УДК 513.881

Е. А. Павлов

Об одной теореме вложения пространств вещественной интерполяции

Теоремы вложения играют важную роль в теории интерполяционных пространств (см. [1, 2]), в частности пространств, построенных по K методу. В данной работе приведены некоторые теоремы вложения для банаховых пространств измеримых функций.

Пусть A_0, A_1 — два банаховых пространства измеримых функций, определенных на $(0, \infty)$. Тогда $K_{A_0,A_1}(t, x) \overset{\text{def}}{=} \inf\limits_{x=x_0+x_1} (\| x_0 \|_{A_0} + t \| x_1 \|_{A_1})$, $t > 0$, при фиксированном x есть положительная возрастающая и вогнутая функция, определенная на полуоси $(0, +\infty)$ (см. [2, с. 55]).

Если E — некоторое банахово пространство измеримых функций $f(t)$, $t \in (0, \infty)$, то через $(A_0, A_1)^k_E$ обозначается банахово пространство измеримых функций таких, что $\| x \|_{(A_0,A_1)^k_E} = \| K_{A_0,A_1}(t, x) \|_E$.

Интересно выяснить условия, которым должна удовлетворять пара функциональных пространств E и F, при выполнении которых справедливо вложение $(A_0, A_1)^k_E \subset (A_0, A_1)^k_F$.

В работе [3] это условие сформулировано в терминах интегрального оператора

$$(Lf)(t) = \int\limits_0^\infty \min(1, t/s) f(s)\, ds/s,$$

а именно, если оператор L ограниченно действует из E в F, то справедливо вложение $(A_0, A_1)^k_E \subset (A_0, A_1)^k_F$.

При формулировке теорем вложения более удобно достаточные условия давать в терминах характеристик самих пространств E и F. Решению этого вопроса и посвящена настоящая статья, дополняющая [3]. Обозначим через $E((0, \infty); dt/t)$ банахово пространство функций, определенных на $(0, \infty)$ и измеримых по мере Хаара, $E^1((0, \infty); dt/t)$ — двойственное (дуальное) к пространству $E((0, \infty); dt/t)$. Функция $\mathrm{X}_e(t)$ определяется равенством

$$\mathrm{X}_e(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t \notin e; \\ 1, & \text{если } t \in e. \end{cases}$$

Оператор подобного растяжения σ_t задается равенством $\sigma_t x(s) = x(s/t)$.

Теорема 1. *Пусть максимальное идеальное пространство* $E((0, \infty); dt/t)$ *таково, что*

1) $\sigma_t : E \to E$;
2) $\chi_{[0,1]}(t) + 1/t\chi_{[1,\infty)}(t) \in E^1((0, \infty); dt/t)$;
3) $\| \sigma_{1/t} \|_E ((0, \infty); dt/t) \in F((0, \infty); dt/t)$.

Тогда справедливо вложение $(A_0, A_1)^k_E \subset (A_0, A_1)^k_F$.

Доказательство. Пусть

$$(Lf)(t) = \int_0^\infty \min(1, t/s) f(s)\, ds/s = \int_0^t f(s)\, ds/s + \int_t^\infty t/s f(s)\, ds/s.$$

Сделаем замену переменной $s = t\tau$. Имеем

$$(Lf)(t) = \int_0^1 f(t\tau)\, d\tau/\tau + \int_1^\infty f(t\tau)\, d\tau/\tau^2. \tag{1}$$

Рассмотрим два вспомогательных оператора

$$(L_1 f)(t) = \int_0^1 f(t\tau)\, d\tau/\tau;\ (L_2 f)(t) = \int_1^\infty f(t\tau)\, d\tau/\tau^2.$$

Для оператора L_1 получаем

$$(L_1 f)(t) = \int_0^\infty f(t\tau)\chi_{[0,1]}(\tau)\, d\tau/\tau \leqslant$$

$$\leqslant \| \sigma_{1/t} \|_{E((0,\infty);dt/t)} \| f \|_{E((0,\infty);dt/t)} \| \chi_{[0,1]} \|_{E^1((0,\infty);dt/t)} =$$

$$= C_1 \| \sigma_{1/t} \|_{E((0,\infty);dt/t)} \| f \|_{E((0,\infty);dt/t)} \tag{2}$$

