УДК 517.58/589

Н. А. Вирченко

О некоторых применениях обобщенных присоединенных функций Лежандра

В связи с интенсивным развитием вычислительной математики, усовершенствованием ЭВМ особое распространение получили функции Бесселя, Лежандра, Матье и др. Интересные обобщения функций Лежандра даны в работах [1, 2]. Например, в [2] рассмотрены функции $P_k^{m,n}(z)$, $Q_k^{m,n}(z)$ как линейно независимые решения дифференциального уравнения

$$(1-z^2)\frac{d^2u}{dz^2}-2z\frac{du}{dz}+\left[k(k+1)-\frac{m^2}{2(1-z)}-\frac{n^2}{2(1+z)}\right]u=0, \quad (1)$$

где параметры k, m, n в общем случае принимают комплексные значения.

Настоящая статья посвящена дальнейшему изучению свойств обобщенной присоединенной функции Лежандра I-го рода $P_k^{m,n}(z)$, приложению ее к решению краевых задач в специальных системах ортогональных криволинейных координат — эллипсоидальных, тороидальных, биполярных и др. Указаны примеры вычисления некоторых определенных интегралов со специальными функциями.

1. Рассмотрим функцию $P_k^{m,n}(z)$ в комплексной плоскости с разрезом вдоль вещественной оси от 1 до $-\infty$. Известны выражения для $P_k^{m,n}(z)$ в виде контурного интеграла [2]. Например, для всех k, m, n, кроме тех, для которых $k+(m+n)/2$ — отрицательные целые числа, $k-(m-n)/2$ — целые, функцию $f(z)$ можно представить в виде

$$P_k^{m,n}(z)=\frac{e^{-\pi i(k-(m-n/2))}\Gamma(k+(m+n)/2+1)(z-1)^{m/2}(z+1)^{n/2}}{4\pi\sin(k-(m-n)/2)\,\pi\Gamma(k-(m-n)/2+1)\,2^{k+(m-n)/2}}\times$$

$$\times\oint_C^{(z+,1+,z-,1-)}F(t)\,dt, \quad (2)$$

где $F(t)=(t-1)^{k-(m-n)/2}(t+1)^{k+(m-n)/2}(t-z)^{-k-(m+n)/2-1}$, C — замкнутый контур в t-плоскости, окружающий z, с обходом против часовой стрелки, не содержащий точек $t=1$, $t=-1$, причем взяты главные значения $\arg(t-1)$ и $\arg(t+1)$. Интеграл в (2) записан в обозначениях Похгаммера.

Для $|z-1|<2$ и любых k, m, n, кроме положительного целого m, $P_k^{m,n}(z)$ легко выражается через гипергеометрическую функцию

$$P_k^{m,n}(z)=\frac{(z+1)^{n/2}}{\Gamma(1-m)(z-1)^{m/2}}\,{}_2F_1(k-(m-n)/2+1,-k-(m-n)/2;$$

$$1-m;\ (1-z)/2). \quad (3)$$

Отметим, что обобщенные функции Лежандра $P_k^{m,n}(z)$ допускают различные представления с помощью контурных определенных интегралов. Для практических целей наибольший интерес представляют интегральные представления с помощью интегралов по отрезку вещественной оси.

Для расширения возможностей применения функции $P_k^{m,n}(z)$ при решении смешанных краевых задач математической физики, теории упругости, теории теплопроводности и др. установим ряд новых интегральных свойств этой функции.

