УДК 512.544

Н. Ф. Кузенный, Н. Н. Семко

Строение периодических метабелевых метагамильтоновых групп с неэлементарным коммутантом

Естественным обобщением гамильтоновых групп являются метагамильтоновы группы, т. е. группы, у которых всякая неабелева подгруппа инвариантна. Изучение свойств метагамильтоновых групп началось Н. Ф. Сесекиным и Г. М. Ромалисом и проводилось в работах [1—5].

Первые результаты, дающие конструктивное описание некоторых классов метагамильтоновых групп, получены в работах [6—8]. В частности, в [6] описаны ненильпотентные метагамильтоновы группы, а в [7, 8] получена классификация нильпотентных метагамильтоновых групп класса больше 2.

В работах [9—13] получено полное описание разрешимых метагамильтоновых групп. Однако лишь описание разрешимых ненильпотентных и периодических неметабелевых метагамильтоновых групп опубликовано с доказательствами.

Настоящая работа посвящена описанию строения периодических метабелевых метагамильтоновых групп с неэлементарным коммутантом. Оказалось, что существуют четыре типа таких групп.

В дальнейшем для сокращения записи $*$-группой будем называть конечную метабелеву метагамильтонову p-группу с неэлементарным коммутантом.

Приведем известные результаты, которые понадобятся нам в дальнейшем.

1 [9]. Коммутант нильпотентной метагамильтоновой группы содержится во всякой неабелевой подгруппе и является либо циклической p-группой, либо абелевой группой типа (p, p^{α}), либо абелевой группой типа (p, p, p).

2 [14]. Пусть $G = \langle x\rangle\cdot\langle y\rangle$—метациклическая группа, $|G'| \leqslant p$, $|x| = p^{\beta}$, $|y| = p^{\alpha}$, $\langle x\rangle$ — циклическая подгруппа наибольшего порядка из G, содержащая G'. Тогда $G = \langle x\rangle \leftthreetimes \langle d\rangle$, где $d = y^t x^{t_1 p^{\beta-\alpha}}$, $(t, p) = 1$.

3 [15]. Пусть G — конечная метабелева группа, x и y — ее произвольные элементы. Тогда $(xy)^n = x^n y^n [x, y]^{-\frac{1}{2}n(n-1)}$.

Лемма 1. *Пусть G — $*$-группа с двумя образующими элементами. Тогда G — метациклическая группа.*

Доказательство. Ясно, что $G/G' = \langle\langle c\rangle a\rangle x \langle\langle c\rangle b\rangle$, где $G' = \langle c\rangle$, и потому $G = \langle c\rangle\langle a\rangle\langle b\rangle$. Если $c \in \langle a\rangle$ или $c \in \langle b\rangle$, то, очевидно, G — метациклическая группа. Пусть $c \notin \langle a\rangle$, $c \notin \langle b\rangle$ и пусть $\langle c\rangle \cap \langle a\rangle = \langle c_1\rangle$. Очевидно, что $\langle a\rangle \cap \langle b\rangle \leqslant \langle c_1\rangle$ и найдутся такие $a_1 \in \langle a\rangle$, $b_1 \in \langle b\rangle$, что $|[a_1, b_1]| = p$. Далее, $G/\langle c_1\rangle = (\langle\langle c_1\rangle c\rangle \times \langle\langle c_1\rangle a\rangle) \leftthreetimes \langle\langle c_1\rangle b$, $(\langle\langle c_1\rangle a_1\rangle \times \langle\langle c_1\rangle b_1\rangle) \cap \langle\langle c_1\rangle c\rangle = \langle c_1\rangle$ и, значит, $c \notin \langle a_1, b_1\rangle$. Однако последнее соотношение противоречит результату 1, что и доказывает лемму.

