условия*

$$\Delta(\alpha) = \int_0^\pi d\xi \int_0^\xi \{F[u, u_t, u_x](\eta, \pi + \xi - \eta) + F[u, u_t, u_x](\eta, \pi - \xi + \eta)\} d\eta = 0. \tag{14}$$

Таким образом, условие (12) ((14)) является условием вычисления набора коэффициентов Фурье $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1', \alpha_1'', \alpha_2', \alpha_2'', \dots)$, определяющим 2π-периодическую функцию $|\mu(t)| \leqslant c - M\pi$, с помощью которой строится 2π-периодическое решение $\tilde{u} \in L^\infty$ 2π-систем первого рода.

Следовательно, задача существования и построения обобщенных 2π-периодических решений вида $\tilde{u} \in L^\infty$ 2π-гиперболических дифференциальных систем первого рода равносильна существованию точек α (набора коэффициентов Фурье), определяющих функцию $|\mu(t)| \leqslant c - M\pi$, для которых $\tilde{\Delta}(\alpha) = 0$ $(\Delta(\alpha) = 0)$.

Точки α, для которых $\tilde{\Delta}(\alpha) = 0$, являются особыми точками отображения [1]

$$\tilde{\Delta}: D_\mu \to \mathbb{R}, \quad \tilde{\Delta}(\alpha) = \int_0^{2\pi} \mu(z)\, dz + \int_0^\pi d\xi \int_0^\xi \{F[u, u_t, u_x](\eta, \pi + \xi - \eta) + $$
$$+ F[u, u_t, u_x](\eta, \pi - \xi + \eta)\} d\eta. \tag{15}$$

Найти отображение (15) можно лишь приближенно, вычисляя, например, функции

$$\tilde{\Delta}_m(\alpha) = \int_0^{2\pi} \mu(z)\, dz + \int_0^\pi d\xi \int_0^\xi \{F[u^m, u_t^m, u_x^m](\eta, \pi + \xi - \eta) + $$
$$+ F[u^m, u_t^m, u_x^m](\eta, \pi - \xi + \eta)\} d\eta. \tag{16}$$

В связи с этим возникает задача, как исходя из отображения (16) заключить о нулях отображения $\tilde{\Delta}(\alpha)$, а следовательно, заключить о существовании обобщенных 2π-периодических решениях 2π-гиперболических систем первого рода. Заметим, что такая задача успешно решена для так называемых T-систем обыкновенных дифференциальных систем уравнений в работе [1].

Так как уравнение (14) — скалярное, то функцию $\mu(t)$ можно искать в виде $\mu(t) = \alpha_k' \cos kt$ или $\mu(t) = \alpha_k'' \sin kt$. Тогда уравнение (14) является уравнением для определения искомых коэффициентов Фурье α_k' или α_k''.

Поскольку функции $\Delta(\alpha_k')$ и $\Delta(\alpha_k'')$ находятся лишь приближенно, исходя из последовательностей

$$\Delta_m(\alpha_k^\nu) = \int_0^\pi d\xi \int_0^\xi \{F[u^m, u_t^m, u_x^m](\eta, \pi + \xi - \eta) + F[u^m, u_t^m, u_x^m](\eta, \pi - \xi + \eta)\} d\eta, \tag{17}$$

где индекс ν обозначает один или два штриха, то возникает задача, как по нулям функции $\Delta_m(\alpha_k^\nu)$ заключить о нулях функции $\Delta(\alpha_k^\nu)$. Для ее решения следует учесть, что каждая из функций $\Delta_m(\alpha_k^\nu)$, как и предельная функция $\Delta(\alpha_k^\nu)$, определена и непрерывна для α_k^ν из отрезка $D_\mu = [-c + M\pi, c - M\pi]$ и удовлетворяет неравенству

$$|\Delta_m(\alpha_k^\nu) - \Delta(\alpha_k^\nu)| \leqslant (3K)^{m-1}\gamma MK^2 \frac{\pi^{m+3}}{(m+1)!} = d_m, \quad m \geqslant 2. \tag{18}$$

Последняя оценка приводит к следующему утверждению.

