УДК 513.88+519.4

В. С. Яковлев

О представлениях некоторых коммутативных ядерных $*$-алгебр

В работах [1, 2] получены разложения непрерывных $*$-представлений (неограниченными операторами) ядерных $*$-алгебр в прямой интеграл неприводимых $*$-представлений. В работе [3] приведен пример коммутативной ядерной $*$-алгебры и ее неприводимого $*$-представления бесконечной размерности. Поэтому применение результатов [1, 2] к коммутативным ядерным $*$-алгебрам не дает, вообще говоря, разложение на одномерные представления. В данной работе введен некоторый класс коммутативных ядерных $*$-алгебр. Показано, что все неприводимые сильно непрерывные $*$-представления $*$-алгебр из этого класса одномерны, и с помощью техники, развитой в работах [4—6], получена теорема о разложении произвольного сильно непрерывного $*$-представления $*$-алгебры из этого класса в прямой интеграл $*$-представлений, кратных одномерным $*$-представлениям. Указаны примеры $*$-алгебр из рассмотренного класса.

Пусть имеется ядерное локально-выпуклое сепарабельное пространство $U = \operatorname{prlim}_{\tau\in T} H_\tau$, $U = \bigcap_{\tau\in T} H_\tau$ [4, с. 27]. Пусть, кроме того, в U введены операции умножения и инволюции, превращающие U в коммутативную топологическую $*$-алгебру.

Определение 1. *Элемент $f \in U$ назовем квазианалитическим, если найдется последовательность положительных чисел $(m_n)_{n=1}^{\infty}$, удовлетворяющая условию*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\inf_{k=n,n+1,\ldots} m_k^{1/k} \right)^{-1} = +\infty, \tag{1}$$

такая, что множество $\left\{ \frac{1}{m_n} f^n \in U : n = 1, 2, \ldots \right\}$ ограничено в U.

Пусть U^q обозначает множество квазианалитических элементов алгебры U. В дальнейшем будем рассматривать класс $*$-алгебр U, у которых каждый элемент квазианалитический, т. е. $*$-алгебры U такие, что $U = U^q$ (назовем такие $*$-алгебры ядерными квазианалитическими).

Пусть $L_+(D)$ обозначает множество всех линейных операторов A в сепарабельном гильбертовом пространстве H таких, что: 1) $D(A) = D$ и $AD \subseteq D$; 2) сопряженные операторы A^* удовлетворяют условиям $D(A^*) \supseteq D$ и $A^*D \subseteq D$. Множество $L_+(D)$ представляет собой $*$-алгебру с инволюцией $A \mapsto A^+ = A^* \restriction_D$; $*$-представлением π $*$-алгебры U на плотном линейном подмножестве D гильбертова пространства H называется любой $*$-гомоморфизм $*$-алгебры U в $*$-алгебру $L_+(D)$; π называется сильно непрерывным, если функция $U \ni f \mapsto \pi(f)\xi \in H$ непрерывна для любого $\xi \in D$.

Лемма 1. *Пусть имеется $*$-представление π коммутативной топологической $*$-алгебры U на плотном линейном подмножестве D гильбертова пространства H. Предположим, что $U = U^q$. Тогда любой вектор $e \in D$ такой, что отображение $U \ni g \mapsto \pi(g) e \in H$ непрерывно, является квазианалитическим вектором для любого оператора $\pi(f)$, $f \in U$. Если π сильно непрерывно, то для любого $f = f^*$ оператор $\pi(f)$ существенно самосопряжен на D и для любых $f, g \in U$, $f = f^*$, $g = g^*$ замыкания операторов $\pi(f)$ и $\pi(g)$ коммутируют в смысле разложений единицы.*

Доказательство. Пусть $e \in D$ такой, что $U \ni g \mapsto \pi(g) e \in H$ непрерывно. Так как, согласно утверждению 5.4 [7, с. 41], из ограниченности множества $\left\{ \frac{1}{m_n} f^n \in U : n = 1, 2, \ldots \right\} \subset U$ следует ограниченность множества $\left\{ \pi\left(\frac{1}{m_n} f^n \right) e \in H : n = 1, 2, \ldots \right\} \subset H$, то существует константа $C > 0$ такая, что $\left\| \pi \left(\frac{1}{m_n} f^n \right) e \right\|_H \leqslant C$. Следовательно, $\| \pi (f)^n e \|_H \leqslant C m_n$ и согласно условию (1) вектор $e \in D$ является квазианалитическим для оператора $\pi(f)$. Пусть теперь π сильно непрерывно. Пусть $f \in U$, $f = f^*$. Тогда $\pi(f)$ эрмитов и, поскольку отображение $U \ni g \mapsto \pi(g) \xi \in H$ непрерывно для всех $\xi \in D$, имеет плотное множество квазианалитических векторов. Следовательно, согласно теореме 2 [8, с. 181], $\pi(f)$ существенно самосопряжен на D.

Пусть теперь $f, g \in U$, $f = f^*$, $g = g^*$, а z — некоторое невещественное число. Рассмотрим оператор $\pi(f) \upharpoonright_{((\pi(g) - z \cdot 1_H) D)}$, где 1_H — единичный оператор в H. Поскольку для любого $\eta = (\pi(g) - z \cdot 1_H) \xi$ имеем $\pi(f) \upharpoonright_{((\pi(g) - z \cdot 1_H) D)} \eta = \pi(f)(\pi(g) - z \cdot 1_H) \xi = (\pi(g) - z \cdot 1_H) \pi(f) \xi \in (\pi(g) - z \times \times 1_H) D$, то множество $(\pi(g) - z \cdot 1_H) D$ инвариантно относительно оператора $\pi(f)$ и, следовательно, $(\pi(g) - z \cdot 1_H) D \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} D((\pi(f) \upharpoonright_{((\pi(g) - z \cdot 1_H) D)})^n)$. Так как $(\pi(g) - z \cdot 1_H) D \subseteq D$, то множество $(\pi(g) - z \cdot 1_H) D$ состоит из квазианалитических векторов оператора $\pi(f) \upharpoonright_{((\pi(g) - z \cdot 1_H) D)}$ и, поскольку оператор $\pi(g)$ существенно самосопряжен на D, то оно плотно в H. Таким образом, к паре операторов $\pi(f)$, $\pi(g)$ применима теорема 6.9 [4, с. 273].