Лемма 2. [11, 13]. *Метациклическая группа G является $*$-группой, если $G = \langle a\rangle\langle b\rangle$, $|a| = p^{\alpha}$, $|b| = p^{\beta}$, $b^{-1}ab = a^{1+p^k}$, α, β, k — натуральные числа, $2 \leqslant \alpha - k \leqslant k \leqslant \alpha - 2$, при $p = 2$ $k \geqslant 2$, $\langle a\rangle \cap \langle b\rangle = \langle a^{sp^m}\rangle = \langle b^{p^n}\rangle$, $(s, p) = 1$, $a^{sp^m} = b^{p^n}$, $m \geqslant k$, $\alpha \geqslant m$, $\beta \geqslant n$, $n \geqslant \alpha - k$. Если $\langle a\rangle \cap \langle b\rangle \neq 1$, то $k < m < \alpha < \beta$ и $G = \langle b\rangle\langle d\rangle$, где $\langle b\rangle \cap \langle d\rangle = 1$, $|d| = p^m$, $d = a^t b^{p^{n-m}}$, $t + s \equiv 0 \pmod{p^{\alpha-m}}$.*

Следствие. *В группе G из леммы 2 $\langle a^{p^{\alpha-1}}\rangle\langle b\rangle \ntrianglerighteq G'$ и, значит, в G существует нижний слой N порядка p^2.*

Лемма 3. *$*$-Группа G с циклическим коммутантом является группой одного из следующих типов:*

1) *$G = A \times C$, где $A = \langle a\rangle\langle b\rangle$ — группа из леммы 2, C — абелева группа, экспонента которой не превышает $p^{2k-\alpha+1}$;*

2) *$G = (A \leftthreetimes B) \times C$, где $A = \langle a\rangle \leftthreetimes \langle b\rangle$ — группа из леммы 2, $B = \langle b_1\rangle \times \ldots$*

$\ldots \times \langle b_i\rangle \times \ldots \times \langle b_r\rangle$, $1 \leqslant r \leqslant \min(\alpha - k - 1,\ \beta + k - \alpha)$, $[b, b_i] = 1$, $b_i^{-1}ab_i = a^{1+p^{k_i}}$, *при* $i = 1$ *полагаем* $k_{i-1} = k$, $k_i > k_{i-1}$, $\alpha > k_r$, $\alpha - k < \beta \leqslant k_1 + k - \alpha + 1$, $|b_i| = p^{\beta_i}$, *при* $i = 1$ *полагаем* $\beta_{i-1} = \beta$, $\alpha - k_i \leqslant \beta_i < \beta_{i-1} + k_{i-1} - k_i$, C*—абелева группа, экспонента которой не превышает* $p^{2k-\alpha+1}$.

Неразложимая в прямое произведение своих не тривиальных подгрупп группа G *настоящего типа представима также в виде* $G = A\cdot D$, *где* $Z(G) \geqslant D$, $A \cap D = \langle b\rangle \cap D = \langle b^{p^{\alpha-k}}\rangle$, *экспонента* D *не превышает* $p^{\beta+k-k_1}$.

Доказательство. Предположим сначала, что G не разлагается в прямое произведение своих нетривиальных подгрупп. Пусть $G = \langle c\rangle$. Тогда $G/\langle c\rangle = \langle\langle c\rangle x_1\rangle x \ldots x \langle\langle c\rangle x_l\rangle$, где $b \geqslant 2$. Так как $G' = \langle c\rangle$, то найдутся $a = x_i$, $b = x_j$ $(i, j = 1, \ldots, l)$ такие, что $|[a, b]| = |c|$. Не нарушая общности, можно считать $a = x_{l-1}$, $b = x_l$. Пусть $A = \langle a, b\rangle$ и $l - 2 = r$. Тогда в силу лемм 1 и 2 A — метациклическая $*$-группа, образующие элементы которой удовлетворяют соотношениям леммы 2. Очевидно, что $G = \langle A, x_1, \ldots, x_r\rangle$.

