УДК 517.9

Н. И. Терещенко, Н. Н. Иванюк

Об асимптотическом представлении решений одного класса систем линейных дифференциальных уравнений

В статье рассматривается класс систем дифференциальных уравнений вида

$$\sum_{i=0}^{n} A_i(z)\, d^{n-i}w/dz^{n-i} = 0, \qquad (1)$$

где $w(z) = \operatorname{colon}(w_1(z), \ldots, w_q(z))$, $A_i(z)$, $i = \overline{0, n}$, — матрицы-функции размера $q \times q$ или голоморфны в некоторой окрестности особой точки $z = \infty$ ($z = 0$), или допускают асимптотическое разложение в ряд по убывающим (возрастающим) степеням независимого переменного, или являются полиномами.

Как показано в [1—4], существует тесная связь между особой точкой системы дифференциальных уравнений (1) и ее рангом (антирангом) $p = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(\beta_i - \beta_0)/i + 1$ $(m = -\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(\pi_i - \pi_0)/i - 1)$, где $\beta_i\,(\pi_i)$, $(i = \overline{0, n})$, — показатель наивысшей (наинизшей) степени в разложении матрицы-функции $A_i(z)$, $i = \overline{0, n}$. Ранг, антиранг системы, подранг, антиподранг как системы, так и ее коэффициентов, оказались очень гибким и тонким средством исследования. Эта взаимосвязь позволяет искать решения системы дифференциальных уравнений в виде ряда той или иной особой точки.

Здесь мы рассматриваем класс систем, имеющих дробный подранг (антиподранг). Для таких систем решения представляются в виде асимптотических рядов по дробным степеням независимого переменного.

1. Иррегулярная особая точка $z = \infty$. Будем предполагать, что $k = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(\beta_i - \beta_0)/i = (\beta_\mu - \beta_0)/\mu = \mu_1/\mu > -1$, где μ — некоторое определенное целое число, взаимно простое с целым числом μ_1. Покажем, что изучение решений системы (1) с дробным подрангом можно свести к изучению системы с целым рангом.

Теорема 1. *Если система* (1) *имеет дробный подранг со знаменателем* $\mu \geqslant 2$, *то замена независимого переменного*

$$z = \zeta^{\mu} \qquad (2)$$

превращает (1) *в такую систему, подранг которой есть целое число.*

Доказательство. Переходя к новому независимому переменному по формуле (2) в системе (1), которую можно представить в виде

$$\sum_{i=0}^{n} z^{\beta_i} A_i^*(z)\, d^{n-i}w/dz^{n-i} = 0, \qquad (3)$$

где

$$A_i^*(z) = \sum_{s=0}^{\nu_i} A_{is} z^{-s}, \quad 0 \leqslant \nu_i \leqslant \infty, \qquad (4)$$

имеем

$$\sum_{j=0}^{n} R_j(\zeta)\, d^{n-j}w/d\zeta^{n-j}=0, \tag{5}$$

где $R_j(\zeta)=\sum_{\nu=0}^{j} c_{j-\nu}^{(\nu)}\zeta^{(\beta_\nu-\beta_0+\nu)\mu-j}\cdot A_\nu^*(\zeta^\mu)$, $c_{j-\nu}^{(\nu)}$ — некоторые постоянные.

Определим величину подранга $\overline{k}$ системы (5), для чего найдем показатель наивысшей степени независимого переменного в матричной функции

$$\overline{R}_j(\zeta^\mu)=\sum_{\nu=0}^{j} C_{j-\nu}^{(\nu)}\zeta^{(\beta_\nu-\beta_0+\nu)\mu}\cdot A_\nu^*(\zeta^\mu). \tag{6}$$

Обозначая искомый показатель через $\lambda_j\mu$, получаем

$$\lambda_j\mu=\max_{1\leqslant\nu\leqslant j}\{\beta_\nu-\beta_0+\nu\}\,\mu, \tag{7}$$

или

$$\lambda_j\mu=(\beta_{l_j}-\beta_0+l_j)\,\mu. \tag{8}$$

Тогда

$$\overline{R}_j(\zeta^\mu)=\sum_{s=0}^{\infty} R_{js}\zeta^{(\lambda_j-s)\mu}, \tag{9}$$