Утверждение 1. *Пусть имеется некоторое $*$-представление π ядерной сепарабельной алгебры U на плотном линейном подмножестве D гильбертова пространства H. Пусть e — элемент из D такой, что отображение $U \ni f \mapsto \pi(f) e \in H$ непрерывно. Тогда существуют гильбертово пространство $H_+^e \subseteq H$ и линейное топологическое сепарабельное пространство $D_0^e \subseteq D$, такие, что вложение $D_0^e \subseteq H_+^e$ плотно и топологично, вложение $H_+^e \subseteq H$ квазиядерно, e принадлежит пространству D_0^e, сопряженное к D_0^e пространство $D_0^{e\prime}$ сепарабельно относительно слабой топологии, а для операторов представления выполнены условия:*

1) $\pi(f): D_0^e \mapsto D_0^e$ непрерывно; 2) отображение $U \ni f \mapsto \pi(f) \xi \in D_0^e$ сильно непрерывно для любого $\xi \in D_0^e$.

Доказательство. Из непрерывности отображения $U \ni f \mapsto \pi(f) e \in H$ и из вида базисных окрестностей нуля в $U = \mathrm{pr} \lim_{\tau \in T} H_\tau$ следует, что существует такой индекс τ_e и число $\delta > 0$, что для любого $f \in U$ такого, что $\| f \|_{H_{\tau_e}} < \delta$ выполнено $\| \pi(f) e \|_H < 1$. Так как отображение $U \ni f \mapsto \pi(f) e \in H$ линейно, то отсюда получаем, что оно непрерывно относительно топологии, индуцированной из $H_{\tau_e} \supseteq U$. Так как пространство U ядерно, то найдется такой индекс τ', что $H_{\tau'} \subseteq H_{\tau_e}$ квазиядерно. Поскольку топология на U, индуцированная топологией $H_{\tau'}$, сильнее топологии, индуцированной H_{τ_e}, то отображение $H_{\tau'} \supseteq U \ni f \mapsto \pi(f) e \in H$ непрерывно. Пусть $i_{\tau'}: H_{\tau'} \to H$ обозначает продолжение по непрерывности этого отображения. Обозначим $\mathcal{H}_+ = i_{\tau'} H_{\tau'}$. Определим скалярное произведение $(i_{\tau'} \varphi, i_{\tau'} \psi)_{\mathcal{H}_+} = (P_{H_{\tau'} \ominus \mathrm{Ker}\, i_{\tau'}} \varphi, P_{H_{\tau'} \ominus \mathrm{Ker}\, i_{\tau'}} \psi)_{H_{\tau'}}$, где $P_{H_{\tau'} \ominus \mathrm{Ker}\, i_{\tau'}}$ обозначает ортопроектор в $H_{\tau'}$ на подпространство $H_{\tau'} \ominus \mathrm{Ker}\, i_{\tau'}$, $\varphi, \psi \in H_{\tau'}$. Если e принадлежит множеству $i_{\tau'} U \subseteq H$, то положим $H_+^e = \mathcal{H}_+$, $D_0^e = i_{\tau'} U = \{ \pi(f) e \in H : f \in U \}$ с индуктивной топологией, порожденной отображением $i_{\tau'}$ [7, с. 72]. Если e не принадлежит множеству $i_{\tau'} U \subseteq H$, то положим $H_+^e = \mathbb{C} \cdot e \dotplus \mathcal{H}_+ \overset{\mathrm{df}}{=} \{ \xi \in H : \xi = \alpha e + \xi', \xi' \in \mathcal{H}_+, \alpha \in \mathbb{C} \}$ со скалярным произведением $(\alpha_1 e + \xi_1', \alpha_2 e + \xi_2')_{H_+^e} = \alpha_1 \bar{\alpha}_2 + (\xi_1', \xi_2')_{\mathcal{H}_+}$, $D_0^e = \mathbb{C} \cdot e \dotplus i_{\tau'} U = \{ \xi \in H : \xi = \alpha e + \xi', \alpha \in \mathbb{C}, \xi' \in i_{\tau'} U \}$ с топологией прямой суммы локально-выпуклых пространств $\mathbb{C}$ и $i_{\tau'} U$. Легко проверить, что пространства H_+^e и D_0^e удовлетворяют условиям, сформулированным в утверждении.

Утверждение 2. *Пусть имеется сильно непрерывное $*$-представ-*

ление π коммутативной топологической $*$-алгебры U на плотном линейном подмножестве D гильбертова пространства H. Предположим, что $U = U^q$. Пусть P_{H_e} обозначает ортопроектор в H на подпространство

$$H_e = \mathbb{C}\cdot e + \overline{\{\overline{\pi(g)}\, e \in H : g \in U\}}^H \overset{\mathrm{df}}{=} \{\xi \in H : \xi = \alpha\cdot e + \xi',\ \alpha \in \mathbb{C},$$
$$\xi' \in \overline{\{\overline{\pi(g)}\, e \in H : g \in U\}}^H$$

для некоторого $e \in \bigcap_{f\in U} D(\overline{\pi(f)})$ *такого, что отображение* $U \ni f \mapsto \overline{\pi(f)}\, e \in H$ *непрерывно. Тогда, если* $h \in \bigcap_{f\in U} D(\overline{\pi(f)})$ *такой, что отображение* $U \ni f \mapsto \overline{\pi(f)}\, h \in H$ *непрерывно, то* $P_{H_e}h$ *и* $h - P_{H_e}h$ *принадлежат* $\bigcap_{f\in U} D(\overline{\pi(f)})$ *и отображения* $U \ni f \mapsto \overline{\pi(f)}\, P_{H_e}h \in H$ *и* $U \ni f \mapsto \overline{\pi(f)}\,(h - P_{H_e}h) \in H$ *непрерывны.* (*Здесь* $\overline{A}$ *обозначает замыкание оператора* A, *а* — H — *замыкание в пространстве* H).