Покажем, что $A\langle x_i\rangle = A \leftthreetimes \langle b_i\rangle$ при $i = 1, \ldots, r$. Действительно, если $\langle x_i\rangle \cap A = 1$, то полагая $x_i = b_i$ имеем $A\langle x_i\rangle = A \leftthreetimes \langle b_i\rangle$. Предположим, что $\langle x_i\rangle \cap A \neq 1$. Тогда $\langle x_i\rangle \cap A = \langle a\rangle \cap \langle x_i\rangle$. Пусть $|x_i| \leqslant |a|$. Поскольку, очевидно, $\langle a\rangle \geqslant G'$, то $A^i = \langle x_i, a\rangle$ — метациклическая группа. Если $(A^i)' = 1$, либо A^i —$*$-группа, то $\langle a\rangle$ дополняема в A^i. Если $|(A^i)'| = p$, то $\langle a\rangle$ дополняема в A^i в силу результата 2. Обозначая в обоих рассмотренных случаях через $\langle b_i\rangle$ одно из дополнений $\langle a\rangle$ в A^i, имеем $A\langle x_i\rangle = A \leftthreetimes \langle b_i\rangle$. Пусть $|x_i| > |a|$. Тогда $A^i = \langle x_i, a\rangle = \langle x_i\rangle \leftthreetimes \langle d_i\rangle$. В самом деле, если $|(A^i)'| \geqslant p^2$, то наше утверждение следует из леммы 2, если $|(A^i)'| \leqslant p$, то доказываемое утверждение следует из результата 2. Далее, пользуясь представлением d_i, легко убедиться, что $[d_i, b] \neq 1$. Отсюда существует число Δ_i такое, что $|[d_i^{\Delta_i}, b]| = p$, поэтому $\langle [d_i^{\Delta_i}, b]\rangle\langle b\rangle \ntriangleright \langle a^{p^k}\rangle$ (см. следствие леммы 2), что противоречит результату 1. Следовательно, соотношение $|x_i| > |a|$ невозможно и, значит, $A\langle x_i\rangle = A \leftthreetimes \langle b_i\rangle$, а потому $G = (\ldots((A \leftthreetimes \langle b_1\rangle) \leftthreetimes \langle b_2\rangle)\ldots) \leftthreetimes \langle b_r\rangle$.

Пусть $[b_i, b_j] \neq 1$. Тогда существуют $b_i^0 \in \langle b_i\rangle$, $b_j^0 \in \langle b_j\rangle$ такие, что $|[b_i^0, b_j^0]| = p$. Отсюда, очевидно, $\langle b_i^0, b_j^0\rangle = (\langle a^{p^{\alpha-1}}\rangle \times \langle b_i^0\rangle) \leftthreetimes \langle b_j^0\rangle \ntriangleright G'$, что противоречит результату 1. Следовательно, $[a_i, b_j] = 1$. Аналогично убеждаемся, что $[b, b_i] = 1$.

Предположим, что $\langle a\rangle \cap \langle b\rangle \neq 1$ при $r \geqslant 1$. Тогда ввиду леммы 2 существует элемент $d = a^t b^{p^{\beta-\alpha}}$ такой, что $A = \langle b\rangle\langle d\rangle$ и $\langle b\rangle \cap \langle d\rangle = 1$. Пусть $[d, b_i] = 1$. Отсюда существует число Δ такое, что $|[d, b_i^{\Delta}]| = p$, а потому $(\langle a^{p^{\alpha-1}}\rangle \times \langle d\rangle) \leftthreetimes \langle b_i^{\Delta}\rangle \ntriangleright G'$ — противоречие с результатом 1. Значит, $[d, b_i] = 1$. Из этого следует, что $A \leftthreetimes \langle b_i\rangle = A \times \langle b_i\rangle$ — противоречие с выбором G. Таким образом, $\langle a\rangle \cap \langle b\rangle = 1$ при $r \geqslant 1$.

Пусть $|b_i| = p^{\beta_i}$. Ввиду неразложимости G в прямое произведение своих нетривиальных подгрупп $\langle a\rangle \leftthreetimes \langle b_i\rangle$ — неабелева метагамильтонова группа, являющаяся либо $*$-группой, либо группой Миллера — Морено. Из строения групп Миллера — Морено [14] и леммы 2 вытекает, что $b_i^{-1}ab_i = a^{1+p^{k_i}}$, где $k \leqslant k_i < \alpha$.

Покажем, что $k_1 > k$. Предположим противное, т. е. пусть $k_1 = k$, и рассмотрим подгруппу $(\langle a\rangle \leftthreetimes \langle b\rangle) \leftthreetimes \langle b_1\rangle$. Ясно, что $\langle b\rangle \times \langle b_1\rangle = \langle bb_1^{-1}\rangle \times \langle b_0\rangle$, где либо $\langle b_0\rangle = \langle b\rangle$, либо $\langle b_0\rangle = \langle b_1\rangle$, и потому $(\langle a\rangle \leftthreetimes \langle b\rangle) \leftthreetimes \langle b_1\rangle = (\langle a\rangle \leftthreetimes \langle b_0\rangle) \leftthreetimes \langle bb_1^{-1}\rangle$. Так как $[a, bb_1^{-1}] = [a, b][a, b_1^{-1}] = 1$, то $\langle bb_1^{-1}\rangle \leqslant Z(G)$, что противоречит неразложимости G. Итак, $k_1 > k$. Аналогично убеждаемся, что $k_i > k_{i-1}$, где $i = 1, \ldots, r$.

