УДК 517.5

А. К. Кушпель

Поведение констант Лебега линейных методов суммирования рядов Фурье, реализующих наилучшее по порядку приближение

Пусть X — пространство бесконечных треугольных матриц $\Lambda = \| \lambda_k^{(n)} \|$, $\lambda_k^{(n)} = 0$, при $k \geqslant n$, с помощью которых каждой непрерывной 2π-периодической функции f, $f \in C_{2\pi}$, с рядом Фурье $S[f(x)] = a_0(f)/2 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k(f, x) = a_0(f)/2 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx$ ставится в соответствие последовательность полиномов $U_n(f, \Lambda, \cdot) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k^{(n)} A_k(f, \cdot)$. Пусть также $\mathfrak{N} \subset C_{2\pi}$ и $E_n(\mathfrak{N}) = \sup_{f \in \mathfrak{N}} \inf_{T_{n-1}} \| f(\cdot) - T_{n-1}(\cdot) \|_C$, где T_{n-1} — тригонометрический полином порядка $\leqslant n-1$.

В качестве функциональных классов $\mathfrak{N}$ будем рассматривать множества $C_{\beta,\infty}^{\psi}$ [1], которые вводятся следующим образом. Пусть $f(x)$ — непрерывная 2π-периодическая функция и $S[f(x)] = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(f, x)$ — ее ряд Фурье, $\psi(k)$ — произвольная фиксированная функция натурального аргумента и β — фиксированное действительное число, $\beta \in R$. Предположим, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (1/\psi(k)) A_k(f, x + \beta\pi/2k)$ является рядом Фурье некоторой функции $\varphi(\cdot) \in U_\infty$, где $U_\infty \overset{\mathrm{df}}{=} \{\varphi : \varphi \in L^\infty, \|\varphi\|_\infty \leqslant 1\}$. Множество всех непрерывных функций f, удовлетворяющих таким условиям, обозначим через $C_{\beta,\infty}^{\psi}$. При этом будем предполагать, что функция $\psi \in F^{(1)}$, т. е. удовлетворяет следующим условиям: 1) $\psi(v)$ при всех $v \geqslant 0$, выпукла вниз и $\lim_{n\to\infty} \psi(v) = 0$; 2) $|\mu'(\psi, t)| \leqslant K$, $t \geqslant t_0 > 0$, где $\mu(\psi, t) \overset{\mathrm{df}}{=} \psi^{-1}(\psi(t)/2)$, $t > 0$, $\psi^{-1}(\cdot)$ — функция, обратная к функции $\psi(\cdot)$. Кроме того, будем говорить, что функция $\psi(\cdot)$ принадлежит множеству P, если $\Delta_2(1/\psi(k)) = 1/\psi(k) - 2/\psi(k-1) + 1/\psi(k-2) \geqslant 0$.

Обозначим через $\Omega_C(\mathfrak{N})$ множество матриц $\Lambda \in X$, удовлетворяющих условию $\mathscr{E}_n(\Lambda) \overset{\mathrm{df}}{=} \sup_{f \in \mathfrak{N}} \| f(\cdot) - U_n(f, \Lambda, \cdot) \|_C \leqslant C E_n(\mathfrak{N})$, где постоянная $C \geqslant 1$ и не зависит от $n \in N$.

Заметим, что $\Omega_C(\mathfrak{N})$ — выпуклое множество в пространстве X. Действительно, пусть $\Lambda_1, \Lambda_2 \in \Omega_C(\mathfrak{N})$, тогда $\forall p \in [0, 1]$ имеем

$$\sup_{f \in \mathfrak{N}} \| f(\cdot) - U_n(f, p\Lambda_1 + (1-p)\Lambda_2, \cdot) \|_C =$$

$$= \sup_{f \in \mathfrak{N}} \| p(f(\cdot) - U_n(f, \Lambda_1, \cdot)) + (1-p)(f(\cdot) - U_n(f, \Lambda_2, \cdot)) \|_C \leqslant C E_n(\mathfrak{N}).$$

Каждой матрице $\Lambda \in \Omega_C(\Lambda)$ поставим в соответствие последовательность $\{L_n(\Lambda)\}_{n=1}^{\infty}$, где $L_n(\Lambda) = \pi^{-1} \| \lambda_0^n/2 + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{(n)} \cos kt \|_L$ — константы Лебега.