Доказательство. Если $h \in H_e$, то $h = \alpha e + h'$ для некоторых $\alpha \in \mathbb{C}$, $h' \in \overline{\{\overline{\pi(g)}\, e \in H : g \in U\}}^H$. Существует последовательность $(g_n)_{n=1}^{\infty}$, $g_n \in U$, такая, что $\overline{\pi(g_n)}\, e \xrightarrow[n\to\infty]{} h'$ в H. Поскольку замыкание $*$-представления π есть $*$-представление [3] (лемма 2.6), то для любого $g \in U$ отображение $U \ni f \mapsto \overline{\pi(f)}\,(\alpha e + \overline{\pi(g)}\, e) = \overline{\pi(\alpha f)}\, e + \overline{\pi(f\cdot g)}\, e$ непрерывно. Следовательно, согласно лемме 1 любой вектор из $\mathbb{C}\cdot e + \{\overline{\pi(g)}\, e \in H : g \in U\}$ квазианалитический для $\overline{\pi(f)} \restriction_{\bigcap_{g\in U} D(\overline{\pi(g)})}$ и тем более для $\overline{\pi(f)}$. Таким образом, если $f = f^*$, то для любого $\Delta \in B(\mathbb{R}^1)$ существуют последовательности полиномов $(P_k^n)_{k=1}^{\infty}$, $n = 1, 2, \ldots$, такие, что $P_k^n(\overline{\pi(f)})(\alpha e + \overline{\pi(g_n)}\, e) \xrightarrow[k\to\infty]{} E_{\overline{\pi(f)}}(\Delta)(\alpha e + \overline{\pi(g_n)}\, e)$, где E_A обозначает разложение единицы оператора A [8, с. 181]. Пусть a_k^n — свободные члены многочленов P_k^n и $P_k^{n'} = P_k^n - a_k^n$, тогда имеем $E_{\overline{\pi(f)}}(\Delta)\, h = E_{\overline{\pi(f)}}(\Delta) \lim_{n\to\infty} (\alpha e + \overline{\pi(g_n)}\, e) = \lim_{n\to\infty} E_{\overline{\pi(f)}}(\Delta)(\alpha e + \overline{\pi(g_n)}\, e) = \lim_{n\to\infty}\lim_{k\to\infty} (P_k^{n'}(\overline{\pi(f)}) + a_k^n)(\alpha e + \overline{\pi(g_n)}\, e) = \lim_{n\to\infty}\lim_{k\to\infty} (a_k^n \alpha e + \overline{\pi(\alpha P_k^{n'}(f) + a_k^n g_n + P_k^{n'}(f)\, g_n)}\, e)$ (здесь мы опять воспользовались тем, что замыкание $*$-представления есть $*$-представление). Следовательно, $E_{\overline{\pi(f)}}(\Delta)\, h \in \overline{H_e}^H = H_e$. Кроме того, если $h \perp H_e$, то $(E_{\overline{\pi(f)}}(\Delta)\, h, h_1) = (h, E_{\overline{\pi(f)}}(\Delta)\, h_1) = 0$ для любого $h_1 \in H_e$ и, следовательно, $E_{\overline{\pi(f)}}(\Delta)\, h \perp H_e$. Так как в силу леммы 1 замыкания операторов, соответствующих эрмитовым элементам, коммутируют в смысле разложений единицы, то для любых $f \in U$, $h_1 \in H_e$, $h_2 \perp H_e$, $\Delta \in B(\mathbb{C}^1)$ справедливы включения $E_{\widetilde{\pi(f)}}(\Delta)\, h_1 \in H_e$, $E_{\widetilde{\pi(f)}}(\Delta)\, h_2 \in H_e^{\perp}$, где $\pi\widetilde{(f)} = \overline{\pi\left(\frac{f + f^*}{2}\right)} + i\overline{\pi\left(\frac{f - f^*}{2i}\right)}$ — нормальное расширение оператора $\pi(f)$. Таким образом, для произвольного $h \in \bigcap_{f\in U} D(\pi\widetilde{(f)})$ имеем $(E_{\widetilde{\pi(f)}}(\Delta')\, P_{H_e}h, E_{\widetilde{\pi(f)}}(\Delta'')(h - P_{H_e}h)) = 0$ для произвольных $\Delta', \Delta'' \in B(\mathbb{C}^1)$. Отсюда следует равенство $\int_{\mathbb{C}^1} |\lambda|^2\, d(E_{\widetilde{\pi(f)}}(\lambda)\, h, h) = \int_{\mathbb{C}^1} |\lambda|^2\, d(E_{\widetilde{\pi(f)}}(\lambda)\, P_{H_e}h, P_{H_e}h) + \int_{\mathbb{C}^1} |\lambda|^2\, d(E_{\widetilde{\pi(f)}}(\lambda)(h - P_{H_e}h), h - P_{H_e}h)$, которое устанавливается сначала для аппроксимаций функции $\mathbb{C}^1 \ni \lambda \mapsto |\lambda|^2 \in \mathbb{R}^1$ ступенчатыми функциями, а затем переходом к пределу в равенстве. Это равенство означает, что $P_{H_e}h, h - P_{H_e}h \in D(\pi\widetilde{(f)})$ и $\|\pi\widetilde{(f)}\, h\|^2 = \|\pi\widetilde{(f)}\, P_{H_e}h\|^2 + \|\pi\widetilde{(f)}\,(h - P_{H_e}h)\|^2$ для любого $f \in U$. Отсюда будет следовать утверждение, если мы докажем, что $\bigcap_{f\in U} D(\pi\widetilde{(f)}) = \bigcap_{f\in U} D(\overline{\pi(f)})$. Для этого заметим, что $\bigcap_{f\in U} D(\pi\widetilde{(f)}) \subseteq \bigcup_{f\in U, f=f^*} D(\overline{\pi(f)})$. Однако, в силу леммы 2.5 [3] $\bigcap_{f\in U, f=f^*} D(\overline{\pi(f)}) = \bigcap_{f\in U} D(\overline{\pi(f)})$. Следовательно, $\bigcap_{f\in U} D(\pi\widetilde{(f)}) \subseteq \bigcap_{f\in U} D(\overline{\pi(f)})$. С другой стороны, $D(\pi\widetilde{(f)}) \supseteq D(\overline{\pi(f)})$, так как $\overline{\pi(f)}$ — минимальное замкнутое расширение, а оператор $\pi\widetilde{(f)} \supseteq \pi(f)$ нормален и, следовательно, замкнут. Таким образом, $\bigcap_{f\in U} D(\pi\widetilde{(f)}) = \bigcap_{f\in U} D(\overline{\pi(f)})$. Утверждение доказано.

Построим теперь оснащение гильбертова пространства H.

Лемма 2. *Пусть имеется сильно непрерывное $*$-представление π ядерной сепарабельной $*$-алгебры U на плотном линейном подмножестве D гильбертова пространства H и $U = U^q$. Тогда существуют гильбертово пространство H_+, плотно и квазиядерно вложенное в H, и сепарабельное линейное топологическое пространство $D_0 \subseteq \bigcap_{g\in U} D(\overline{\pi(g)})$, плотно и топологично вложенное в H_+, такое, что сопряженное пространство D_0' сепарабельно относительно слабой топологии, замыкания операторов представления $\overline{\pi(f)}$ действуют непрерывно из D_0 в D_0 и отображение $U \ni f \mapsto \overline{\pi(f)}\xi \in D_0$ непрерывно для любого $\xi \in D_0$.*

Доказательство. Пусть $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ — ортонормированный базис в H, состоящий из элементов D. Так как представление π сильно непрерывно, то выполнены предположения утверждения 1 с $e = e_1$. Применим это утверждение. Обозначим $H_+^1 = H_+^{e_1}$, $D_0^1 = D_0^{e_1}$, $H_1 = \overline{H_+^1}^H$. Если $H_1 = H$, то полагаем $H_+ = H_+^1$, $D_0 = D_0^1$ и построение оснащения на этом заканчивается. Если H_+^1 не плотно в H, то найдется такой вектор e_k из базиса, что $e_k \bar{\in} H_1$. Можем считать, что это вектор e_2.