Лемма 1. *Если* $\operatorname{Re}(1/2-m)>0$, $k+(m+n)/2\neq-1,-2,\ldots$; $k-(m-n)/2$ — *нецелое*, $m\neq1,2,\ldots$, $z=\operatorname{ch}\alpha$, *то справедлива формула*

$$P_k^{m,n}(\operatorname{ch}\alpha)=\frac{2^{(n-m+1)/2}\operatorname{sh}^m\alpha}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(1/2-m)}\int_0^\alpha\frac{\operatorname{ch}(k+1/2)t}{(\operatorname{ch}\alpha-\operatorname{ch}t)^{m+1/2}}\,{}_2F_1(n-m)/2,-(m+n)/2;$$

$$1/2-m;\ (\operatorname{ch}\alpha-\operatorname{ch}t)/(1+\operatorname{ch}\alpha))\,dt, \quad (4)$$

где ${}_2F_1(a,b;c;x)$ — *гипергеометрическая функция Гаусса.*

Заметим, что из (4) при $m=n=\mu$, $k=\nu$ следует известная формула для функции Лежандра $P_\nu^\mu(z)$ [3] (гл. 3, п. 3. 7, формула (8)). Справедливость формулы (4) легко следует из свойств гипергеометрической функции ${}_2F_1$ [3] и формулы (3).

Учитывая четность подынтегральной функции относительно $\operatorname{ch}\alpha$ в (4), представим формулу (4) в виде

$$P_k^{m,n}(\operatorname{ch}\alpha) = \frac{2^{(n-m-1)/2}\operatorname{sh}^m\alpha}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(1/2-m)}\int\limits_{-\alpha}^{\alpha}\frac{e^{-(k+1/2)t}}{(\operatorname{ch}\alpha-\operatorname{ch}t)^{m+1/2}}\,{}_2F_1((n-m)/2,$$

$$-(m+n)/2;\ 1/2-m;\ (\operatorname{ch}\alpha-\operatorname{ch}t)/(1+\operatorname{ch}\alpha))\,dt.$$

Осуществив замену $e^t = \operatorname{ch}\alpha + \operatorname{sh}\alpha\cos\omega$, после несложных выкладок приходим к интегральному представлению для обобщенной присоединенной функции Лежандра I-го рода:

$$P_k^{m,n}(\operatorname{ch}\alpha) = \frac{2^{(n+m)/2}\operatorname{sh}^{-m}\alpha}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(1/2-m)}\int\limits_0^{\pi}\sin^{-2m}\omega\,(\operatorname{ch}\alpha+\operatorname{sh}\alpha\cos\omega)^{k+m}\times$$

$$\times\,{}_2F_1((n-m)/2,\ -(m+n)/2;\ 1/2-m;\ A)\,d\omega, \tag{5}$$

где

$$A = \operatorname{sh}^2\alpha\sin^2\omega\,[2(\operatorname{ch}\alpha+\operatorname{sh}\alpha\cos\omega)(1+\operatorname{ch}\alpha)]^{-1}. \tag{6}$$

Как частный случай (при $n=m$) из (5) получается формула (7) [3] (гл. 3, п. 3. 7), а при $n=m=0$ — формула (7.4.3) из [4] (гл. VII, § 7.4).

Лемма 2. *Если* $|\operatorname{Re} m| < 1/2$, $\operatorname{Re}(-k-(m+n)/2) > 0$, $\operatorname{Re}(1+k-(3m-n)/2) > 0$; $\operatorname{Re}(k+(m+n)/2)$ *и* m — *нецелые*, $z=\operatorname{ch}\alpha$, *то справедлива формула*

$$P_k^{m,n}(\operatorname{ch}\alpha) = \frac{\sqrt{2\pi}\operatorname{sh}^{-m}\alpha\cdot(\operatorname{ch}\alpha+1)^{(m-n)/2}\sec\pi(k+(n-m)/2)}{2^{m-n}\Gamma(1/2+m)\,\Gamma(1+k-(3m-n)/2)\,\Gamma(-k-(m+n)/2)}\times$$

$$\times\int\limits_{\alpha}^{\infty}\frac{\operatorname{sh}(k+(n-m+1)/2)\,t}{(\operatorname{ch}t-\operatorname{ch}\alpha)^{1/2-m}}\,{}_2F_1(n-m,\ 1/2-m;\ 1+k-(3m-n)/2;$$

$$(1-\operatorname{ch}\alpha)/(\operatorname{ch}t-\operatorname{ch}\alpha))\,dt. \tag{7}$$