В принятых обозначениях справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Для любых* $C \geqslant 1$, $\Lambda \in \Omega_C(C_{\beta,\infty}^{\psi})$, $\psi \in F^{(1)} \cap P$, $\beta \in R$, *выполняется асимптотическое равенство*

$$L_n(\Lambda) = 4\pi^{-2} \ln(\min(n/(\psi^{-1}(\psi(n)/2) - n), n)) + O(1), \quad n \to \infty.$$

Доказательство. В работе [2] показано, что при условии $\psi \in F^{(1)}$ выполняются неравенства $C_1\psi(n) \leqslant E_n(C_{\beta,\infty}^{\psi}) \leqslant C_2\psi(n)$ и, стало быть, если $\Lambda_i \in \Omega_C(C_{\beta,\infty}^{\psi})$, $i = 1, 2$, то

$$\sup_{f \in C_{\beta,\infty}^{\psi}} \| f(\cdot) - U_n(f, \Lambda_i, \cdot) \|_C \leqslant C\psi(n), \quad i = 1, 2. \tag{1}$$

Здесь и ниже C и C_i — постоянные, вообще говоря, различные. Оценка (1) позволяет заключить, что

$$\sup_{f \in C_{\beta,\infty}^{\psi}} \| U_n(f, \Lambda_1, \cdot) - U_n(f, \Lambda_2, \cdot) \|_C \leqslant 2C\psi(n). \tag{2}$$

Положим $Q_n(\Lambda_i, x) = Q_n^{(i)}(x) = \lambda_{0,i}^{(n)}/2 + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_{k,i}^{(n)} \cos kx, \quad i = 1, 2.$ Легко видеть, что

$$U_n(f, \Lambda_i, \cdot) = \pi^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} Q_n^{(i)}(\cdot - t) f(t)\, dt \overset{\mathrm{df}}{=} (Q_n^{(i)} * f)(\cdot).$$

В [2, с. 26, 39] показано, что для любой функции $\psi \in F^{(1)}$ и $\beta \in R$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) \cos(kt + \beta\pi/2)$ является рядом Фурье некоторой суммируемой функции, которую обозначим $K(\cdot)$. Поэтому, если $f \in C_{\beta,\infty}^{\psi}$, то справедливо представление

$$f(\cdot) = (K*\varphi)(\cdot) + C, \quad \|\varphi\|_\infty \leqslant 1, \quad C \in R. \tag{3}$$

Поскольку $C_{\beta,\infty}^{\psi} \supset R$, то из оценки (1) следует, что для любой матрицы выполняется условие $\lambda_0^{(n)} = 1$ (иначе величина $\mathscr{E}_n(\Lambda)$ была бы равна ∞). С учетом этого, а также соотношений (2) и (3) имеем

$$\sup_{f \in C_{\beta,\infty}^{\psi}} \| U_n(f, \Lambda_1, \cdot) - U_n(f, \Lambda_2, \cdot) \|_C =$$

$$= \sup_{\|\varphi\|_\infty \leqslant 1} \| K*\varphi*Q_n^{(1)} - K*\varphi*Q_n^{(2)} \|_C = \| K*(Q_n^{(1)} - Q_n^{(2)}) \|_L \leqslant 2C\psi(n). \tag{4}$$

Пусть

$$K_n^{-1}(t) \overset{\mathrm{df}}{=} \sum_{k=1}^{n} (\psi(k))^{-1} \cos(kt + \beta\pi/2). \tag{5}$$

Тогда для констант Лебега $L_n(\Lambda_1)$ и $L_n(\Lambda_2)$ с учетом неравенства (4) получаем оценку

$$| L_n(\Lambda_1) - L_n(\Lambda_2) | \leqslant \pi^{-1} \| Q_n^{(1)} - Q_n^{(2)} \|_L = \pi^{-1} \| (Q_n^{(1)} - Q_n^{(2)}) * K * K_n^{-1} \|_L =$$

$$\leqslant \pi^{-1} \| (Q_n^{(1)} - Q_n^{(2)}) * K \|_L \| K_n^{-1} \|_{L,L} \leqslant 2\pi^{-1} C\psi(n) \| K_n^{-1} \|_{L,L}, \tag{6}$$