Так как $H_1 = \mathbb{C}\cdot e_1 \dotplus \overline{\{\pi(g)e_1 \in H : g \in U\}}^H$, то в силу утверждения 2 имеем $P_{H_1}e_2$, $e_2 - P_{H_1}e_2 \in \bigcap_{g\in U} D(\overline{\pi(g)})$ и отображения $U \ni f \mapsto \overline{\pi(f)}\,P_{H_1}e_2 \in H$ и $U \ni f \mapsto \overline{\pi(f)}(e_2 - P_{H_1}e_2) \in H$ непрерывны. Следовательно, для замыкания представления $U \ni f \mapsto \overline{\pi(f)} \upharpoonright_{\bigcap_{g\in U} D(\overline{\pi(g)})}$ [3, с. 89] (лемма 2.6) и вектора $e_2' = e_2 - P_{H_1}e_2$ выполнены условия утверждения 1 и мы имеем гильбертово пространство $H_+^2 = H_+^{e_2'} \subseteq H$ и линейное топологическое пространство $D_0^2 = D_0^{e_2'}$ причем $D_0^{e_2'} \subseteq \bigcap_{g\in U} D(\overline{\pi(g)})$. Обозначим $H_2 = \overline{H_+^2}^H$. Пространства H_1 и H_2 ортогональны в H. Действительно, достаточно показать, что плотные подмножества D_0^1 и D_0^2 ортогональны в H. Однако для $\xi_1 \in D_0^1$ и $\xi_2 \in D_0^2$ имеем $\xi_1 = \alpha_1 e_1 + \pi(g_1)e_1$, $\xi_2 = \alpha_2 e_2' + \overline{\pi(g_2)}e_2'$ для некоторых $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$; $g_1, g_2 \in U$ и $(\xi_1, \xi_2) = (\alpha_1 e_1 + \pi(g_1)e_1,\ \alpha_2 e_2' + \overline{\pi(g_2)}e_2') = \alpha_1\bar{\alpha}_2(e_1, e_2') + \alpha_1(e_1, \overline{\pi(g_2)}e_2') + \bar{\alpha}_2(\pi(g_1) \times e_1, e_2') + (\pi(g_1)e_1, \overline{\pi(g_2)}e_2') = \alpha_1\bar{\alpha}_2(e_1, e_2') + \alpha_1(\pi(g_2^*)e_1, e_2') + \bar{\alpha}_2(\pi(g_1)e_1, e_2') + (\pi(g_2^*g_1)e_1, e_2') = 0$. Далее, поскольку $e_2' = e_2 - P_{H_1}e_2 \in H_2$, а $P_{H_1}e_2 \in H_1$, то $e_2 \in H_1 \oplus H_2$. Если $H_1 \oplus H_2 = H$, то полагаем $H_+ = H_+^1 \oplus H_+^2$, $D_0 = D_0^1 + D_0^2$ с топологией прямой суммы и построение оснащения заканчивается. Если $H_1 \oplus H_2$ не равно H, то найдется такой вектор e_k, $k \geqslant 3$, из базиса $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$, что $e_k \bar{\in} H_1 \oplus H_2$. Без ограничения общности можем считать, что это e_3.

Так как $H_1 = \mathbb{C}\cdot e_1 \dotplus \overline{\{\overline{\pi(g)}\,e_1 \in H : g \in U\}}^H$, а

$$H_2 = \mathbb{C}\cdot e_2' \dotplus \overline{\{\overline{\pi(g)}\,e_2' \in H : g \in U\}}^H,$$

то в силу утверждения 2, примененного к векторам e_3 и e_2' и представлению π, получим $e_3 - P_{H_2}e_3 \in \bigcap_{g\in U} D(\overline{\pi(g)})$ и отображение $U \ni f \mapsto \overline{\pi(f)}(e_3 - P_{H_2}e_3) \in H$ непрерывно; в силу утверждения 2, примененного к векторам $e_3 - P_{H_2}e_3$ и e_1 и представлению π, получим $(e_3 - P_{H_2}e_3) - P_{H_1}(e_3 - P_{H_2}e_3) = e_3 - P_{H_1\oplus H_2}e_3 \in \bigcap_{g\in U} D(\overline{\pi(g)})$ и отображение $U \ni f \mapsto \overline{\pi(f)}(e_3 - P_{H_1\oplus H_2}e_3) \in H$ непрерывно. Следовательно, для замыкания представления $U \ni f \mapsto \overline{\pi(f)} \restriction \bigcap_{g\in U} D(\overline{\pi(g)})$ и вектора $e_3' = e_3 - P_{H_1\oplus H_2}e_3$ выполнены условия утверждения 1 и мы имеем $H_+^3 = H_+^{e_3'}$ и $D_0^3 = D_0^{e_3'}$. Полагаем $H_3 = \overline{H_+^3}^H$. Ортогональность H_3 и $H_1 \oplus H_2$ доказывается аналогично доказательству ортогональности H_1 и H_2. Ясно, что $e_3 = e_3 - P_{H_1\oplus H_2}e_3 + P_{H_1\oplus H_2}e_3 \in H_1 \oplus H_2 \oplus H_3$. Если $H_1 \oplus H_2 \oplus H_3 = H$, то полагаем $H_+ = H_+^1 \oplus H_+^2 \oplus H_+^3$, а $D_0 = D_0^1 \dotplus D_0^2 \dotplus D_0^3$ с топологией прямой суммы и построение оснащения заканчивается. Если $H_1 \oplus H_2 \oplus H_3$ не равно H, то с помощью аналогичной процедуры строим H_4, и т. д. Предположим, что на каждом шаге $H_1 \oplus H_2 \oplus \ldots \oplus H_k$ не равно H, $k = 1, 2, \ldots$. Тогда построим последовательности пространств $\{H_+^k\}_{k=1}^\infty$, $\{D_0^k\}_{k=1}^\infty$, $\{H_k\}_{k=1}^\infty$. Так как по построению $e_k \in H_1 \oplus H_2 \oplus \ldots \oplus H_k$, то $\bigoplus_{k=1}^\infty H_k = H$. Пусть $O_k : H_+^k \to H_k$ обозначает оператор вложения H_+^k в H_k. Пусть $\| O_k \|$ — нормы Гильберта — Шмидта этих операторов. Рассмотрим последовательность положительных чисел $(\delta_k)_{k=1}^\infty$ такую, что $\sum_{k=1}^\infty \| O_k \|^2 \delta_k^{-1} < +\infty$. Рассмотрим взвешенную ортогональную сумму $H_+ = \bigoplus_{k=1,(\delta_k)_{k=1}^\infty}^\infty H_+^k$. Понятно, что $H_+ \subseteq H$ плотно и топологично. Кроме того, в силу условия на $(\delta_k)_{k=1}^\infty$ $\| O \|^2 = \sum_{k=1}^\infty \| O_k \|^2 \delta_k^{-1} < +\infty$, где $\| O \|$ обозначает норму Гильберта — Шмидта оператора вложения H_+ в H. Положим $D_0 = \{\xi_1 + \xi_2 + \ldots \in H : \xi_k \in D_0^k$ и только конечное число ξ_k отлично от $0\}$ с топологией прямой суммы пространств D_0^k. Требуемые свойства пространства D_0 легко устанавливаются. Плотность и топологичность $D_0 \subseteq H_+$ также очевидны. Непрерывность $\overline{\pi(f)} : D_0 \to D_0$ следует из включения $\overline{\pi(f)}\, D_0^k \subseteq D_0^k$ и непрерывности $\overline{\pi(f)} \restriction D_0^k : D_0^k \to D_0^k$. Непрерывность отображения $U \ni f \mapsto \overline{\pi(f)}\,\xi \in D_0$ для любого $\xi \in D_0$ следует из непрерывности отображений $U \ni f \mapsto \overline{\pi(f)}\,\xi_k \in D_0^k$, $\xi_k \in D_0^k$.