Покажем далее, что $\alpha - k < \beta \leqslant k_1 + k - \alpha + 1$. Действительно, соотношение $\alpha - k < \beta$ следует из леммы 2. Предположим, что $\beta > k_1 + k - \alpha + 1$. Тогда в $\langle b\rangle$ существует элемент b^0 порядка $p^{k_1+k-\alpha+1}$. Положим $z = a^{p^{\alpha-k_1-1}}b^0$. Легко убедиться, что $\langle z\rangle \ntriangleright G'$. В самом деле, ввиду результата 3 $z^{p^{k_1+k-\alpha+1}} = (b^0)^{p^{k_1+k-\alpha+1}}a^t$ и, значит, $|(b^0)^{p^{k_1+k-\alpha+1}}| = p$, поэтому $z^{p^{k_1+k-\alpha+1}} \notin \langle a\rangle$ и $z^{p^{k_1+k-\alpha+2}} = a^{p^{k+1}}[a, b^0]^{-\frac{1}{2}p^{k+1}(p^{k_1+k-\alpha+2}-1)}$. Отсюда $\langle z\rangle \cap$

$\cap \langle a\rangle \leqslant \langle a^{p^{k+1}}\rangle$, т. е. $\langle z\rangle \not\geqslant G'$. Так как $[z, b_1] = [a^{p^{\alpha-k_1-1}}b^0, b_1] = a^{p^{\alpha-1}} \neq 1$ и $(\langle a^{p^{\alpha-1}}\rangle \langle z\rangle) \leftthreetimes \langle b_1\rangle \not\geqslant G'$, то получили противоречие с результатом 1. Полученное противоречие показывает, что $\beta \leqslant k_1 + k - \alpha + 1$. Таким образом, $\alpha - k < \beta \leqslant k_1 + k - \alpha + 1$.

Так как $|[a, b_i]| = p^{\alpha-k_i}$, то $\alpha - k_i \leqslant \beta_i$. Положим далее $d_1 = b^{p^{k_1-k}}b_1^{-1}$. Так как $|b^{p^{k_1-k}}| = p^{\beta+k-k_1}$ и при $\beta_1 \geqslant \beta + k - k_1$ $|b_1| \geqslant p^{\beta+k-k_1}$, то $|d_1| = |b_1|$ и, значит, $\langle d_1\rangle \cap A = 1$. Но тогда $A \leftthreetimes \langle b_1\rangle = A \times \langle d_1\rangle$ — противоречие с выбором G. Значит, $\beta_1 < \beta + k - k_1$. Следовательно, $\alpha - k_1 \leqslant \beta_1 < \beta + k - k_1$. Полагая $d_i = b_{i-1}^{p^{k_i-k_{i-1}}}b_i^{-1}$, где $i = 2, \ldots, r$, и рассуждая аналогично, получаем $\alpha - k_i \leqslant \beta_i < \beta_{i-1} + k_{i-1} - k_i$.

Наконец, соотношение $1 \leqslant r \leqslant \min(\alpha - k - 1,\ \beta + k - \alpha)$ вытекает из ограничений для β_i и k_i.

Таким образом, в рассматриваемом случае, т. е. когда G не разлагается в прямое произведение своих нетривиальных подгрупп, G — группа типа 1 или 2 настоящей леммы.

Полагая $d_i = b_{i-1}^{p^{k_i-k_{i-1}}}b_i^{-1}$ и $D = \langle d_1, \ldots, d_r\rangle$, легко убеждаемся, что группа G типа 2 настоящей леммы в рассматриваемом случае представима в виде $G = A\cdot D$, где $Z(G) \geqslant D$, $A \cap D, = \langle b\rangle \cap D$, экспонента D не превышает $p^{\beta+k-k_1}$.