Справедливость леммы вытекает из учета связи $P_k^{m,n}(z)$ с функциями ${}_2F_1$ и $P_k^m(z)$ [2], основных свойств гамма-функции $\Gamma(z)$. Как частный случай (при $m=n=\mu$) из формулы (7) получаем известное интегральное представление для $P^{\mu}_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)$ [5]. Из (3) и свойств гипергеометрической функции ${}_2F_1$ [3] следуют асимптотические формулы

$$P^{m,n}_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha) = O(1)\ \text{при}\ \tau\to 0+, \tag{8}$$

$$P^{m,n}_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha) = \frac{2^{n-m}}{\sqrt{2\pi\operatorname{sh}\alpha}}(i\tau)^{m-1/2}[e^{i\tau\alpha}+ie^{-i(m\pi+\tau\alpha)}+O(\alpha^{-1})]$$

$$\text{при}\ \tau\to+\infty. \tag{9}$$

Для дальнейшего нам потребуется обобщенное интегральное преобразование Мелера—Фока [6]:

$$F(\tau) = \int\limits_1^{\infty} f(z)\,P^{m,n}_{-1/2+i\tau}(z)\,dz, \tag{10}$$

$$f(z) = \int\limits_0^{\infty}\omega(\tau)\,F(\tau)\,P^{m,n}_{-1/2+i\tau}(z)\,d\tau, \tag{11}$$

где

$$\omega(\tau) = \frac{2^{m-n-2}\Gamma((1-m+n)/2+i\tau)\,\Gamma(1-m+n)/2-i\tau)\Gamma((1-m-n)/2+i\tau)}{\pi\Gamma(2i\tau)\,\Gamma(-2i\tau)\,\Gamma^{-1}((1-m-n)/2-i\tau)},$$

$$|\operatorname{Re} n| < 1-\operatorname{Re} m,\quad f(z)\in L(0,1),\quad f(z)\,z^{m-1/2}\in L(1,\infty). \tag{12}$$

Легко показать, что $F(\tau)$, определяемая формулой (10), — непрерывная функция. Действительно, оценим разность

$$F(\tau+h)-F(\tau)=\int_1^\infty f(z)\left[P^{m,n}_{-1/2+i(\tau+h)}(z)-P^{m,n}_{-1/2+i\tau}(z)\right]dz=\int_1^\beta+\int_\beta^\infty=I_1+I_2. \tag{13}$$

Учитывая оценку

$$\left|P^{m,n}_{-1/2+i\tau}(z)\right|\leqslant P^{m,n}_{-1/2}(z),\quad (\operatorname{Re} m<1/2), \tag{14}$$

вытекающую из (4), а также условия, наложенные на функцию $f(z)$, замечаем, что всегда можно выбрать такое большое $\beta=\beta(\varepsilon)$, что $\forall\varepsilon>0$ будет $|I_2|<\varepsilon/2$. Зафиксировав β, можно указать такое малое $|h|=h(\varepsilon)$, что с учетом (4) $\forall|h|<h(\varepsilon)$ будет $|I_1|<\varepsilon/2$.

Вычисление образов для функции $f(z)$ с помощью формулы (10) во многих случаях сводится к выполнению соответствующего cos-преобразования Фурье. Действительно, используя (10), (4), имеем

$$F(\tau)=\int_1^\infty f(z)\,P^{m,n}_{-1/2+i\tau}(z)\,dz=\int_0^\infty f(\operatorname{ch}\alpha)\,P^{m,n}_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)\operatorname{sh}\alpha\,d\alpha=$$

$$=\int_0^\infty f(\operatorname{ch}\alpha)\operatorname{sh}\alpha\,d\alpha\,\frac{2^{(n-m+1)/2}\operatorname{sh}^m\alpha}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(1/2-m)}\int_0^\alpha\frac{\cos\tau t}{(\operatorname{ch}\alpha-\operatorname{ch}t)^{m+1/2}}\times$$