Определение 2. *$*$-Представление π $*$-алгебры U называется неприводимым, если его слабый коммутант* [1, с. 233] *есть множество операторов, кратных единице, т. е.* $(\pi(U))'_w = \{\alpha \cdot 1_H : \alpha \in \mathbb{C}^1\}$, *где* 1_H *— единичный оператор в пространстве H.*

Понятно, что любое одномерное представление $U \ni f \mapsto m(f) \in C^1$ неприводимо. Обратно, если π есть сильно непрерывное $*$-представление коммутативной топологической $*$-алгебры U такой, что $U = U^q$, то из неприводимости π следует его одномерность. Действительно, из коммутируемости нормальных расширений $\widetilde{\pi}(f)$ операторов представления $\pi(f)$ в смысле разложений единицы следует включение $E_{\widetilde{\pi(f)}}(\Delta) \in (\pi(U))'_w = \{\alpha \cdot 1_H : \alpha \in \mathbb{C}^1\}$. Отсюда получаем, что все операторы $\pi(f)$ кратны единичному. Но, поскольку такие операторы коммутируют в обычном смысле с любым оператором из $B(H)$, то π будет неприводимым только тогда, когда H одномерно.

Теорема. *Пусть имеется сильно непрерывное $*$-представление π ядерной коммутативной $*$-алгебры U на плотном линейном подмножестве D гильбертова пространства H. Предположим, что $U = U^q$. Тогда $H =$*

$= \int\limits_M^{\oplus} H_{m(\cdot)} d\rho(m(\cdot))$, *где* M — *множество непрерывных мультипликативных линейных функционалов* $U \ni f \mapsto m(f) \in \mathbb{C}^1$ *на алгебре* U *таких, что* $m(f^*) = \overline{m(f)}$, *а* ρ — *конечная мера на некоторой* σ-*алгебре подмножеств множества* M, $D \subseteq \left\{h \in H : \forall f \in U \int\limits_M |m(f)|^2 \| h(m(\cdot)) \|^2_{Hm(\cdot)} d\rho(m(\cdot)) < +\infty\right\}$, *а операторы представления диагональны в этом разложении и действуют по формуле* $\pi(f)\xi = \int\limits_M^{\oplus} \pi(f)(m(\cdot))\, \xi(m(\cdot))\, d\rho(m(\cdot))$, *где* $\xi = \int\limits_M^{\oplus} \xi(m(\cdot))\, d\rho(m(\cdot)) \in D$, *а* $\pi(f)(m(\cdot)) = m(f) \cdot 1_{H_{m(\cdot)}}$, *где* $1_{H_{m(\cdot)}}$ — *единичный оператор в* $H_{m(\cdot)}$.

Доказательство. Для произвольных элементов $f \in U$ рассмотрим операторы $\widetilde{\pi(f)} = \overline{\pi\left(\frac{f+f^*}{2}\right) + i\pi\left(\frac{f-f^*}{2i}\right)}$. В силу леммы 1 эти операторы являются нормальными расширениями операторов $\pi(f)$ и коммутируют в смысле разложений единицы. В силу леммы 2 имеется оснащение $D_0 \subseteq \subseteq H_+ \subseteq H$, удовлетворяющее условиям теоремы 3.2 [5] для семейства операторов $\{\widetilde{\pi(f)}\}_{f\in U}$. Применив эту теорему, получим $O^+E(\Delta)\,O = \int\limits_{\Delta \cap M} P(m(\cdot)) \times \times d\rho(m(\cdot))$, где O — оператор вложения H_+ в H, O^+ — оператор вложения H в H_-, E — совместное разложение единицы семейства операторов $\{\widetilde{\pi(f)}\}_{f\in U}$, $\Delta \in C_\sigma(\mathbb{C}^U)$, M — множество полной внешней меры E^*, построенной по E, M является борелевским множеством из $\mathbb{C}^U$($\mathbb{C}^U$ топологизировано тихоновской топологией произведения), ρ — конечная мера на σ-алгебре $C_\sigma(\mathbb{C}^U) \cap M = C_\sigma(M)$, $P(m(\cdot))$ — слабо измеримая операторнозначная функция, значения которой есть неотрицательные операторы из H_+ в H_- (т. е. $(P(m(\cdot))e, e)_H \geqslant 0$ для любого $e \in H_+$) такие, что гильбертова норма $\| P(m(\cdot)) \|_{H_+ \to H_-} \leqslant \mathrm{Tr}(P(m(\cdot))) = 1$ ($\mathrm{Tr}(P(m(\cdot))) \overset{\mathrm{df}}{=} \sum\limits_{k=1}^{\infty} (P(m(\cdot))e_k, e_k)_H$, где $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ортонормированный базис в H_+), интеграл сходится по гильбертовой норме, причем для любого $m(\cdot) \in M$ справедливы равенства

$$(P(m(\cdot))\xi, \widetilde{\pi(f)}^*\eta)_H = m(f)\,(P(m(\cdot))\xi, \eta)_H, \quad (P(m(\cdot))\xi, \widetilde{\pi(f)}\eta)_H = \\ = \overline{m(f)}\,(P(m(\cdot))\xi, \eta)_H \tag{2}$$