Пусть теперь G разлагается в прямое произведение своих собственных подгрупп. Обозначим через C один из наибольших собственных абелевых прямых множителей G. Тогда $G = G_1 \times C$. Нетрудно убедиться, пользуясь результатом 1, что G_1 не разлагается в прямое произведение своих собственных подгрупп. Отсюда G_1 — группа типа 1, 2 настоящей леммы. Очевидно, что для завершения доказательства леммы нужно показать, что экспонента C не превышает $p^{2k-\alpha+1}$. Предположим противное, т. е. пусть C содержит элемент c порядка $p^{2k-\alpha+2}$ и пусть $f = a^{p^{\alpha-k-1}}c$. Тогда $[f, b] = [a^{p^{\alpha-k-1}}c, b] = [a^{p^{\alpha-k-1}}, b] = a^{p^{\alpha-1}}$, $\langle f\rangle \cap \langle a\rangle \leqslant \langle a^{p^{k+1}}\rangle$ и, значит, $a^{p^{\alpha-1}}\rangle \langle b\rangle \langle f\rangle \not\geqslant G'$, что противоречит результату 1. Полученное противоречие и завершает доказательство леммы.

Лемма 4. *$*$-Группа G с нециклическим коммутантом является группой одного из следующих типов:*

1) $G = (A \leftthreetimes \langle b_1\rangle) \times C$, где $A = \langle a\rangle \leftthreetimes \langle b\rangle$ — группа из леммы 2, $|b_1| = p^{\beta_1}$, $1 \leqslant \beta_1 \leqslant \beta + k - \alpha + 1$, $[b, b_1] = 1$, $[a, b_1] = b^{p^{\beta-1}}$, $\alpha - k < \beta \leqslant k + 1$, C — абелева группа, экспонента которой не превышает $p^{k+\beta-\alpha}$;

2) $G = (A \leftthreetimes \langle b_1\rangle) \times C$, где $A = \langle a\rangle \langle b\rangle$ — группа из леммы 2, $\langle a\rangle \cap \langle b\rangle \neq 1$, $|b_1| = p^{\beta_1}$, $1 \leqslant \beta_1 \leqslant 2k - \alpha + 2$, $m = k + 1$, $[a, b_1[= 1$, $[b, b_1] = a^{tp^k}b^{p^{n-1}}$, $t + s \equiv 0 (p^{\alpha-k-1})$ C — абелева группа, экспонента которой не превышает $p^{2k-\alpha+1}$.

Доказательство. Пусть G — исследуемая группа. В силу результата 1 $G' = \langle c\rangle \times \langle f\rangle$, где $|c| > p$, $|f| = p$. Рассмотрим фактор-группу $\overline{G} = G/\langle f\rangle$. Ясно, что $\overline{G}$ — метагамильтонова метабелева группа с циклическим коммутантом непростого порядка. Из этого следует, что $\overline{G}$ — группа из леммы 3, т. е. $\overline{G} = \overline{A} \leftthreetimes \overline{X}$, где $\overline{A}$ — неабелева метациклическая группа. Поэтому $G = A\cdot X$, где $A \cap X = \langle f\rangle$. Так как, очевидно, $X \not\geqslant G'$, то ввиду результата 1 X — абелева группа. Понятно, что $A = \langle a, b\rangle$ — метациклическая группа, а элементы a и b удовлетворяют соотношениям леммы 2.

Пусть $\langle x\rangle$ — наибольшая циклическая подгруппа из X, содержащая $\langle f\rangle$. Тогда $X = \langle x\rangle \times X_1$ и, значит, $G = G_1 \leftthreetimes X_1$, где $G_1 = A\langle x\rangle$. Пусть $|x| = p^{\gamma}$. Так как $\overline{G}$ удовлетворяет условиям леммы 3, то экспонента $\overline{X}$ не превышает $p^{2k-\alpha+1}$ и, значит, $\gamma \leqslant 2k - \alpha + 2$. Рассмотрим два случая: 1) $\langle a\rangle \cap \langle b\rangle = 1$; 2) $\langle a\rangle \cap \langle b\rangle \neq 1$

Случай 1. Допустим, что $[x, b] \neq 1$. Тогда в $\langle x\rangle$ можно выбрать элемент x_1 такой, что $|[b, x_1]| = p$. Из этого с учетом соотношения $\langle a\rangle \cap \langle b\rangle = 1$ и следствия леммы 2 имеем $\langle a^{p^{\alpha-1}}\rangle \langle b\rangle \langle x_1\rangle \not\geqslant G'$, что противоречит результату 1. Значит, $[b, x] = 1$.