$$\times\,{}_2F_1\,(n-m)/2,\;-(m+n)/2;\;1/2-m;\;(\operatorname{ch}\alpha-\operatorname{ch}t)/(1+\operatorname{ch}\alpha))\,dt=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty\cos\tau t\,dt\int_{\operatorname{ch}t}^\infty\frac{2^{(n-m)/2}(z^2-1)^{m/2}f(z)}{(z-\operatorname{ch}t)^{m+1/2}}\,{}_2F_1\,((n-m)/2,\;-(m+n)/2;$$

$$1/2-m;\;(z-\operatorname{ch}t)/(1+z))\,dz,$$

где изменение порядка интегрирования законно ввиду абсолютной сходимости двойного интеграла, следующей из оценки (14) и условий для функции $f(z)$.

Равенство Парсеваля для обобщенного преобразования Мелера—Фока с ядром $P^{m,n}_{-1/2+i\tau}(z)$ имеет вид

$$\int_0^\infty\omega(\tau)\,F(\tau)\,G(\tau)\,d\tau=\int_1^\infty f(z)\,g(z)\,dz, \tag{15}$$

где $F(\tau)$ и $G(\tau)$ — преобразования (10) соответственно для функций $f(z)$ и $g(z)$. Доказательство справедливости равенства (15) тривиально.

2. Рассмотрим некоторые применения обобщенных функций Лежандра I-го рода $P^{m,n}_k(z)$ к решению краевых задач математической физики, теории теплопроводности, теории фильтрации и др.

Остановимся на некоторых системах ортогональных криволинейных координат.

В случае вытянутого эллипсоида вращения система вырожденных эллипсоидальных координат имеет вид [7]

$$x=c\operatorname{sh}\alpha\sin\beta\cos\varphi,\quad y=c\operatorname{sh}\alpha\sin\beta\sin\varphi,\quad z=c\operatorname{ch}\alpha\cos\beta, \tag{16}$$

где c — масштабный множитель, $0\leqslant\alpha<\infty$, $0\leqslant\beta\leqslant\pi$, $-\pi<\varphi\leqslant\pi$, коэффициенты Лямэ: $H_\alpha=H_\beta=c(\operatorname{sh}^2\alpha+\sin^2\beta)^{1/2}$, $H_\varphi=c\operatorname{sh}\alpha\sin\beta$. Рассмотрим в этих координатах следующее уравнение:

$$\frac{1}{\operatorname{sh}\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\operatorname{sh}\alpha\frac{\partial u}{\partial\alpha}\right)+\frac{1}{\sin\beta}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\sin\beta\frac{\partial u}{\partial\beta}\right)+\left(\frac{1}{\operatorname{sh}^2\alpha}+\frac{1}{\sin^2\beta}\right)\times$$

$$\times\frac{\partial^2u}{\partial\varphi^2}-\left(\frac{\cos\beta}{\sin^2\beta}+\frac{\operatorname{ch}\alpha}{\operatorname{sh}^2\alpha}\right)\frac{\partial u}{\partial t}=0. \tag{17}$$

Покажем, что частные решения этого уравнения выражаются через обобщенные функции Лежандра.

В самом деле, будем искать частные решения в форме

$$u = A(\alpha) B(\beta) \Phi(\varphi) T(t). \tag{18}$$

Разделим переменные

$$\left\{\left[\frac{1}{A\,\mathrm{sh}\,\alpha}\frac{d}{d\alpha}\left(\mathrm{sh}\,\alpha\frac{dA}{d\alpha}\right)-\frac{\mathrm{ch}\,\alpha}{\mathrm{sh}^2\alpha}\frac{1}{T}\frac{dT}{dt}\right]+\left[\frac{1}{B\sin\beta}\frac{d}{d\beta}\left(\sin\beta\frac{dB}{d\beta}\right)-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{\cos\beta}{\sin^2\beta}\frac{1}{T}\frac{dT}{dt}\right]\right\}\left(\frac{1}{\mathrm{sh}^2\alpha}+\frac{1}{\sin^2\beta}\right)=-\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}. \tag{19}$$