для всех $\xi \in H_+$, $\eta \in D_0$, $f \in U$. Покажем, что M состоит из непрерывных мультипликативных линейных функционалов на алгебре U таких, что $m(f^*) = \overline{m(f)}$ для любого $f \in U$. Поскольку $\mathrm{Tr}(P(m(\cdot))) = 1$, то для некоторых $\xi, \eta \in D_0$ $(P(m(\cdot))\xi, \eta)_H \neq 0$. Так как $D_0 \subseteq \bigcap\limits_{g\in U} D(\overline{\pi(g)})$, $U \ni f \mapsto \mapsto \widetilde{\pi(f)} \upharpoonright \bigcap\limits_{g\in U} D(\overline{\pi(g)})$ есть $*$-представление $*$-алгебры U, отображение $U \ni f \mapsto \mapsto \widetilde{\pi(f)}\eta$ непрерывно для любого $\eta \in D_0$, то из равенств (2) вытекает $m(\alpha f + \beta g) = \alpha m(f) + \beta m(g)$, $m(f \cdot g) = m(f) \cdot m(g)$, $m(f^*) = \overline{m(f)}$ для любых $f, g \in U$ и непрерывность $U \ni f \mapsto m(f) \in \mathbb{C}^1$. Рассмотрим ограниченные неотрицательные операторы $\mathbf{I}P(m(\cdot))$ в H_+, $m(\cdot) \in M$, где $\mathbf{I} : H_- \to H_+$ — изометрия, связанная с цепочкой $H_+ \subseteq H \subseteq H_-$ [4, с. 18]. Рассмотрим образы $R(\mathbf{I}P(m(\cdot))) \subseteq H_+$ операторов $\mathbf{I}P(m(\cdot))$. Замкнем эти образы в пространстве H_+. Полученное замыкание $\overline{R(\mathbf{I}P(m(\cdot)))}^{H_+}$ обозначим через $H_{m(\cdot)}$. Заметим, что для любого $\xi \in H_+$ $\sqrt{\mathbf{I}P(m(\cdot))}\xi \in H_{m(\cdot)}$ и $H_{m(\cdot)} = \overline{R(\sqrt{\mathbf{I}P(m(\cdot))})}^{H_+}$. Определим скалярное произведение в $H_{m(\cdot)}$, индуцировав его из H_+. Имеем

$$(\sqrt{\mathrm{I}P(m(\cdot))}\,\xi,\ \sqrt{\mathrm{I}P(m(\cdot))}\,\eta)_{H_{m(\cdot)}} = (\sqrt{\mathrm{I}P(m(\cdot))}\,\xi,\ \sqrt{\mathrm{I}P(m(\cdot))}\,\eta)_{H_+} =$$
$$= (\mathrm{I}P(m(\cdot))\,\xi, \eta)_{H_+} = (P(m(\cdot))\,\xi, \eta)_H. \tag{3}$$

Так как множества $\{\sqrt{\mathrm{I}P(m(\cdot))}\,\xi \in H_{m(\cdot)} : \xi \in H_+\}$ плотны в $H_{m(\cdot)}$ и $(\sqrt{\mathrm{I}P(m(\cdot))}\,\xi, \sqrt{\mathrm{I}P(m(\cdot))}\,\widetilde{\pi}(f)\,\eta)_{H_{m(\cdot)}} = (P(m(\cdot))\,\xi, \widetilde{\pi}(f)\,\eta)_H = \overline{m(f)}\,(\sqrt{\mathrm{I}P(m(\cdot))}\,\xi, \sqrt{\mathrm{I}P(m(\cdot))}\,\eta)_{H_{m(\cdot)}}$, то для любых $x(m(\cdot)) \in H_{m(\cdot)}$ и $\eta \in D_0$ справедливо равенство

$$(x(m(\cdot)), \sqrt{\mathrm{I}P(m(\cdot))}\,\widetilde{\pi}(f)\,\eta)_{H_{m(\cdot)}} = \overline{m(f)}\,(x(m(\cdot)), \sqrt{\mathrm{I}P(m(\cdot))}\,\eta)_{H_{m(\cdot)}}. \tag{4}$$

Из этого равенства вытекает, что если $\{e_i'\}_{i=1}^{\infty}$ — множество элементов из D_0, построенных в доказательстве леммы 2, то множества $\{\sqrt{\mathrm{I}P(m(\cdot))}\,e_i' \in H_{m(\cdot)} : i = 1, 2, \ldots\}$ тотальны в $H_{m(\cdot)}$ для любого $m(\cdot) \in M$.