Теорема 3. *Пусть уравнение* (1) *есть* 2π*-система первого рода и для некоторого* m *функция* $\Delta_m(\alpha_k^\nu)$, *определяемая согласно формуле* (17), *удовлетворяет неравенствам*

$$\min_{\alpha_k^\nu \in D_\mu} \Delta_m(\alpha_k^\nu) \leqslant -d_m, \quad \max_{\alpha_k^\nu \in D_\mu} \Delta_m(\alpha_k^\nu) \geqslant d_m, \tag{19}$$

где $D_\mu = [-c + M\pi, c + M\pi]$; d_m — *постоянная* (18).

Тогда краевая задача (1) *имеет решение* $\tilde{u}(x, t, \alpha_k^\nu) \in L^\infty$ *вида* (11).

Доказательство. Пусть $y_1 \in \mathbb{R}$, $y_2 \in \mathbb{R}$ — точки отрезка $[-c + M\pi, c - M\pi]$ такие, что $\Delta_m(y_1) = \min_{y \in D_\mu} \Delta_m(y)$, $\Delta_m(y_2) = \max_{y \in D_\mu} \Delta_m(y)$. С учетом (18) и (19) имеем $\Delta(y_1) = \Delta_m(y_1) + (\Delta(y_1) - \Delta_m(y_1)) \leqslant 0$, $\Delta(y_2) = \Delta_m(y_2) + (\Delta(y_2) - \Delta_m(y_2)) \geqslant 0$. Отсюда в силу непрерывности функции $\Delta(y)$ следует существование точки $y_0 = \alpha_k^\nu \in [y_1, y_2]$ такой, что $\Delta(y_0) = 0$. Последнее равенство показывает теорему 3.

То обстоятельство, что функция $\Delta(\alpha_k^\nu)$ является скалярной функцией одного аргумента, позволяет воспользоваться классической теоремой о нулях аналитической функции [1] и получить следующее утверждение.

Теорема 4 [2]. *Пусть правая часть уравнения* (1) *является полиномом относительно* u, u_t, u_x *и выполнены неравенства* (3) — (5). *Тогда, если краевая задача* (1) *имеет* 2π*-периодическое решение* $\tilde{u} \in L^\infty$ *вида* (11), *то она имеет* 2π*-периодическое решение* $\tilde{u} \in L^\infty$ *либо для каждого значения* α_k^ν *отрезка* $[-c + M\pi, c - M\pi]$, *либо лишь для конечного числа таких значений.*

Теорема 5. *Пусть уравнение* (1) *есть* 2π*-гиперболическая дифференциальная система первого рода в области* (2), *выполнены условия* (3) *и условие:* 1) *для каждой нечетной функции* $u(x, t) \in C^1$ *по переменной* t *функция* $F[u, u_t, u_x](x, t)$ — *нечетная по переменной* t. *Тогда для каждой непрерывной, нечетной и* 2π*-периодической функции* $|u_x(0, t)| = |\mu(t)| \leqslant c - M\pi$ *краевая задача* (1) *имеет* 2π*-периодическое решение* $\tilde{u}(x, t, \alpha) \in L^\infty$ *вида* (11).

Доказательство. По индукции покажем, что если в представлении (6) за нулевое приближение $u^0(x, t, \alpha)$ выбрать нечетную по t функцию

$$u^0(x, t, \alpha) = \frac{1}{2}\int_0^x \{\mu(t+\xi) + \mu(t-\xi)\}\, d\xi, \quad |\mu(t)| \leqslant c - M\pi, \tag{20}$$

то все члены последовательности $(u^m(x, t, \alpha))$, построенные согласно представлению (6),— нечетные функции переменной t. Действительно, при $m = 0$ в силу (6), (7) и (13) имеем

$$u^1(x, t, \alpha) = u^0(x, t, \alpha) - \frac{1}{2}\int_0^x d\xi \int_0^\xi \{F[u^0, u_t^0, u_x^0](\eta, t + \xi - \eta) + F[u^0, u_t^0, u_x^0](\eta, t - \xi + \eta)\}\, d\eta.$$

Отсюда на основании нечетности функции $\mu(t)$ следует нечетность функции $u^0(x, t, \alpha)$, определяемой формулой (20), и на основании условия 1 теоремы 5 следует, что первое приближение $u^1(x, t, \alpha)$ — нечетная функция переменной t.