где R_{js} — некоторые постоянные матрицы. Поскольку значение l_j неизвестно, то число λ_j является также неопределенным. Найдем верхнюю границу возможных его значений. Имеем

$$k+1=(\beta_\mu-\beta_0+\mu)/\mu\geqslant(\beta_\nu-\beta_0+\nu)/\nu,\quad \nu=\overline{1,n}. \tag{10}$$

Так как $k>-1$, то $(\beta_\mu-\beta_0+\mu)/\mu>0$, откуда следует $\beta_\mu-\beta_0+$ $+\mu>0$ (по условию теоремы $\mu>0$). Принимая во внимание, что $j>0$, из (10) получаем $\nu(\beta_\mu-\beta_0+\mu)\geqslant\mu(\beta_\nu-\beta_0+\nu)$, $\nu=\overline{1,n}$, и, в частности, $\mu(\beta_{l_j}-\beta_0+l_j)\leqslant l_j(\beta_\mu-\beta_0+\mu)$, или с учетом того, что $1\leqslant l_j\leqslant j$, имеем $\mu(\beta_{l_j}-\beta_0+l_j)\leqslant j(\beta_\mu-\beta_0+\mu)$, или

$$\lambda_j\mu\leqslant j(\beta_\mu-\beta_0+\mu). \tag{11}$$

Возвратимся теперь к вопросу о величине подранга $\overline{k}$ системы (5), определяемого как обычно равенством $\overline{k}=\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}\overline{k}_j$, где $\overline{k}_j=(\lambda_j\mu-j)/j$ — подранги коэффициентов $R_j(\zeta)$ системы (5). Согласно (11) они удовлетворяют неравенству $\overline{k}_j\leqslant((\beta_\mu-\beta_0+\mu)\,j-j)/j=\beta_\mu-\beta_0+\mu-1$. Отсюда следует, что подранг $\overline{k}$ системы дифференциальных уравнений (5) равен целому числу $\beta_\mu-\beta_0+\mu-1$. Теорема доказана.

Теорема 2. *Если коэффициенты системы* (1) *обладают свойством*

$$A_i(z)=z^{n-i}A_i^*(z^r),\quad i=\overline{0,n}, \tag{12}$$

где r — некоторое целое число, а матричная функция $A_i^*(z)$ такая же по характеру, как и $A_i(z)$, то преобразованием $z^r=\zeta$ подранг системы (1) *понижается на $\nu=p(r-1)/r$ единиц, где p — ранг системы* (1).

Доказательство. Применив преобразование $z^r=\zeta$, преобразуем систему дифференциальных уравнений (1) к виду

$$\sum_{s=0}^{n} B_s(\zeta)\,\zeta^{n-s}\cdot\frac{d^{n-s}w}{d\zeta^{n-s}}=0, \tag{13}$$

где матричные функции $B_s(\zeta)$ выражаются через коэффициенты системы

(1) следующим образом: $B_s(\zeta) = \sum_{i=0}^{s} c_{s-i}^{(i)} A_i^*(\zeta), \quad s = \overline{0, n-1}$, $c_{s-i}^{(i)}$ — некоторые постоянные; $B_n(\zeta) = A_n^*(\zeta)$.

Определим показатели наивысших степеней у матричных функций $B_i(\zeta)$. В силу преобразования $z^r = \zeta$, структуры матричных функций $A_i(z)$ и равенства (12) находим, что показатель наивысшей степени матричной функции $A_i^*(\zeta)$ равен $(\beta_i - n + i)/r$.

Из того, что матрица-функция $B_s(\zeta)$ есть линейная комбинация матричных функций $A_i^*(\zeta)$, заключаем, что показатель b_s наивысшей степени независимого переменного в матричной функции $\zeta^{n-s}B_s(\zeta)$ равен наибольшему из чисел $(\beta_0 - n)/r + n - s, \ldots, (\beta_s - n + s)/r + n - s$, т. е. $b_s = \max\limits_{0 \leqslant j \leqslant s}((\beta_j - n + j)/r + n - j)$. Следовательно, подранг коэффициента $\zeta^{n-s}B_s(\zeta)$ системы (13) равен $\overline{k}_s = \max\limits_{0 \leqslant j \leqslant s}((\beta_j - \beta_0 + j)/rs - 1)$, $s = \overline{1, n-1}$, $\overline{k}_n = (\beta_n - \beta_0 + n)/rn - 1$.