Рассмотрим измеримое поле гильбертовых пространств $((H_{m(\cdot)})_{m(\cdot)\in M}, \Gamma)$, где $\Gamma \doteq \{M \ni m(\cdot) \mapsto x(m(\cdot)) \in H_{m(\cdot)} : m(\cdot) \mapsto \|x(m(\cdot))\|_{H_{m(\cdot)}}$ и $m(\cdot) \mapsto (x(m(\cdot)), \sqrt{\mathrm{I}P(m(\cdot))}\,\eta)_{H_{m(\cdot)}}$ для любого $\eta \in H_+$ измеримы$\}$ [9, с. 366]. Аксиомы измеримого поля легко проверяются, если учесть, что $m(\cdot) \mapsto (\sqrt{\mathrm{I}P(m(\cdot))}\,\xi, \sqrt{\mathrm{I}P(m(\cdot))}\,\eta)_{H_{m(\cdot)}}$ измерима для любых $\xi, \eta \in H_+$ и в качестве последовательности $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ взять $\{\sqrt{\mathrm{I}P(m(\cdot))}\,e_i'\}_{i=1}^{\infty}$, где $\{e_i'\}_{i=1}^{\infty}$ — множество векторов из D_0, построенных в доказательстве леммы 2. Пусть $\int_M^{\oplus} H_{m(\cdot)}d\rho(m(\cdot))$ — гильбертово пространство измеримых векторных полей $M \ni m(\cdot) \mapsto x(m(\cdot)) \in H_{m(\cdot)}$ с интегрируемым квадратом [9, с. 367]. Элементы $M \ni m(\cdot) \mapsto x(m(\cdot)) \in H_{m(\cdot)}$ этого пространства обозначаются $\int_M^{\oplus} x(m(\cdot)) \times d\rho(m(\cdot))$. Покажем, что множество элементов вида $\int_M^{\oplus} \sqrt{\mathrm{I}P(m(\cdot))}\,\xi\, d\rho(m(\cdot))$, где $\xi \in H_+$, плотно в $\int_M^{\oplus} H_{m(\cdot)}d\rho(m(\cdot))$. Для этого докажем, что для любого $i = 1, 2, \ldots$ множество функций, состоящее из тождественной единицы и функций вида $M \ni m(\cdot) \mapsto m(f) \in \mathbb{C}^1$, $f \in U$, тотально в гильбертовом пространстве $L_2(M, (P(m(\cdot))\,e_i', e_i')_H d\rho(m(\cdot)))$. Достаточно уметь линейными комбинациями этих функций аппроксимировать по норме пространства $L_2(M, (P(m(\cdot))\,e_i', e_i')_H d\rho(m(\cdot)))$ характеристические функции множеств из $C_\sigma(M)$. Из того, что σ — оболочка множеств вида $\Delta = \{m(\cdot) \in M : m(g) \in \Delta_g = \Delta' \times \mathbb{R}^1, \Delta' \in B(\mathbb{R}^1)\}$ и $\Delta = \{m(\cdot) \in M : m(g) \in \Delta_g = \mathbb{R}^1 \times \Delta', \Delta' \in B(\mathbb{R}^1)\}$ есть $C_\sigma(M)$ и из неравенств $\|m(f+g) + \alpha_1 + \alpha_2 - (\chi_{\Delta_1}(m(\cdot)) + \chi_{\Delta_2}(m(\cdot)))\|_{L_2} \leqslant \|m(f) + \alpha_1 - \chi_{\Delta_1}(m(\cdot))\|_{L_2} + \|m(g) + \alpha_2 - \chi_{\Delta_2}(m(\cdot))\|_{L_2}$, $\|m(g) + \alpha_2 - \chi_{\Delta_1\cap\Delta_2}(m(\cdot))\|_{L_2} \leqslant \|m(g) + \alpha_2 - (m(f) + \alpha_1)\,\chi_{\Delta_2}(m(\cdot))\|_{L_2} + \|m(f) + \alpha_1 - \chi_{\Delta_1}(m(\cdot))\|_{L_2}$, $\|1 - (m(f) - \alpha_1) - (1 - \chi_{\Delta_1}(m(\cdot)))\|_{L_2} = \|(m(f) - \alpha_1) - \chi_{\Delta_1}(m(\cdot))\|_{L_2}$, справедливых для любых $\Delta_1, \Delta_2 \in C_\sigma(M)$; $f, g \in U$; $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}^1$, вытекает, что достаточно уметь аппроксимировать функции $\chi_\Delta(m(\cdot))$ и $m(f)\,\chi_\Delta(m(\cdot))$, где Δ — множества указанного вида. Для таких множеств Δ справедливо $E(\Delta) = E_{\mathrm{Re}\widetilde{\pi}(g)}(\Delta')$ или $E(\Delta) = E_{\mathrm{Im}\widetilde{\pi}(g)}(\Delta')$. Пусть, для определенности, имеет место первое равенство. Так как векторы e_i' и $\widetilde{\pi}(f)\,e_i'$ квазианалитические для операторов $\mathrm{Re}\,\widetilde{\pi}(g)$, то существуют последовательности полиномов $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ и $(Q_n)_{n=1}^{\infty}$ такие, что $P_n(\mathrm{Re}\,\widetilde{\pi}(g))\,e_i' \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} E_{\mathrm{Re}\widetilde{\pi}(g)}(\Delta')\,e_i'$ и $Q_n(\mathrm{Re}\,\widetilde{\pi}(g))\,\widetilde{\pi}(f)\,e_i' \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} E_{\mathrm{Re}\widetilde{\pi}(g)}(\Delta')\,\widetilde{\pi}(f)\,e_i'$ в H. Пусть α_n, β_n — свободные члены P_n и Q_n соответственно и $P'_n = P_n - \alpha_n$, $Q'_n = Q_n - \beta_n$. Так как $P_n(\mathrm{Re}\,\pi\widetilde{(g)})\,e'_i = \left(\pi\left(P'_n\left(\frac{g+g^*}{2}\right)\right)\right)^{\sim} e'_i + \alpha_n e'_i$ и $Q_n(\mathrm{Re}\,\pi\widetilde{(g)})\,\pi\widetilde{(f)}\,e'_i = \left(\pi\left(Q'_n\left(\frac{g+g^*}{2}\right)\cdot f\right)\right)^{\sim} e'_i + \beta_n \pi\widetilde{(f)}\,e'_i$, то $\int\limits_M \left| m\left(P'_n\left(\frac{g+g^*}{2}\right)\right) + \alpha_n - \chi_\Delta\cdot (m(\cdot))\right|^2 \cdot (P(m(\cdot))\,e'_i, e'_i)_H d\rho(m(\cdot)) = \| E_{\mathrm{Re}\pi\widetilde{(g)}}(\Delta)\,e'_i - P_n(\mathrm{Re}\,\pi\widetilde{(g)})\,e'_i\|^2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$,