Равенство (19) возможно лишь при условии, что обе стороны этого соотношения равны одной и той же постоянной. Обозначим эту постоянную через $\mu^2 = (m^2 + n^2)/2$, затем отделим переменную t, введя постоянную $(m^2 - n^2)/2$. Окончательно для определения множителей в (18) получим следующие обыкновенные дифференциальные уравнения:

$$d^2\Phi/d\varphi^2 + (m^2 + n^2)/2\Phi = 0, \tag{20}$$

$$\frac{1}{\mathrm{sh}\,\alpha}\frac{d}{d\alpha}\left(\mathrm{sh}\,\alpha\frac{dA}{d\alpha}\right)-\left[k(k+1)-\frac{m^2}{2(1-\mathrm{ch}\,\alpha)}-\frac{n^2}{2(1+\mathrm{ch}\,\alpha)}\right]A=0, \tag{21}$$

$$\frac{1}{\sin\beta}\frac{d}{d\beta}\left(\sin\beta\frac{dB}{d\beta}\right)+\left[k(k+1)-\frac{m^2}{2(1-\cos\beta)}-\frac{n^2}{2(1+\cos\beta)}\right]B=0, \tag{22}$$

$$\frac{dT}{dt}+\frac{n^2-m^2}{2}T=0. \tag{23}$$

Выбор параметров k, m, n диктуется конкретными условиями краевой задачи. Решениями уравнений (21) и (22) будут соответственно совокупности обобщенных функций Лежандра I-го и II-го рода $P_k^{m,n}(\mathrm{ch}\,\alpha)$, $Q_k^{m,n}(\mathrm{ch}\,\alpha)$ и $P_k^{m,n}(\cos\beta)$, $Q_k^{m,n}(\cos\beta)$.

В случае тороидальных координат (α, β, φ)

$$x=\frac{c\,\mathrm{ch}\,\alpha\cos\varphi}{\mathrm{ch}\,\alpha-\cos\beta},\quad y=\frac{c\,\mathrm{sh}\,\alpha\sin\varphi}{\mathrm{ch}\,\alpha-\cos\beta},\quad z=\frac{c\sin\beta}{\mathrm{ch}\,\alpha-\cos\beta}, \tag{24}$$

где c — масштабный множитель, $0\leqslant\alpha<\infty$, $-\pi<\beta\leqslant\pi$, $-\pi<\varphi\leqslant\pi$, укажем следующее уравнение, приводящее к обобщенным функциям Лежандра:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\mathrm{sh}\,\alpha}{\mathrm{ch}\,\alpha-\cos\beta}\frac{\partial u}{\partial\alpha}\right)+\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\mathrm{sh}\,\alpha}{\mathrm{ch}\,\alpha-\cos\beta}\frac{\partial u}{\partial\beta}\right)+$$
$$+\frac{1}{(\mathrm{ch}\,\alpha-\cos\beta)\,\mathrm{sh}\,\alpha}\frac{\partial^2u}{\partial\varphi^2}-\frac{\mathrm{ch}\,\alpha}{(\mathrm{ch}\,\alpha-\cos\beta)\,\mathrm{sh}\,\alpha}\frac{\partial u}{\partial t}=0. \tag{25}$$

В этом уравнении нельзя непосредственно разделить переменные. Однако после выполнения замены

$$u=\sqrt{2(\mathrm{ch}\,\alpha-\cos\beta)}\,v \tag{26}$$

получим уравнение

$$\frac{\partial^2v}{\partial\alpha^2}+\frac{\partial^2v}{\partial\beta^2}+\mathrm{cth}\,\alpha\frac{\partial v}{\partial\alpha}+\frac{1}{4}v+\frac{1}{\mathrm{sh}^2\alpha}\frac{\partial^2v}{\partial\varphi^2}-\frac{\mathrm{ch}\,\alpha}{\mathrm{sh}^2\alpha}\frac{\partial v}{\partial t}=0, \tag{27}$$