Найдем верхнюю границу для чисел $\overline{k}_s$, $s = \overline{1, n}$. Предположим, что подранг системы (1) определяется показателем наивысшей степени β_μ независимого переменного в коэффициенте $A_\mu(z)$ по формуле

$$k = (\beta_\mu - \beta_0)/\mu > -1. \tag{14}$$

Тогда $(\beta_\mu - \beta_0)/\mu + 1 > 0$. Поскольку $k \geqslant (\beta_j - \beta_0)/j$, $j = \overline{1, n}$, то $(\beta_\mu - \beta_0 + \mu)/\mu \geqslant (\beta_j - \beta_0 + j)/j$, $j = \overline{1, n}$. Учитывая, что $j \leqslant s$ и $\beta_\mu - \beta_0 + \mu > 0$, имеем $(\beta_\mu - \beta_0 + \mu)/\mu \geqslant (\beta_j - \beta_0 + j)/s$. Отсюда следует, что $(\beta_j - \beta_0 + j)/rs \leqslant (\beta_\mu - \beta_0 + \mu)/r\mu$. Тогда $\overline{k}_s = \max\limits_{0 \leqslant j \leqslant s}((\beta_j - \beta_0 + j)/rs) \leqslant (\beta_\mu - \beta_0 + \mu)/\mu r - 1$, $\overline{k}_\mu = (\beta_\mu - \beta_0 + \mu)/\mu r - 1$. Из последних соотношений заключаем, что подранг $\overline{k} = \max\limits_{1 \leqslant s \leqslant n} \overline{k}_s$ системы (13) равен $(\beta_\mu - \beta_0 + \mu)/\mu r - 1$ или в силу (14) $\overline{k} = (k+1)/r - 1$. Таким образом, подстановка $z^r = \zeta$ уменьшила подранг системы на $\nu = (k+1)(r-1)/r$ единиц.

Приведенные теоремы имеют важное значение при отыскании асимптотических рядов как решений системы дифференциальных уравнений при $z = \infty$.

Преобразованием (2) система (1) обращается в систему (5), подранг которой есть целое число. Для такой системы решение представляется в виде нормального асимптотического ряда $w \sim \zeta^\rho \exp\left(\sum_{s=1}^{p} \tau_{p-s}\zeta^s/s\right)\sum_{j=0}^{\infty} u_j \zeta^{-j}$, где p — ранг системы (5), равный $\overline{k} + 1$.

Переходя по формуле (2) к независимому переменному z, имеем решение системы (1) для случая дробного ранга:

$$w \sim z^{\rho/\mu} \exp\left(\sum_{s=1}^{p} \tau_{p-s} z^{s/\mu}/s\right) \cdot \sum_{j=0}^{\infty} u_j z^{-j/\mu}.$$

2. Иррегулярная особая точка $z = 0$. Связь, существующая между рангом системы, полученной из (1) с помощью преобразования $z = 1/\zeta$, и антирангом системы (1), определяет следующая теорема.

Теорема 3. *Если антиранг системы* (1) *равен целому положительному числу* $m = -\varkappa - 1 > 0$, *то система дифференциальных уравнений* (1) *допускает решение, асимптотическое представление которого таково*:

$$w \sim z^r \exp\left(\sum_{s=1}^{m} \tau_{m-s}/sz^s\right) \cdot \sum_{j=0}^{\infty} u_j z^j \tag{15}$$

где $m = \overline{k} + 1$, $\overline{k} + 1$ — *ранг системы, полученной из* (1) *заменой* $z = 1/\zeta$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Подстановкой $z = 1/\zeta$ система (1) обращается в систему

$$\sum_{s=0}^{n} B_s(\zeta)\, d^{n-s}w/d\zeta^{n-s} = 0, \tag{16}$$

где $B_s(\zeta) = \sum\limits_{\gamma=n-s}^{n} \beta_{\gamma,n-s}\zeta^{\gamma+n-s}\cdot A_{n-\gamma}(1/\zeta)$, $s=\overline{0, n-1}$, $B_n(\zeta) = A_n(1/\zeta)$, $\beta_{\gamma,n-s}$ — некоторые постоянные.