где $\| K_n^{-1} \|_{L^p, L^p} \overset{\mathrm{df}}{=} \sup_{\|T_n\|_{L^p} \leqslant 1} \| T_n * K_n^{-1} \|_{L^p}$, $L \equiv L^1$, — норма оператора K_n^{-1}, действующего из L^p в L^p по формуле $f \to K_n^{-1} * f$. Из общей схемы рассуждений, приведенной в [4], следует

$$\| K_n^{-1} \|_{L,L} \leqslant \| K_n^{-1} \|_{L^\infty, L^\infty} = \sup_{\|T_n\|_\infty \leqslant 1} \| K_n^{-1} * T_n \|_{L^\infty}. \tag{7}$$

Далее, так как

$$\| K_n^{-1} \|_{L^\infty, L^\infty} \leqslant \sup_{\|T_n\|_C \leqslant 1} \| T_n * K_{n,1}^{-1} \|_C + \sup_{\|T_n\|_C \leqslant 1} \| T_n * K_{n,2}^{-1} \|_C, \tag{8}$$

где $K_{n,1}^{-1}(t) = \sum_{k=1}^{n} (1/\psi(k)) \cos kt$, $K_{n,2}^{-1}(t) = \sum_{k=1}^{n} (1/\psi(k)) \sin kt$, и по условию теоремы $\Delta^2(1/\psi(k)) = 1/\psi(k) - 2/\psi(k-1) + 1/\psi(k-2) \geqslant 0$, $k = \overline{3, n}$, то, как следует из работы [3],

$$\sup_{\|T_n\|_C \leqslant 1} \| T_n * K_{n,1}^{-1} \|_C = \sup_{\|T_n\| \leqslant 1} \| T_n * K_{n,2}^{-1} \|_C = 1/\psi(n). \tag{9}$$

Сравнивая соотношения (7), (8) и (9), находим

$$\| K_n^{-1} \|_{L,L} \leqslant 2/\psi(n). \tag{10}$$

Таким образом, подставляя оценку (10) в (6), получаем

$$| L_n(\Lambda_1) - L_n(\Lambda_2) | \leqslant 4C. \tag{11}$$

Отметим, что неравенство (11) выполняется для любых двух матриц Λ_1 и Λ_2 из множества $\Omega_C(C^{\psi}_{\beta,\infty})$.

В работе [2] построен линейный метод суммирования рядов Фурье, реализующий наилучшее по порядку приближение на классах функций $C^{\psi}_{\beta,\infty}$, т. е. для некоторой постоянной $C \,\forall n \in N$ выполняется соотношение

$$\sup_{f \in C^{\psi}_{\beta,\infty}} \| f(\cdot) - U_n(f, \Lambda^*, \cdot) \|_C \leqslant C E_n (C^{\psi}_{\beta,\infty}) \leqslant C_1 \psi(n).$$

Следовательно, $\Lambda^* \in \Omega_C(C^{\psi}_{\beta,\infty})$ и для любой матрицы $\Lambda_1 \in \Omega_C(C^{\psi}_{\beta,\infty})$ справедлива оценка

$$| L_n(\Lambda_1) - L_n(\Lambda^*) | \leqslant 4C. \tag{12}$$

Изучим величины $L_n(\Lambda^*)$. Метод суммирования Λ^* порождается треугольной матрицей $\lambda_k^{(n)} = \lambda_k(k/n)$,

$$\lambda_n(u) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant u \leqslant c_n \\ 1 - \psi(n)(u - c_n)/(1 - c_n)\psi(nu), & c_n \leqslant u \leqslant 1, \\ 0, & u \geqslant 1, \end{cases} \tag{13}$$

где $c_n = 1 - 1/\theta x(n)$, $x(n) = n/(\mu(n) - n)$, $\mu(t) = \psi^{-1}(\psi(t)/2)$, а $\psi^{-1}(\cdot)$ — функция, обратная к $\psi(\cdot)$. Постоянная $\theta \geqslant 1$ выбирается так, что $\theta x(n) \geqslant 1 \,\forall n$.

Покажем, что в условиях теоремы функции $\lambda_n(u)$ выпуклы при $0 \leqslant k/n \leqslant 1$. При $2 + nc_n \leqslant k \leqslant n$ имеем

$$\Delta_2(\lambda_n(k/n)) = \Delta_2(1 - \psi(n)(k - nc_n)/(1 - c_n)\psi(k)) = (-\psi(n)/(1 - c_n)) \times$$
$$\times \Delta_2((k - nc_n)/\psi(k)) = (-\psi(n)/(1 - c_n))((k - nc_n)/\psi(k) - 2(k - 1 - nc_n)/$$
$$/\psi(k-1) + (k - 2 - nc_n)/\psi(k-2)) = (-\psi(n)/(1 - c_n))(((k-1) -$$
$$- nc_n)/\psi(k) - 2(k - 1 - nc_n)/\psi(k-1) + (k - 1 - nc_n)/\psi(k-2) +$$
$$+ 1/\psi(k) - 1/\psi(k+2)) = (-\psi(n)/(1 - c_n))(\Delta_2(1/\psi(k))(k - 1 - nc_n) +$$
$$+ (1/\psi(k) - 1/\psi(k-2)).$$