для оператора L_2 —

$$(L_2 f)(t) = \int_0^\infty f(t\tau)\chi_{[1,\infty)}(\tau)\, 1/\tau d\tau/\tau \leqslant$$

$$\leqslant \| \sigma_{1/t} \|_{E((0,\infty);dt/t)} \| f \|_{E((0,\infty);dt/t)} \| \chi_{[1,\infty)}(\tau)\, 1/\tau \|_{E^1} =$$

$$= C_2 \| \sigma_{1/t} \|_{E((0,\infty);dt/t)} \| f \|_{E((0,\infty);dt/t)}. \tag{3}$$

Из соотношений (1) — (3), используя обобщенное неравенство Гельдера [1] и условие 2 теоремы 1, находим

$$\| Lf \|_F = \left\| \int_0^1 f(t\tau)\, d\tau/\tau + \int_1^\infty f(t\tau)\, d\tau/\tau^2 \right\|_F \leqslant \left\| \int_0^1 f(t\tau)\, d\tau/\tau \right\|_F +$$

$$+ \left\| \int_1^\infty f(t\tau)\, d\tau/\tau^2 \right\|_F \leqslant C_1 \| \| \sigma_{1/t} \|_E \|_F \| f \|_E + C_2 \| \| \sigma_{1/t} \|_E \|_F \| f \|_E \leqslant$$

$$\leqslant C \| \| \sigma_{1/t} \|_E \|_F \| f \|_E. \tag{4}$$

Теперь достаточно воспользоваться теоремой 1 из [3]. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть $p \leqslant q$. Тогда оператор*

$$T_g f(t) = \int_0^\infty g(t/s) f(s)\, ds/s \tag{5}$$

ограниченно действует из $\mathscr{L}_{p,*} \times \mathscr{L}_{r,*}$ в $\mathscr{L}_{(q,p),*}$.

Доказательство. Получаем

$$| T_g f(t) | \leqslant \| g(t/s) \|_G \| f \|_{G^1} \leqslant C \| g \|_G \| f \|_{G^1}, \tag{6}$$

где G — интерполяционное между $\mathscr{L}_{1,*}$ и $\mathscr{L}_{\infty,*}$ пространство [1]. Аналогично с помощью неравенства Минковского имеем

$$\| T_g f(t) \|_G \leqslant \int_0^\infty \| g(t/s) \|_G | f(s) |\, ds/s \leqslant C \| g \|_G \| f \|_{\mathscr{L}_{1,*}}. \tag{7}$$

Итак, при фиксированном $g \in G$

$$T_g : G^1 \to \mathscr{L}_{\infty,*},\ T_g : \mathscr{L}_{1,*} \to G. \tag{8}$$

Далее, применяя теорему 8.2 из [1], несложно показать, что оператор T_g с фиксированным ядром $g \in G$ (в качестве E_G можно взять пространство Марцинкевича с соответствующей фундаментальной функцией) ограниченно действует из $\mathscr{L}_{p,*}$ в $\mathscr{L}_{(q,p),*}$, где

$$\| z \|_{\mathscr{L}(q,p),*} \stackrel{\text{def}}{=} \| t^{1/q-1/p} [z(e^t)]^{**} \|_{\mathscr{L}p((0,\infty);dt)} =$$

$$= \Big(\int_0^\infty [[z(e^t)]^{**} t^{1/q}]^p \, dt/t \Big)^{1/p} \geqslant C \Big(\int_{-\infty}^\infty | z(e^t)|^q \, dt \Big)^{1/q} =$$

$$= C \Big(\int_0^\infty | z(t)|^q \, dt/t \Big)^{1/q} = C \| z \|_{\mathscr{L}q,*}. \qquad (9)$$

Неравенство (5) означает вложение

$$\mathscr{L}_{(q,p),*} \subset \mathscr{L}_{q,*}. \qquad (10)$$

Учитывая ограниченность T_g из $\mathscr{L}_{p,*}$ в $\mathscr{L}_{(q,p),*}$, получаем

$$\| t^{-\theta} (Lf)(t) \|_{\mathscr{L}(q,p),*} \leqslant C \| t^{-\theta} \min(1, t) \|_{\mathscr{L}r,*} \| t^{-\theta} f(t) \|_{\mathscr{L}p,*}. \qquad (11)$$

Итак, оператор L ограниченно действует из $\mathscr{L}_{p,*}(t^{-\theta})$ в $\mathscr{L}_{(q,p),*}(t^{-\theta})$. Теорема доказана.