Определим наивысшую степень b_s для ζ матрицы-функции $B_s(\zeta)$. Поскольку π_i — наинизшая степень матричной функции $A_i(z)$, то $b_s = \max\limits_{0\leqslant j\leqslant s}(2n-2s+j-\pi_{s-j})$; $b_0 = -\pi_0+2n$. Следовательно, величина подранга $\overline{k}_s$ коэффициента $B_s(\zeta)$ определяется по формуле $\overline{k}_s = \max\limits_{0\leqslant\alpha\leqslant s}((\pi_0-\pi_\alpha-\alpha)/s-1)$, $s\geqslant 1$.

Определим величину подранга системы (16), для чего найдем верхнюю границу чисел $(\pi_0-\pi_\alpha-\alpha)/s$. По определению $\varkappa$ для системы (1) имеем $\varkappa = \min\limits_{1\leqslant\alpha\leqslant n}(\pi_\alpha-\pi_0)/\alpha$, откуда $\varkappa\leqslant(\pi_\alpha-\pi_0)/\alpha$ или $(\pi_0-\pi_\alpha-\alpha)/\alpha\leqslant-\varkappa-1$, $\alpha=\overline{1, n}$. Тогда при некотором значении i индекса α выполняется неравенство $(\pi_0-\pi_\alpha-\alpha)/\alpha\leqslant(\pi_0-\pi_i-i)/i=-\varkappa-1$, $\alpha=\overline{1, n}$. Следовательно, при $s<i: \overline{k}_s = \max\limits_{1\leqslant\alpha\leqslant s}((\pi_0-\pi_\alpha-\alpha)/s-1)\leqslant-\varkappa-2$, а при $s>i$: $\overline{k}_s = -\varkappa-2$. Таким образом, подранг и ранг системы (16) соответственно равны $\overline{k} = \max\limits_{1\leqslant s\leqslant n}\overline{k}_s = -\varkappa-2$; $\overline{k}+1 = -\varkappa-1$.

По условию теоремы антиранг $m>0$, следовательно, ранг системы положителен и равен m. Для систем положительного ранга решение дается в виде асимптотического ряда $w\sim\zeta^\rho\exp\left(\sum\limits_{s=1}^{m}\tau_{m-s}\zeta^s/s\right)\sum\limits_{j=0}^{\infty}u_jz^j$, откуда следует требуемое.

Т е о р е м а 4. *Если система* (1) *имеет дробный антиранг со знаменателем* μ, *то замена независимого переменного по формуле* $z=\zeta^\mu$ *превращает* (1) *в такую систему, антиранг которой — целое число.*

Эта теорема является простым следствием теорем 1 и 3, а из теорем 2 и 3 следует такая теорема.

Т е о р е м а 5. *Если коэффициенты* $A_i(z)$, $i=\overline{0, n}$, *системы дифференциальных уравнений* (1) *удовлетворяют условиям* $z^nA_i(z) = z^iA_i^*(z^r)$, $i=\overline{0, n}$, *где* r — *некоторое целое число, а матрицы-функции* $A_i^*(z^r)$ *имеют тот же характер, что и* $A_i(z)$, *то преобразованием* $z^r=\zeta$ *антиранг системы* (1) *понижается на* $\nu = m(r-1)/r$ *единиц, где* m — *антиранг системы* (1).

Проиллюстрируем способ нахождения асимптотических решений на конкретном примере. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$M_0x^2y'' + (M_{11}\sqrt{x}+M_{12}x)\,y' + M_2y = 0, \tag{17}$$

где

$$y = \mathrm{colon}\,(y_1;\, y_2),\quad M_0 = \begin{Vmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{Vmatrix},\quad M_{11} = \begin{Vmatrix}4 & 2\\ 0 & 6\end{Vmatrix},\quad M_{12} = \begin{Vmatrix}6 & 2\\ 2 & 6\end{Vmatrix},$$

$$M_2 = \begin{Vmatrix}2 & 3\\ 4 & 1\end{Vmatrix},$$

с антирангом $m = 1/2$. Преобразованием $x=t^2$ эта система обращается в систему

$$A_0t^2y'' + (A_{10}+A_{11}t)\,y' + A_2y = 0, \tag{18}$$

где

$$A_0 = \begin{Vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{Vmatrix},\quad A_{10} = \begin{Vmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\end{Vmatrix},\quad A_{11} = \begin{Vmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{Vmatrix},\quad A_2 = \begin{Vmatrix}2 & 3\\ 4 & 1\end{Vmatrix},$$

