УДК 519.7

В. Г. Самойленко

Об изменении спектра оператора вторичного квантования при возмущении его потенциалом

Изучение спектра оператора вторичного квантования, возмущенного потенциалом, стимулируется задачами конструктивной теории поля (см. [1]). Результаты данной работы можно рассматривать как дополнение к анонсированным в [2].

Пусть H — действительное гильбертово пространство. Для самосопряженного в H оператора $A \geqslant 0$ существует ядерное пространство $\Phi \subset H$ такое, что Φ — область существенной самосопряженности A и $A \in L(\Phi, \Phi)$. Пусть $\Phi \subset H \subset \Phi'$ — цепочка, где двойственность устанавливается скалярным произведением в H. На Φ' вводится гауссова мера, определенная своим характеристическим функционалом $\int\limits_{\Phi'} e^{i(\xi,\varphi)_H} d\mu_H(\xi) = \exp\left(-\frac{1}{4}\|\varphi\|_H^2\right)$, $\varphi \in \Phi$.

Рассмотрим в пространстве $L_2(\Phi', d\mu_H)$ оператор вторичного квантования N_A, равный замыканию оператора

$$C_b^\infty(\Phi') \ni u(\xi) \mapsto (N_A u)(\xi) = -\frac{1}{2}\left(\mathrm{Sp}_{H_c}(AU''(\xi)) - 2(Au'(\xi), \xi)_{Hc}\right),$$

где $u'(\xi)$ и $u''(\xi)$ $(\xi \in \Phi')$ — производные $u(\xi)$, $U''(\xi) \in L(H_c, H_c)$ (H_c — комплексификация H) — оператор, соответствующий ядру $u''(\xi) \in \Phi_c \otimes \Phi_c$, а $C_b^\infty(\Phi')$ — множество бесконечно дифференцируемых ограниченных цилиндрических функций. Отметим, что N_A самосопряжен. Более подробное изложение этих фактов см. в [3].

Относительно спектра оператора N_A справедливо следующее очевидное утверждение: оператор N_A имеет чисто дискретный спектр тогда и только тогда, когда A имеет компактный обратный оператор.

Пусть A не имеет компактного обратного оператора, т. е. $\sigma_{\mathrm{ess}}(N_A) \neq \varnothing$ (обозначение взято из [4]).

Теорема 1. *Пусть $v(\xi) = \overline{v(\xi)} \in L_1(\Phi', d\mu_H)$ и форма $((N_A + v)u, u)_{L_2}$ $(u \in C_b^\infty(\Phi'))$ полуограничена снизу. Если $N_A + v$ — самосопряженный оператор, соответствующий форме, то $\sigma_{\mathrm{ess}}(N_A + v) \neq \varnothing$.*

Доказательство, благодаря теореме XIII.64 [4], состоит в построении некомпактной системы функций, равномерно ограниченных по норме $\|u\|^2 = (u, u)_{L_2} + ((N_A + v)u, u)_{L_2}$.

Из этого утверждения и теоремы 6 [2] следует, что возмущение оператора N_A потенциалом $v(\xi)$ (хотя и не любым, но из достаточно широкого класса — от ограниченного и отличного от нуля лишь в некотором шаре, до неограниченно возрастающего (в фиксированном направлении не быстрее чем $e^{\alpha x^2}$ $(\alpha < 1)$), с одной стороны, приводит к изменению существенного спектра исходного оператора, а с другой — его нельзя полностью уничтожить. Отметим, что в конечномерной ситуации подобная картина относительно дифференциальных операторов второго порядка не имеет места.

Рассмотрим теперь случай, когда A имеет обратный компактный оператор, т. е. $\sigma(N_A) = \sigma_{\mathrm{disc}}(N_A)$.

Пусть $T \geqslant 0$ — оператор Гильберта — Шмидта в H такой, что $\|T\| \leqslant 1$, $\Phi \subseteq D_{T^{-1}}$, $T^{-1}\Phi$ плотно в H и T^{-1} действует из Φ в H непрерывно. По оператору T построим оснащение $H_+ \subset H \subset H_-$ (см. [5]), T^+ — сопряженный оператор (в скалярном произведении H) к оператору T, действующему из H в H_+. Множество $H_- \subset \Phi'$ имеет полную μ_H-меру (см., например, [6]).

Теорема 2. *Пусть $v(\xi) \in L_1(\Phi', d\mu_H)$, $v(\xi) \geqslant -c\|T^+\xi\|_{H_-}^2 - d$, c, $d > 0$, $\xi \in H_-$, и $A \geqslant \alpha c T^4$, $\alpha > 4$. Тогда самосопряженный оператор, построенный по форме $((N_A + v)u, u)_{L_2}$, $u \in C_b^\infty(\Phi')$, имеет чисто дискретный спектр.*

Утверждение теоремы справедливо благодаря тому, что удается доказать подчиненность в смысле форм отрицательной части потенциала оператору N_A.

Отметим, что при переходе к координатной форме записи условие на потенциал примет вид $v(\xi) \geqslant -c \sum_{i=1}^{\infty} p_i^{-1}\xi_i^2 - d$ $\left(\xi = (\xi_i)_{i=1}^{\infty} \in \mathbb{R}^{\infty};\ p_i = \lambda_i^{-2},\ \lambda_i \text{ — собственные значения } T,\ \sum_{i=1}^{\infty} p_i^{-1} < \infty\right)$. При уменьшении p_i функция $c \sum_{i=1}^{\infty} p_i^{-1}\xi_i^2 + d$ увеличивается и в пределе, когда p_i такие, что $\sum_{i=1}^{\infty} p_i^{-1} = \infty$, функция $-c \sum_{i=1}^{\infty} p_i^{-1}\xi_i^2 - d$ принимает конечные значения лишь на множестве меры нуль, а в остальных точках обращается в $-\infty$ (вырождение происходит за счет роста в направлении номера переменной). Так как выбор T, а значит, и p_i, достаточно произволен, то класс потенциалов $v(\xi)$, удовлетворяющих условию теоремы, достаточно широк.

На основании изложенного выше можно сделать следующий вывод, справедливый для широкого класса возмущений (в который попадают и потенциальные возмущения, используемые в конструктивной теории поля (см. [1])) оператора вторичного квантования: 1) существенный спектр оператора вторичного квантования неустойчив даже при малейших потенциальных возмущениях; 2) наличие или отсутствие существенного спектра у оператора $N_A + v$ определяется его дифференциальной частью.

1. *Саймон Б.* Модель $P(\varphi)_2$ эвклидовой квантовой теории поля.— М. : Мир, 1976.— 357 с.
2. *Самойленко В. Г.* Об ограниченности оператора умножения относительно оператора вторичного квантования // Докл. АН СССР.— 1985.— 281, № 6.— С. 1316—1320.
3. *Кондратьев Ю. Г.* Операторы вторичного квантования и их возмущения.— Киев, 1982.— 49 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики ; 82.28).
4. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики: В 4-х т.— М.: Мир, 1982.— Т. 4.— 428 с.
5. *Березанский Ю. М.* Самосопряженные операторы в пространствах функций бесконечного числа переменных.— Киев : Наук. думка, 1978.— 360 с.
6. *Рид М.* Функциональный анализ и теория вероятностей // Конструктивная теория поля.— М. : Мир, 1977.— С. 13—47.

Херсон. пед. ин-т

Получено 22.07.85