в котором можно осуществить разделение переменных. Полагая в (27) $v = A(\alpha) B(\beta) \Phi(\varphi) T(t)$, после преобразований получаем, например, для определения множителя $A(\alpha)$ следующее уравнение:

$$\frac{1}{\operatorname{sh}\alpha}\frac{d}{d\alpha}\left(\operatorname{sh}\alpha\frac{dA}{d\alpha}\right)-\left[k(k+1)-\frac{1}{4}-\frac{m^2}{2(1-\operatorname{ch}\alpha)}-\frac{n^2}{2(1+\operatorname{ch}\alpha)}\right]A=0, \tag{28}$$

частными решениями которого являются функции $P_k^{m,n}(\operatorname{ch}\alpha)$, $Q_k^{m,n}(\operatorname{ch}\alpha)$.

В пространственных биполярных координатах (α, β, φ)

$$x=\frac{c\sin\alpha\cos\varphi}{\operatorname{ch}\beta-\cos\alpha},\quad y=\frac{c\sin\alpha\sin\varphi}{\operatorname{ch}\beta-\cos\alpha},\quad z=\frac{c\operatorname{sh}\beta}{\operatorname{ch}\beta-\cos\alpha}, \tag{29}$$

где c — масштабный множитель, $0\leqslant\alpha\leqslant\pi$, $-\infty<\beta<\infty$, $-\pi<\varphi\leqslant\pi$, можно указать следующее уравнение, приводящее к обобщенным функциям Лежандра:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\sin\alpha}{\operatorname{ch}\beta-\cos\alpha}\frac{\partial u}{\partial\alpha}\right)+\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\sin\alpha}{\operatorname{ch}\beta-\cos\alpha}\frac{\partial u}{\partial\beta}\right)+$$

$$+\frac{1}{\sin\alpha(\operatorname{ch}\beta-\cos\alpha)}\frac{\partial^2u}{\partial\varphi^2}-\frac{\operatorname{ch}\alpha}{\sin\alpha(\operatorname{ch}\beta-\cos\alpha)}\frac{\partial u}{\partial t}=0. \tag{30}$$

После замены $u=\sqrt{2(\operatorname{ch}\beta-\cos\alpha)}\,v$ и разделения переменных получим, например, для множителя $A(\alpha)$ уравнение

$$\frac{1}{\sin\alpha}\frac{d}{d\alpha}\left(\sin\alpha\frac{dA}{d\alpha}\right)+\left[k(k+1)-\frac{m^2}{2(1-\cos\alpha)}-\frac{n^2}{2(1+\cos\alpha)}\right]A=0, \tag{31}$$

дающее функции $P_k^{m,n}(\cos\alpha)$, $Q_k^{m,n}(\cos\alpha)$.

Укажем и другие типы уравнений, приводящие к обобщенным функциям Лежандра, например

$$\Delta u+\frac{z}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\frac{\partial u}{\partial t}=0, \tag{32}$$

$$\Delta u-\frac{\operatorname{ch}\alpha}{\operatorname{sh}^2\alpha}\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=0, \tag{33}$$

$$\Delta u-\frac{\operatorname{ch}\alpha}{\operatorname{sh}^2\alpha}\frac{\partial u}{\partial t}+\rho^2u=0. \tag{34}$$

Для уравнения (34) в сферических координатах частные решения выражаются через функции $P_k^{m,n}(\cos\theta)$, $Q_k^{m,n}(\cos\theta)$, $J_{k+1/2}(\rho r)$, $H_{k+1/2}^{(2)}(\rho r)$, где $J_{k+1/2}(\rho r)$ — функция Бесселля I-го рода, $H_{k+1/2}^{(2)}(\rho r)$ — функция Ханкеля II-го рода. С помощью суперпозиции частных решений можно получать решения ряда важных задач математической физики (см., например, [8]).