Покажем, что в $A\langle x\rangle$ элемент x можно выбрать так, что $A\cap\langle x\rangle = \langle b\rangle\cap\langle x\rangle=\langle f\rangle$. В самом деле, понятно, что $f\notin\langle a\rangle$ и потому $f = a^{ip^{\alpha-1}}b^{jp^{\beta-1}}$. Если $i\equiv 0 \pmod p$, то $f\in\langle b\rangle$ и требуемое равенство доказано. Пусть $(i, p)=1$ и пусть $y=\alpha^{\Delta i}b^{j}$, где либо $\Delta=p^{-(\beta-\alpha)}$, если $\alpha\leqslant\beta$, либо $\Delta=p^{\alpha-\beta}$, если $\alpha>\beta$. По результату 3 $y^{p^{\beta-1}}=\alpha^{\Delta ip^{\beta-1}}b^{jp^{\beta-1}}[a, b]^{-\frac{1}{2}\Delta ijp^{\beta-1}(p^{\beta-1}-1)}$ и так как экспонента G' не превышает $p^{\alpha-2}$, то $[a, b]^{-\frac{1}{2}\Delta ijp^{\beta-1}(p^{\beta-1}-1)}=1$. Отсюда $A\cap\langle x\rangle=\langle b\rangle\cap\langle x\rangle=\langle f\rangle$. Пусть $\gamma>\beta$. Тогда $\langle b, x\rangle=\langle x\rangle\times\langle b^0\rangle$, где $b^0=x^{p^{\gamma-\beta}}b^{t_1}$ и $(b^{t_1})^{p^{\beta-1}}=f^{-1}$. Так как $G'=\langle a^{p^k}\rangle\times \langle f\rangle$, $\langle f\rangle=\langle x^{p^{\gamma-1}}\rangle$, то подгруппа $\langle a\rangle\langle x\rangle$ существует и, значит, $A\langle x\rangle = (\langle a\rangle\langle x\rangle)\leftthreetimes\langle b^0\rangle$. Ввиду леммы 1 и свойств групп Миллера — Морено [14] $\langle a\rangle\langle x\rangle$ — метациклическая группа. Поэтому $|[a, x]|\leqslant|[a, b]|$, $|[a, x]^{p^{\gamma-\beta}}| < |[a, b]|$. Из этого следует, что $|[a, b^0]|=|[a, b]|$. Значит, $\langle a\rangle\leftthreetimes\langle b^0\rangle \not> G'$, что противоречит результату 1. Таким образом, $A\langle x\rangle=A\leftthreetimes\langle x_1\rangle$ и потому $G=(A\leftthreetimes\langle x_1\rangle)\leftthreetimes X_1$. Аналогично при $\beta\geqslant\gamma$.

Пусть $G=A\leftthreetimes B$, где $B=\langle x_1\rangle\times X_1$. Легко заметить, что $[B, b]=1$ и $[B, b]\not>\langle a\rangle$. Следовательно, можно считать, что $B=\langle b_1\rangle\times C$, где $[b_1, a]\neq 1$ и $[b_1, a]\in\langle a\rangle$. Отсюда с учетом результата 1 легко получаем $|[A, B]|=p$ и, значит, $|[a, b_1]|=p$. Пусть $C=\langle b_2\rangle\times\ldots\times\langle b_r\rangle$. Покажем, что b_i, $i=2, \ldots, r$, можно выбрать так, что $Z(G)\geqslant C$. Предположим противное. Тогда $[a, b_i]\notin\langle a\rangle$ и $|[a, b_i]|=p$. Рассмотрим две возможности: а) $\langle[a, b_1]\rangle=\langle[a, b_i]\rangle$; б) $\langle[a, b_1]\rangle\neq\langle[a, b_i]\rangle$.