Предположим, что $u^k(x, t, \alpha)$ — нечетная функция t, где k — некоторое натуральное число. Учитывая рекуррентное соотношение, определяющее $u^{k+1}(x, t, \alpha)$, т. е.

$$u^{k+1}(x, t, \alpha) = u^0(x, t, \alpha) - \frac{1}{2}\int_0^x d\xi \int_0^\xi \{F[u^k, u_t^k, u_x^k](\eta, t+\xi-\eta) + \\ + F[u^k, u_t^k, u_x^k](\eta, t-\xi+\eta)\}\, d\eta$$

и условие 1 теоремы 5, находим, что функция $u^{k+1}(x, t, \alpha)$ — нечетная по переменной t.

Таким образом, при выполнении условий теоремы 5 все члены u^m последовательности $(u^m(x, t, \alpha)$ — нечетные функции переменной t.

Докажем теперь, что в этом случае выполняется условие (14). Действительно, значения $\Delta_m(\alpha) \equiv u^{m+1}(\pi, \pi, \alpha)$ согласно третьему уравнению системы (6) имеют вид

$$\Delta_m(\alpha) = \int_0^\pi d\xi \int_0^\xi \{F[u^m, u_t^m, u_x^m](\eta, \pi+\xi-\eta) + F[u^m, u_t^m, u_x^m](\eta, \pi-\xi+\eta)\}d\eta \equiv$$

$$\equiv \int_0^\pi d\xi \int_0^\xi \{F[u^m, u_t^m, u_x^m](\eta, \pi+\xi-\eta) + F[u^m, u_t^m, u_x^m](\eta, -\pi-\xi+\eta)\}\, d\eta.$$

Отсюда на основании условия 1 теоремы 5 получаем, что $\Delta_m(\alpha) \equiv \equiv u^{m+1}(\pi, \pi, \alpha) = 0$ для всех $m = 0, 1, 2, \ldots$. Следовательно, $\Delta(\alpha) = 0$, а значит, краевая задача (1) имеет решение $\tilde{u} \in L^\infty$ вида (11). Теорема 5 доказана.

Заметим, что применение к операторам (6) принципа Шаудера [3, 4] позволяет установить существование решения краевой задачи (1), являющейся 2π-гиперболической дифференциальной системой первого рода, при более слабых предположениях относительно функции $f(x, t, u, u_t, u_x)$.

З а м е ч а н и е 2. Следует сказать, что задачи, описываемые уравнениями с малым параметром

$$u_{tt} - u_{xx} = \varepsilon f(x, t, u, u_t, u_x), \quad u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad u(x, t+2\pi) = u(x, t), \tag{21}$$

в которых функция $f(x, t, u, u_t, u_x)$ удовлетворяет в области (2) условию (3) и условию $f(x, t, 0, 0, 0) = 0$, при достаточно малых значениях параметра ε всегда являются 2π-гиперболическими дифференциальными системами первого рода. Например, уравнение [5, 6]

$$u_{tt} - u_{xx} = \varepsilon(\alpha u + \beta u^3), \quad 0 < \alpha, \beta < \infty, \tag{22}$$

правая часть $(\alpha u + \beta u^3)$ которого удовлетворяет условию 1 теоремы 5, при достаточно малых значениях параметра ε имеет бесконечное множество 2π-периодических решений вида (11), т. е. для каждой нечетной 2π-периодической функции $\mu(t) = \alpha_k'' \sin kt$, $|\alpha_k''| < c - \varepsilon M\pi$, краевая задача (21) при $f(x, t, u, u_t, u_x) \equiv \alpha u + \beta u^3$ имеет 2π-периодическое решение вида (11). Очевидно, такое решение зависит от действительного параметра α_k'', $|\alpha_k''| < < c - M\pi$.