Так как $k - 1 - nc_n > 0$ и в силу того, что $\psi \in P$, $\Delta_2(1/\psi(k)) \geqslant 0$, $1/\psi(k) - 1/\psi(k-2) \geqslant 0$, находим

$$\Delta_2 \lambda_n(k/n) \leqslant 0, \quad 2 + nc_n \leqslant k \leqslant n. \tag{14}$$

Из определения (13) следует, что $\lambda_n(k/n)$ постоянна при $1 \leqslant k \leqslant nc_n$ и монотонно убывает при $nc_n \leqslant k \leqslant n$. Отсюда и из (14) следует факт выпуклости последовательности $\lambda_n(k/n)$ при $1 \leqslant k \leqslant n$. Поэтому для констант Лебега линейного метода суммирования Λ^* справедлива формула (см., например, [5])

$$L_n(\Lambda^*) = 4\pi^{-2} \sum_{k=1}^{n} \lambda_{n-k}^{(n)}/k + O(1). \tag{15}$$

Подставляя (13) в (15), находим

$$L_n(\Lambda^*) = 4\pi^{-2} \Big(\sum_{k=n-[nc_n]}^{n} 1/k + \sum_{k=1}^{n-[nc_n]-1} (n(1 - c_n)\psi(n-k) -$$
$$- \psi(n)(n - k - nc_n))/n(1 - c_n)\psi(n-k)k), \tag{16}$$

где $[a]$ обозначает целую часть числа a. Заметим, что при всех $n \in \mathbb{N}$ $n - [nc_n] \geqslant 1$ и, следовательно, $\max n/(n - [c_n n]) \leqslant n$. Далее,

$$\sum_{k=n-[nc_n]}^{n} 1/k = \ln n/(n - [nc_n]) + O(1) = \ln n/(n - nc_n + \{nc_n\}) + O(1) =$$
$$= \ln(\min(n/(n - nc_n), n) + O(1), \tag{17}$$

где $\{a\}$ обозначает дробную часть числа a. Так как $n - nc_n = (\psi^{-1}(\psi(n)/2) - n)/\theta$, то из соотношения (17) следует

$$\sum_{k=n-[nc_n]}^{n} 1/k = \ln(\min(x(n), n)) + O(1). \tag{18}$$

Таким образом, с учетом оценки (12) для завершения доказательства теоремы достаточно показать, что вторая сумма в (16) ограничена. Поскольку функция $\lambda_n(v)$ выпукла при $c_n \leqslant v \leqslant 1$, то $|\lambda_n'(v)| \leqslant |\lambda_n'(1)|$ и

$$\lambda_n((n-k)/n) \leqslant |\lambda_n'(1)|\, k/n, \quad 1 \leqslant k \leqslant n - [nc_n] - 1, \tag{19}$$

причем

$$|\lambda_n'(1)| = |1/(1-c_n) - \psi'(n)\, n/\psi(n)|. \tag{20}$$

Пусть $\alpha = \{nc_n\} + 1$, т. е. $1 < \alpha < 2$. Применяя соотношения (19) и (20), находим

$$\sum_{k=1}^{n-[nc_n]-1} \lambda_{n-k}^{(n)}/k \leqslant |\lambda_n'(1)|\, n^{-1}(n - [nc_n] - 1) = |\lambda_n'(1)|\,(n(1-c_n) - \alpha)/n =$$

$$= |\lambda_n'(1)|\,(1-c_n) - |\lambda_n'(1)|\,\alpha/n \leqslant 1 + |\psi'(n)\, n(1-c_n))/\psi(n)| +$$

$$+ |\alpha/(1-c_n)\, n| + |\psi'(n)\,\alpha/\psi(n)|. \tag{21}$$

Оценим сначала второе слагаемое в (21). Так как функция $\psi(\cdot)$ выпукла, то

$$\frac{1}{2}\psi(t) = \psi(t) - \psi(\mu(t)) = -\int_t^{\mu(t)} \psi'(\tau)\, d\tau \leqslant |\psi'(\mu(t))|\,(\mu(t) - t). \tag{22}$$