антиранг которой есть целое число $m = 1$. Определяющее в особой точке $t = 0$ уравнение $\det F_0(r) = 0$ имеет двукратный корень $r = 0$. Следовательно, система (18) допускает два решения, представимых в виде

$$y^{(1)} = a_0^{(1)} - \sum_{j=1}^{\infty} F_0^{-1}(j) F_1(j-1) a_{j-1}^{(1)} t^j, \tag{19}$$

$$y^{(2)} = y^{(1)} \ln|t| + \sum_{j=1}^{\infty} b_j^{(2)} t^j, \tag{20}$$

где $a_0^{(1)} = \operatorname{colon}(1;\ 1)$, $F_0(r) = A_{10}r$, $F_1(r) = A_0 r(r-1) + A_{11}r + A_2$, $b_j^{(2)} = -F_0^{-1}(j)\left[F_1(j-1)\, b_{j-1}^{(2)} + \frac{\partial F_0(j)}{\partial r} a_j^{(1)} + \frac{\partial F_1(j-1)}{\partial r} a_{j-1}^{(1)}\right]$, $j = 0, 1, 2, \ldots$ $\ldots, b_0^{(2)} = b_{-1}^{(2)} = a_{-1}^{(1)} = 0$.

Найдем асимптотические решения системы (18). Преобразование $y = \exp(\alpha/t)\, u$ сводит данную систему к системе

$$A_0 t^2 u'' + (A_{10} + A_{11}t - 2\alpha A_0)\, u' + ((A_0\alpha^2 - A_{10}\alpha)\, t^{-2} + \\ + (2A_0\alpha - A_{11}\alpha)\, t^{-1} + A_2)\, u = 0, \tag{21}$$

характеристическая матрица-функция которой такова:

$$L(\alpha, r, t) \equiv t^{r-2}\{(A_0\alpha^2 - A_{10}\alpha) + [(A_{10} - 2A_0\alpha)\, r + (2A_0 - A_{11})\, \alpha]\, t + \\ + [A_0 r(r-1) + A_{11}r + A_2]\, t^2\}. \tag{22}$$

Характеристическое уравнение

$$\det \| A_0\alpha^2 - A_{10}\alpha \| = 0 \tag{23}$$

имеет корни $\alpha_{1,2} = 0$, $\alpha_3 = 2$, $\alpha_4 = 3$. Двукратный нулевой корень $\alpha = 0$ обращает систему (21) к виду первоначальной системы (18) и в данном случае не представляет интереса. При $\alpha = 2$ определяющее в особой точке $t = 0$ уравнение

$$\det \| (A_{10} - 4A_0)\, r + 2\,(2A_0 - A_{11}) \| = 0 \tag{24}$$

обращается в тождество, если $r_1 = 1$, $r_2 = -2$. Следовательно, система (21) при $\alpha = 2$ допускает два асимптотических решения

$$u^{(1)} \sim t\left(u_0^{(1)} - \sum_{j=1}^{\infty} F_{02}^{-1}(j+1)\, F_1(j)\, u_{j-1}^{(1)} t^j\right), \tag{25}$$

$$u^{(2)} \sim t^{-2}\left(u_0^{(2)} - \sum_{j=1}^{\infty} F_{02}^{-1}(j-2)\, F_1(j-3)\, u_{j-1}^{(2)} t^j\right), \tag{26}$$

где $u_0^{(1)} = \operatorname{colon}(1;\ -2)$, $u_0^{(2)} = \operatorname{colon}(1;\ 1)$, $F_{02}(r) = \| (A_{10} - 4A_0)\, r + 2\,(2A_0 - A_{11}) \|$, $F_1(r) = \| A_0 r(r-1) + A_{11}r + A_2 \|$.