С другой стороны, в классе гладких функций система интегральных уравнений (9) эквивалентна задаче Коши (10) и при $\mu(t) \equiv 0$. Поэтому в зависимости от выбора начального приближения $u^0(x, t, 0)$ решение $u(x, t, 0)$ системы (9), $\mu(t) \equiv 0$, может удовлетворять или не удовлетворять равенству $u(\pi, \pi, 0) = 0$. Заметим, что дополнительных условий для выполнения равенства $u(\pi, \pi, 0) = 0$ не имеется. Однако, при $\mu(t) \equiv 0$ 2π-периодические решения краевой задачи (21) существуют и даже существует бесконечное множество решений другой структуры, чем решения вида (11). Это легко объясняется следующим примером.

Рассмотрим краевую задачу, описываемую уравнениями

$$u_{tt} - u_{xx} = \varepsilon(\alpha u_t + \beta u_t^3), \quad 0 < \alpha, \beta < \infty, \quad u(0, t) = u(\pi, t) = 0,$$
$$u(x, t + 2\pi) = u(x, t). \tag{23}$$

Если принять за нулевое приближение функцию $u^0(x, t) = a\cos t\cos x$, которая, очевидно, принадлежит пространству функций $A^2 = \{g : g(x, t) = g(x, t + 2\pi) = g(\pi - x, t + \pi)\}$ [7], то функция $f(x, t, u^0, u_t^0, u_x^0) \equiv \alpha u_t^0 + \beta(u_t^0)^3 = -(\alpha a\sin t\cos x + \beta a^3\sin^3 t\cos^3 x)$, согласно которой определяется первое приближение $u^1(x, t)$ задачи (23), также принадлежит пространству функций A_2. В этом случае, как показано в работе [7], существуют другие виды операторов, отличные от операторов (9), преобразующие пространство функций A^2 в A^2. Заметим, что в пространстве A_2 существуют и классические 2π-периодические решения краевой задачи (21). На основании результатов работы [7] при определенном выборе параметра a в начальном приближении $u^0(x, t) = a\cos t\cos x$ и ε, $\varepsilon \ll 1$, краевая задача (23) имеет бесконечное множество гладких 2π-периодических решений, что полностью совпадает с результатом работы [8]. Такое утверждение справедливо и для краевой задачи

$$u_{tt} - u_{xx} = \varepsilon(1 - u^2)u_t, \quad u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad u(x, t + 2\pi) = u(x, t). \tag{24}$$

1. *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Численно-аналитические методы исследования периодических решений.— Киев : Вища шк., 1976.— 179 с.
2. *Хома Г. П.* О структуре обобщенных периодических решений гиперболических дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений второго порядка. — Киев, 1985.—32 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 85.65).
3. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ.— М. : Наука, 1977.— 742 с.
4. *Митропольский Ю. А., Хома Г. П., Громяк М. И.* Периодические решения волновых дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений второго порядка.— Киев, 1986.— 32 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 86.26).
5. *Vejvoda O.* Partial differential equations : time-periodic solutions.— USA : Sijhoff-Noordhoff, 1981.— 358 p.
6. *Štedry M., Vejvoda O.* Periodic solutions to weakly non-linear autonomous ware equations // Czech. Math. J.— 1975.— 25, N 4.— P. 536—555.
7. *Митропольский Ю. А., Хома Г. П.* О периодических решениях волновых уравнений второго порядка. II // Укр. мат. журн.— 1986.— 38, № 6.— С. 733—739.
8. *Hall W. S.* A Rauleigh ware equation-an analysis // Nonlinear Analysis, Theory, Methods a Aplications.— 1978.— N 2.— P. 129—156.

Ин-т математики АН УССР, Киев
Тернополь. пед. ин-т

Получено 02.11.86