По условию теоремы $\psi(\cdot) \in F^{(1)}$, поэтому $|\mu'(t)| \leqslant C$ и

$$|\psi'(t)/2| = |\psi(\mu(t))'| = |\psi'(\mu(t))\,\mu'(t)| \leqslant C\,|\psi'(\mu(t))|. \tag{23}$$

Из (22) и (23) следует

$$\psi(t) \geqslant C\psi'(t)\,(\mu(t) - t). \tag{24}$$

Применяя неравенство (24) к оценке второго слагаемого в (21), находим

$$|\psi'(n)\, n(1-c_n)/\psi(n)| \leqslant C. \tag{25}$$

Пусть

$$\mu(n) - n \geqslant 1, \quad n \in N. \tag{26}$$

Тогда

$$\alpha/(1-c_n)\, n = \alpha/(\mu(n) - n) \leqslant \alpha. \tag{27}$$

Из оценки (27) следует ограниченность третьего слагаемого в (21). Рассмотрим теперь четвертое слагаемое в (21). Учитывая оценки (22) и (26), находим

$$|\psi'(n)\,\alpha/\psi(n)| \leqslant \alpha. \tag{28}$$

Сопоставление соотношений (21), (25) и (28) доказывает ограниченность второго слагаемого в (16) при условии (26). Если же условие (26) не выполняется, то $\mu(n) - n < 1$ и $n - [c_n n] = n - [n - (\mu(n) - n)/\theta] = 1$. Поэтому вторая сумма в (26) содержит лишь одно слагаемое, величина которого ограничена. Теорема доказана.

Сделаем теперь некоторые замечания. Нетрудно проверить, что функции $\psi_1(t) = t^{-\alpha}$, $\alpha \geqslant 1$ и $\psi_2(t) = \exp(-\beta(t+\xi)^\gamma)$, $\beta,\ \gamma > 0$, принадлежат множеству $F^{(1)} \cap P$, где $\xi \geqslant (\gamma^{-1} - 1)^{\gamma-1}$ при $0 < \gamma < 1$ и $\xi = 0$ при $\gamma \geqslant 1$, и

$$n/(\psi_1^{-1}(\psi_1(n)/2) - n) = 1/(2^{1/\alpha} - 1), \tag{29}$$

$$n/\psi_2^{-1}(\psi_2(n)/2 - n) = n^\gamma O(1). \tag{30}$$

Как известно [1, с. 10], при $\psi(t) = t^{-\alpha}$ классы $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ совпадают с классами функций, имеющих ограниченную в смысле Вейля—Надя производную. В этом случае с учетом (29) установленная теорема утверждает, что $L_n(\Lambda) = O(1)$. Если же $\psi(t) = \psi_2(t) = \exp(-\beta t^{\gamma})$, то при $0 < \gamma < 1$ множества $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ есть классы бесконечно дифференцируемых функций, при $\gamma = 1$ — это классы аналитических функций. В случае, когда $\gamma > 1$, множество состоит из целых функций. Из сопоставления доказанной теоремы и соотношения (30) следует справедливость следующего утверждения.

Теорема 2. *Пусть* $\psi(k) = \psi_2(k)$ *и* $\beta \in R$ — *произвольное действительное число. Тогда для любых* $C \geqslant 1$ *и* $\Lambda \in \Omega_C(C^{\psi}_{\beta,\infty})$ *справедливо асимптотическое равенство*

$$L_n(\Lambda) = 4\pi^{-2} \min(1, \gamma) \ln n + O(1), \quad n \to \infty.$$

1. *Степанец А. И.* Классификация периодических функций и приближение их суммами Фурье.— Киев, 1983.— 57 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 83.69).
2. *Степанец А. И., Кушпель А. К.* Наилучшие приближения и поперечники классов периодических функций.— Киев, 1984.— 44 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 84.15).
3. *Стечкин С. Б.* К проблеме множителей для тригонометрических полиномов // Докл. АН СССР.— 1950.— 75, № 2.— С. 165—168.
4. *Моторный В. П.* Приближение периодических функций тригонометрическими полиномами // Мат. заметки.— 1973.— 16, № 1.— С. 15—26.
5. *Тиман А. Ф.* Теория приближения функций действительного переменного.— М. : Физматгиз, 1960.— 504 с.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 20.09.85