В случае $\alpha = 3$ определяющее уравнение принимает вид

$$\det \| (A_{10} - 6A_0)\, r + 3\,(2A_0 - A_{11}) \| = 0 \tag{27}$$

и обращается в тождество при $r_1 = -1$, $r_2 = 3/4$. Тогда

$$u^{(3)} \sim t^{-1}\left(u_0^{(3)} - \sum_{j=1}^{\infty} F_{03}^{-1}(j-1)\, F_1(j-2)\, u_{j-1}^{(3)} t^j\right), \tag{28}$$

$$u^{(4)} \sim t^{3/4}\left(u_0^{(4)} - \sum_{j=1}^{\infty} F_{03}^{-1}(j+3/4)\, F_1(j-1/4)\, u_{j-1}^{(4)} t^j\right), \tag{29}$$

где $u_0^{(3)} = \operatorname{colon}(1;\ 1)$, $u_0^{(4)} = \operatorname{colon}(1; -4/3)$, $F_{03}(r) = \| (A_{10} - 6A_0)\, r + 3\,(2A_0 - A_{11}) \|$, $F_1(r) = \| A_0 r(r-1) + A_{11}r + A_2 \|$.

Таким образом, система дифференциальных уравнений (18) имеет два решения в виде степенных рядов (19), (20) и четыре решения в виде асимптотических рядов

$$y_*^{(1)} \sim t \exp(2/t) \left(u_0^{(1)} - \sum_{j=1}^{\infty} F_{02}^{-1}(j+1) F_1(j) u_{j-1}^{(1)} t^j \right),$$

$$y_*^{(2)} \sim t^{-2} \exp(2/t) \left(u_0^{(2)} - \sum_{j=1}^{\infty} F_{02}^{-1}(j-2) F_1(j-3) u_{j-1}^{(2)} t^j \right),$$

$$y_*^{(3)} \sim t^{-1} \exp(3/t) \left(u_0^{(3)} - \sum_{j=1}^{\infty} F_{03}^{-1}(j-1) F_1(j-2) u_{j-1}^{(3)} t^j \right),$$

$$y_*^{(4)} \sim t^{3/4} \exp(3/t) \left(u_0^{(4)} - \sum_{j=1}^{\infty} F_{03}^{-1}(j+3/4) F_1(j-1/4) u_{j-1}^{(4)} t^j \right),$$

формально ей удовлетворяющих.

Возвращаясь к первоначальной переменной x по формуле $t = \sqrt{x}$, получаем асимптотические решения исходной системы (17):

$$y_*^{(1)} \sim \sqrt{x} \exp(2/\sqrt{x}) \left(u_0^{(1)} - \sum_{j=1}^{\infty} F_{02}^{-1}(j+1) F_1(j) u_{j-1}^{(1)} x^{j/2} \right),$$

$$y_*^{(2)} \sim \frac{1}{x} \exp(2/\sqrt{x}) \left(u_0^{(2)} - \sum_{j=1}^{\infty} F_{02}^{-1}(j-2) F_1(j-3) u_{j-1}^{(2)} x^{j/2} \right),$$

$$y_*^{(3)} \sim \frac{1}{\sqrt{x}} \exp(3/\sqrt{x}) \left(u_0^{(3)} - \sum_{j=1}^{\infty} F_{03}^{-1}(j-1) F_1(j-2) u_{j-1}^{(3)} x^{j/2} \right),$$

$$y_*^{(4)} \sim \sqrt[8]{x^3} \exp(3/\sqrt{x}) \left(u_0^{(4)} - \sum_{j=1}^{\infty} F_{03}^{-1}(j+3/4) F_1(j-1/4) u_{j-1}^{(4)} x^{j/2} \right).$$

В заключение отметим, что система (1) с дробным подрангом (антирангом) μ_1/μ, где μ_1 и μ — взаимно простые числа, имеет не менее μ асимптотических поднормальных решений.

1. *Латышева К. Я., Терещенко Н. И.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений и их приложений.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1970.— 393 с.
2. *Латышева К. Я., Терещенко Н. И., Орел Г. С.* Нормально-регулярные решения и их приложения.— Киев : Вища шк., 1974.— 136 с.
3. *Терещенко Н. И.* О решениях некоторых систем линейных дифференциальных уравнений с особыми точками // Укр. мат. журн.— 1958.— 10, № 2.— С. 220—223.
4. *Иванюк Н. Н.* Исследование решений системы линейных дифференциальных уравнений в окрестности особых точек.— Киев, 1985.— 62 с.— Деп. в УкрНИИНТИ, № 17.

Хмельниц. технол. ин-т

Получено 23.05.85