3. При решении смешанных краевых задач для указанных выше уравнений, когда тип граничных условий меняется в пределах одной и той же координатной поверхности, часто возникают парные (тройные) интегральные уравнения с обобщенными функциями Лежандра. Парным интегральным уравнениям с тригонометрическими функциями, с функциями Бесселя в ядре посвящена многочисленная литература (см. библиографию в [9, 10]).

Рассмотрим следующие парные интегральные уравнения:

$$\int_0^\infty f(\tau)P_{-1/2+i\tau}^{m,n}(\operatorname{ch}\alpha)\,d\tau=\varphi_1(\alpha),\quad 0<\alpha<a, \tag{35}$$

$$\int_0^\infty \omega(\tau)f(\tau)P_{-1/2+i\tau}^{m,n}(\operatorname{ch}\alpha)\,d\tau=\varphi_2(\alpha),\quad \alpha>a, \tag{36}$$

где $f(\tau)$ — искомая функция, причем $f(\tau) = O(\tau^{\delta})$ при $\tau \to 0$, $f(\tau) = O(\tau^{-m-\varepsilon-1/2})$ при $\tau \to \infty$, $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$, $\omega(\tau)$ имеет вид (12).

Теорема. *Если* $|\operatorname{Re} m| < 1/2$; n, m *удовлетворяют условиям существования Г-функций, входящих в* (12), $\varphi_i(\alpha)$, $i = 1, 2,$ — *заданные функции, причем* $\varphi_1(\alpha) = O((a-\alpha)^{-m-1/2+\beta})$ *при* $\alpha \to a$, $\varphi_1(\alpha) = O(\alpha^{m+\mu-2})$ *при* $\alpha \to 0$, $\beta > 0$, $\mu > 0$, $\varphi_2(\alpha) = O((\alpha - a)^{-1/2-m+\gamma})$ *при* $\alpha \to a$, $\gamma > 0$, *то решение парных интегральных уравнений существует и однозначно представимо в виде*

$$f(\tau) = f_1(\tau) + f_2(\tau), \tag{37}$$

где

$$f_1(\tau) = \frac{2^{(m-n+1)/2}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(1/2+m)} \Big[\cos\tau a\cdot(\operatorname{ch} a + 1)^{(n-m)/2} \int_0^a (\operatorname{ch} a - \operatorname{ch}\alpha)^{m-1/2} \times$$

$$\times (\operatorname{ch}\alpha + 1)^{(m-n)/2}\, {}_2F_1((m-n)/2,\ (1+m-n)/2;\ 1/2+m;$$

$$(\operatorname{ch} a - \operatorname{ch}\alpha)/(1+\operatorname{ch} a))\operatorname{sh}^{1-m}\alpha\cdot\varphi_1(\alpha)\,d\alpha + \tau\int_0^a \sin\tau t\cdot(\operatorname{ch} t + 1)^{(n-m)/2} \times$$

$$\times dt\int_0^t (\operatorname{ch} t - \operatorname{ch}\alpha)^{m-1/2}(\operatorname{ch}\alpha + 1)^{(m-n)/2}\, {}_2F_1((m-n)/2,\ (1-n+m)/2;$$

$$1/2+m;\ (\operatorname{ch} t - \operatorname{ch}\alpha)/(1+\operatorname{ch} t))\operatorname{sh}^{1-m}\alpha\cdot\varphi_1(\alpha)\,d\alpha\Big], \tag{38}$$

$$f_2(\tau) = a_1(\tau) + a_2(\tau), \tag{39}$$

$$a_1(\tau) = \int_a^\infty \varphi_2(\alpha)\, P^{m,n}_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)\operatorname{sh}\alpha\, d\alpha. \tag{40}$$

Функция $a_2(\tau)$ теперь удовлетворяет следующим парным интегральным уравнениям:

$$\begin{gathered}\int_0^\infty a_2(\tau)\, P^{m,n}_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)\, d\tau = \Psi(\alpha), \quad 0 < \alpha < a,\\ \int_0^\infty \omega(\tau)\, a_2(\tau)\, P^{m,n}_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)\, d\tau = 0, \quad \alpha > a,\end{gathered} \tag{41}$$

где $\Psi(\alpha)$ выражена через известную функцию $\varphi_2(\alpha)$. Наконец, $a_2(\tau)$ записываем по формуле, аналогичной (38).