$$\int\limits_M \left| m\left(Q'_n\left(\frac{g+g^*}{2}\right)\cdot f\right) + \beta_n m(f) - \chi_\Delta(m(\cdot))\cdot m(f)\right|^2 (P(m(\cdot))\,e'_i, e'_i)_H d\rho(m(\cdot)) = \| Q_n(\mathrm{Re}\,\pi\widetilde{(g)})\cdot\pi\widetilde{(f)}\,e'_i - E_{\mathrm{Re}\pi\widetilde{(f)}}(\Delta)\,\pi\widetilde{(f)}\,e'_i\|_H \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Рассмотрим квадратично интегрируемое векторное поле $m(\cdot) \mapsto x(m(\cdot))$. Векторное поле $m(\cdot) \mapsto \left(\int\limits_M (x(m(\cdot)), \sqrt{\mathrm{I}P(m(\cdot))}\,\xi)_{H_{m(\cdot)}} d\rho(m(\cdot))\right)\left(\int\limits_M \|\sqrt{\mathrm{I}P(m(\cdot))}\times \xi\|^2 d\rho(m(\cdot))\right)^{-1}\cdot\sqrt{\mathrm{I}P(m(\cdot))}\,\xi$ есть проекция поля $m(\cdot)\mapsto x(m(\cdot))$ на поле $m(\cdot)\mapsto\sqrt{\mathrm{I}P(m(\cdot))}\,\xi$. Покажем, что если для любого $\xi\in H_+$ эти проекции равны 0, то $x(m(\cdot)) = 0$ почти всюду. Пусть, от противного, $\rho(\{m(\cdot)\in M : x(m(\cdot)) \neq 0\}) > 0$. Так как $\{\sqrt{\mathrm{I}P(m(\cdot))}\,e'_i \in H_{m(\cdot)} : i = 1, 2 \ldots\}$ тотальны в $H_{m(\cdot)}$, то существует такое i, что $\rho(\{m(\cdot)\in M : (x(m(\cdot)), \sqrt{\mathrm{I}P(m(\cdot))}\,e'_i)_{H_{m(\cdot)}} \neq 0\}) > 0$. Отсюда следует, что некоторое множество, на котором действительная или мнимая часть $(x(m(\cdot)), \sqrt{\mathrm{I}P(m(\cdot))}\,e'_i)_{H_{m(\cdot)}}$ строго положительна или строго отрицательна, имеет ненулевую меру. Пусть это будет множество $\Delta = \{m(\cdot)\in M : \mathrm{Re}\,(x(m(\cdot)), \sqrt{\mathrm{I}P(m(\cdot))}\,e'_i) > 0\}$. Остальные случаи рассматриваются аналогично. Рассмотрим последовательности $f_n \in U$, $\alpha_n \in \mathbb{C}^1$ такие, что $m(f_n) + \alpha_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \chi_\Delta(m(\cdot))$ в $L_2(M, (P(m(\cdot))\,e'_i, e'_i)\,d\rho)$. Так как функция $M \ni m(\cdot) \mapsto (x(m(\cdot)), \sqrt{\mathrm{I}P(m(\cdot))}\,e'_i)_{H_{m(\cdot)}}\cdot(P(m(\cdot))e'_i, e'_i)_H^{-1} \in \mathbb{C}^1$ принадлежит $L_2(M, (P(m(\cdot))\,e'_i, e'_i)\,d\rho(m(\cdot)))$, то $\mathrm{Re}\int\limits_M (x(m(\cdot)), \sqrt{\mathrm{I}P(m(\cdot))}\,(\pi\widetilde{(f_n)} + \alpha_n)\,e'_i)_{H_{m(\cdot)}} d\rho(m(\cdot)) = \mathrm{Re}\int\limits_M (m(f_n) + \alpha_n)\cdot(x(m(\cdot)), \sqrt{\mathrm{I}P(m(\cdot))}\,e'_i)\,(P(m(\cdot))\,e'_i, e'_i)^{-1}\cdot(P(m(\cdot))\,e'_i, e'_i)\,d\rho(m(\cdot)) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int\limits_\Delta \mathrm{Re}\,(x(m(\cdot)), \sqrt{\mathrm{I}P(m(\cdot))}\,e'_i)_{H_{m(\cdot)}} d\rho(m(\cdot)) > 0$. Следовательно, существует n такое, что $\mathrm{Re}\int\limits_M (x(m(\cdot)), \sqrt{\mathrm{I}P(m(\cdot))}\,(\pi\widetilde{(f_n)} + \alpha_n)\,e'_i)_{H_{m(\cdot)}} d\rho(m(\cdot)) > 0$ и проекция поля $m(\cdot)\mapsto x(m(\cdot))$ на поле $m(\cdot)\mapsto\sqrt{\mathrm{I}P(m(\cdot))}\,(\pi\widetilde{(f_n)} + \alpha_n)\,e'_i$ ненулевая. Так как множество $\left\{\int\limits_M^\oplus \sqrt{\mathrm{I}P(m(\cdot))}\,\xi d\rho(m(\cdot)) : \xi\in H_+\right\}$ линейно, то оно плотно в $\int\limits_M^\oplus H_{m(\cdot)} d\rho(m(\cdot))$. Поставим в соответствие элементу $\xi \in H_+ \subseteq H$ элемент $\int\limits_M^\oplus \sqrt{\mathrm{I}P(m(\cdot))}\,\xi d\rho(m(\cdot)) \in \int\limits_M^\oplus H_{m(\cdot)} d\rho(m(\cdot))$. В силу равенства (3) это соответствие изометрично на плотном подмножестве H_+ пространства H относительно скалярного произведения H. Из плотности $\left\{\int\limits_M^\oplus \sqrt{\mathrm{I}P(m(\cdot))}\,\xi d\rho(m(\cdot)) : \xi\in H_+\right\}$ следует, что продолжение по непрерывности этого соответствия есть унитарный оператор из H в $\int\limits_M^\oplus H_{m(\cdot)} d\rho(m(\cdot))$. Далее, для произвольных $x \in H$, $\eta \in D_0$ в силу равенства (4) имеем $(x, \widetilde{\pi(f)}\eta)_H = \left(\int\limits_M^{\oplus} x(m(\cdot)) \times \right.$ $\times d\rho(m(\cdot)), \int\limits_M^{\oplus} m(f) \sqrt{\mathrm{I}P(m(\cdot))}\, \eta d\rho(m(\cdot)) \Big)_{\int\limits_M^{\oplus} H_{m(\cdot)} d\rho(m(\cdot))}$, т. е. оператор $\pi\widetilde{(f)}$ диагонален и $\pi\widetilde{(f)}(m(\cdot)) = m(f) \cdot 1_{H_{m(\cdot)}}$, кроме того, так как $\pi\widetilde{(f)} \supseteq \pi(f)$, то $D \subseteq D(\pi\widetilde{(f)}) = \left\{ h \in H : \int\limits_M |m(f)|^2 \cdot \| h(m(\cdot)) \|^2 d\rho(m(\cdot)) < \infty \right\}$. Теорема доказана.

В класс алгебр, рассмотренных нами, входят алгебры $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $S(\mathbb{R}^n)$ с поточечным умножением и инволюцией $f^*(x) = \overline{f(x)}$, $S(\mathbb{R}^n)$ со сверткой в качестве умножения и инволюцией $f^*(x) = \overline{f(-x)}$, $*$-алгебра $U = \operatorname*{pr\,lim}_{\tau \in \{0,1,\ldots\}} W_2^{\tau}(\mathbb{R}^n, e^{\tau|x|}dx)$ со сверткой в качестве умножения и инволюцией $f^*(x) = \overline{f(-x)}$, $*$-алгебра $U = \operatorname*{pr\,lim}_{\tau \in \{0,1,\ldots\}} W_2^{\tau}(\mathbb{R}^n, e^{\tau|x|}dx)$ со сверткой и инволюцией $f^*(x) = \overline{f(x)}$.

1. *Borchers H. J., Yngvason J.* On the algebra of fields operators. The weak commutant and integral decomposition of states // Communs Math. Phys.— 1975.— 42.— P. 231—252.
2. *Richter P.* Zur Zerlegung von Darstellungen nuclearer Algebren // Wiss. Z. Karl-Marx-Univ. Leipzig. Math.- naturwiss. R.— 1984.— 33, N 1.— S. 63—65.
3. *Powers R. T.* Self-Adjoint algebras of unbounded operators // Communs Math. Phys.— 1971.— 21.— P. 85—124.
4. *Березанский Ю. М.* Самосопряженные операторы в пространствах функций бесконечного числа переменных.— Киев : Наук. думка, 1978.— 360 с.
5. *Березанский Ю. М.* Проекционная спектральная теорема // Успехи мат. наук.— 1984.— 39, № 4.— С. 3—52.
6. *Березанский Ю. М.* О проекционной спектральной теореме // Укр. мат. журн.— 1985.— 37, № 2.— с. 146—154.
7. *Шефер Х.* Топологические векторные пространства.— М. : Мир, 1971.— 359 с.
8. *Nussbaum A. E.* Quasi-analytic vectors // Ark. mat.— 1965.— 6, N 2.— P. 179—191.
9. *Диксмье Ж.* C^*-алгебры и их представления.— М. : Наука, 1974.— 399 с.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 14.05.85