Следствие 1. *Справедливо вложение*

$$(A_0, A_1)_{\theta,p,*} \subset (A_0, A_1)_{\theta,(q,p),*} \subset (A_0, A_1)_{\theta,q,*}. \qquad (12)$$

Замечание 1. Через $\mathscr{L}_{p,*}$ обозначено пространство $\mathscr{L}_p((0, \infty); dt/t)$ [1].

Замечание 2. Утверждение следствия 2 более сильное, чем теорема Лионса и Петре о вложении $(A_0, A_1)_{\theta,p} \subset (A_0, A_1)_{\theta,q}$ (см. [1, 3]).

Теорема 3. *Пусть симметричное пространство $E((0, \infty); dt)$ таково, что выполняется неравенство $\| \sigma_{1/t} \|_E \| \sigma_t \|_E \leqslant C < \infty$. Тогда справедливо вложение*

$$\Lambda_{\|\sigma_t\|_E} \subset E \subset M_{\|\sigma_t\|_E}. \qquad (13)$$

Доказательство. Учитывая неравенство $\| \sigma_t \|_E \geqslant \varphi_E(t)$, получаем

$$\Lambda_{\|\sigma_t\|_E} \subset \Lambda_{\varphi_E(t)} \subset E. \qquad (14)$$

Далее имеем

$$\sup_{0 \leqslant t \leqslant a} \| \sigma_t \|_E \frac{1}{t} \int_0^t x^*(s) \, ds = \sup_{0 \leqslant t \leqslant a} \| \sigma_t \|_E \int_0^1 x^*(st) \, ds \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{0 \leqslant t \leqslant a} \| \sigma_t \|_E \| x^*(st) \|_E \| \chi_{[0,1]}(s) \|_{E^1} \leqslant \qquad (15)$$

$$\leqslant C \sup_{0 \leqslant t \leqslant a} \| \sigma_t \|_E \| \sigma_{1/t} \|_E \| x \|_E \leqslant C_1 \| x \|_E.$$

Итак, справедливо вложение

$$E \subset M_{\|\sigma_t\|_E}. \qquad (16)$$

Теорема доказана.

Замечание 3. Доказанная теорема полезна при использовании интерполяционных теорем, в которых условия на фундаментальные функции заменены условиями на операторы растяжения [1].

Следствие 2. *Если E — интерполяционное между $\mathscr{L}_1((0, a); dt)$ и $\mathscr{L}_\infty((0, a); dt)$ пространство типа α, то справедливо вложение*

$$\Lambda_{\|\sigma_t\|_E} \subset E \subset M_{\|\sigma_t\|_E}.$$

Доказательство. Вложение $\Lambda_{\|\sigma_t\|_E} \subset E$ справедливо, так как в силу интерполяционности E пространство E симметрично [1] и, следовательно, в E ограниченно действует оператор σ_t. Теперь достаточно воспользоваться теоремой 3.

Покажем справедливость вложения $E \subset M_{\|\sigma_t\|_E}$. Так как E — интерполяционное пространство типа α, то справедливо равенство [1] $\| \sigma_t \|_E = t^{\alpha}$. Следовательно, $\| \sigma_{1/t} \|_E \| \sigma_t \|_E = 1$.

1. *Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов.— М.: Наука, 1978.— 400 с.
2. *Берг И., Лефстрем Й.* Интерполяционные пространства.— М. : Мир, 1980.— 264 с.
3. *Берколайко М. З., Дмитриев В. И.* Несколько замечаний о вложениях пространств вещественной интерполяции // Укр. мат. журн.— 1981.— **33**, № 5.— С. 89—95.
4. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ.— М. : Наука, 1977.— 700 с.
5. *Павлов Е. А.* Об операторах, инвариантных относительно сдвига в симметричных пространствах // Сиб. мат. журн.— 1977.— 18, № 1.— С. 112—117.

Ворошиловгр. машиностроит. ин-т

Получено 27.02.83,
после доработки — 24.03.86