При доказательстве теоремы используем обобщенное интегральное преобразование Мелера—Фока (10), (11), метод доопределения решения парных интегральных уравнений, свойства функции $P^{m,n}_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)$, а также формулы (8), (9).

4. Приведем пример применения свойств обобщенной присоединенной функции Лежандра I-го рода $P^{m,n}_k(z)$ к вычислению некоторых определенных интегралов со специальными функциями.

Пример. Из [1] известно:

$$\int_0^y x^{-1/2}(x+2)^{-1/2}\{[x+2)^{1/2} + x^{1/2}]^{2\nu} + [(x+2)^{1/2} - x^{1/2}]^{2\nu}\}(y-x)^{\mu-1}\,dx =$$

$$= \Gamma(\mu)\, 2^{\mu+1/2}\sqrt{\pi}\,[y(y+2)]^{\mu/2-1/4} P^{1/2-\mu}_{\nu-1/2}(y+1);\ \operatorname{Re}\mu > 0,\ |\arg y| < \pi.$$

Применяя лемму 2, при $\operatorname{Re}(1/2-m) > 0$, нецелых m и $\operatorname{Re}(\nu+m)$ находим значение интеграла

$$\int_1^{\operatorname{ch}\alpha} (t^2-1)^{-1/2}\{[(t+1)^{1/2} + (t-1)^{1/2}]^{2\nu} + [(t+1)^{1/2} - (t-1)^{1/2}]^{2\nu}\} \times$$

$$\times (\operatorname{ch}\alpha - t)^{-m-1/2}{}_2F_1(1/2 - \nu - m,\ n - m;\ 1/2 - m;\ (\operatorname{ch}\alpha - t)/(2(\operatorname{ch}\alpha + 1)))\ dt =$$
$$= 2^{1-n}\operatorname{sh}^{-m}\alpha\cdot(\operatorname{ch}\alpha + 1)^{(n-m)/2}\sqrt{2\pi}\,\Gamma(1/2 - m)\,P^{m,n}_{\nu-1/2+(m-n)/2}(\operatorname{ch}\alpha). \tag{42}$$

1. *Виленкин Н. Я.* Специальные функции и теория представлений.— М. : Наука, 1965.— 588 с.
2. *Kuipers L., Meulenbeld B.* On a generalization of Legendre's associated differential equation // Proc. Kon. ned. akad. Wetensch. A.— 1957.— **60**, N 4.— P. 436—443.
3. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции.— М. : Наука, 1965.— Т. 1.— 296 с.
4. *Лебедев Н. Н.* Специальные функции и их приложения.— М. ; Л. : Физматгиз, 1963.— 358 с.
5. *Tables* of integral transforms / A. Erdelyi, W. Magnus, E. Oberhettinger, F. G. Tricomi.— New York : McGraw-Hill, 1954.— 242 p.
6. *Götze F.* Verallgemeinerung einer Integral-transformation Mehler — Fock durch den von Kuipers und Meulenbeld eingeführten Kern $P^{m,n}_k(z)$ // Proc. Kon. ned. akad. Wetensch. A.— 1965.— **68**, N 4.— P. 396—404.
7. *Гобсон Е. В.* Теория сферических и эллипсоидальных функций.— М. : Изд-во иностр. лит., 1952.— 476 с.
8. *Гринберг Г. А.* Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений.— М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1948.— 727 с.
9. *Попов Г. Я.* Метод парных уравнений // Развитие теории контактных задач в СССР.— М. : Наука, 1976.— С. 56—87.
10. *Уфлянд Я. С.* Метод парных уравнений в задачах математической физики.— Л. : Наука, 1977.— 220 с.
11. *Прудников А. В., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Специальные функции.— М. : Наука, 1983.— 752 с.

Киев. политехн. ин-т

Получено 18.02.86