Пусть сначала имеет место возможность б). Тогда найдутся числа s_1 и s_i, $i=2, \ldots, r$, такие, что $[a, b_1]^{s_1}[a, b_i]^{s_i}=a^{p^{\alpha-1}}$. Положим $z_i=b_1^{s_1}b$ и рассмотрим неабелеву подгруппу $\langle a\rangle\leftthreetimes\langle z_i\rangle$. Понятно, что $\langle a\rangle\leftthreetimes\langle z_i\rangle\not> G'$ — противоречие с результатом 1. Следовательно, возможность б) не имеет место.

Пусть теперь имеет место возможность а). Снова существуют числа s_1 и s_i такие, что $[a, b_1]^{s_1}=[a, b_i]^{s_i}$. Положим $z_i=b_1^{s_1}b_i^{-s_i}$. Тогда $[a, z_i]=1$ и $\langle b_1\rangle\times\langle b_i\rangle=\langle z_i\rangle\times\langle y_i\rangle$, где либо $y_i=b_1$, либо $y_i=b_i$. Отсюда $z_i\in Z(G)$. Следовательно, не нарушая общности, можно считать $b_i\in Z(G)$ и потому $C\leqslant Z(G)$.

Ясно, что $[a, b_1]=a^{tp^{\alpha-1}}b^{lp^{\beta-1}}$. Положим $z=ab$. Тогда в G существует неабелева подгруппа $(\langle[a, b_1]\rangle\langle z\rangle)\leftthreetimes\langle b_1\rangle$. Из этого с учетом результата 1 имеем $\langle[a, b_1]\rangle\langle z\rangle>\langle a^{p^k}\rangle\times\langle f\rangle$ и потому для некоторого p^i справедливо соотношение $z^{p^i}a^{t_1p^{\alpha-1}}b^{l_1p^{\beta-1}}=a^{p^k}$. В силу результата 3 $z^{p^i}=a^{p^i}b^{p^i}[a, b]^{-\frac{1}{2}p^i(p^i-1)}$. Значит, $a^{p^i}b^{p^i}[a, b]^{-\frac{1}{2}p^i(p^i-1)}a^{t_1p^{\alpha-1}}b^{l_1p^{\beta-1}}=a^{p^k}$, а потому $a^{p^{i-k}}b^{p^i}a^{-\frac{1}{2}p^{i+k}(p^i-1)}\times a^{t_1p^{\alpha-1}}b^{l_1p^{\beta-1}}=1$. Отсюда $i\geqslant\beta-1$. Так как $Z(A)$ — нециклическая группа, то $\beta-1\geqslant\alpha-k$. Далее, из равенства $a^{p^{i-k}}a^{-\frac{1}{2}p^{i+k}(p^i-1)}a^{t_1p^{\alpha-1}}=1$ и соотношения $i\geqslant\beta-1$ имеем $a^{-\frac{1}{2}p^{k+i}(p^i-1)}=a^{t_2p^{\alpha-1}}$. Следовательно, $a^{p^{i-k}+t_1p^{\alpha-1}+t_2p^{\alpha-1}}=1$ и потому $i=k$. Таким образом, $\beta\leqslant k+1$.

Положим $b^0=b^{p^{\alpha-k-2}}b_1$. Так как $b_1^p\in Z(G)$, $|[a, b]^{p^{\alpha-k-1}}|=p$ и $[a, b]^{p^{\alpha-k-1}}\in\langle a\rangle$, то в G существует неабелева подгруппа $\langle a\rangle\leftthreetimes\langle(b^0)^p\rangle$. Ввиду результата 1 $\langle a\rangle\leftthreetimes\langle(b^0)^p\rangle>G'$. Из этого следует, что $\langle b^0\rangle\cap A\neq 1$ и, значит, $|b^0|\geqslant p^{\beta_1}$. Поскольку $\langle b_1\rangle\cap A=1$, то $(b^0)^{p^{\beta_1}}\neq 1$ и поэтому $\beta-\alpha+k+2>\beta_1$, а значит, в силу доказанного выше соотношения $\beta_1\leqslant 2k-\alpha+1$ имеем $\beta_1\leqslant\beta+k-\alpha+1$. Далее, полагая $d^0=b^{p^{\alpha-k-1}}c$, где $c\in C$, и рассуждая, как выше, получаем, что экспонента C не превышает $p^{\beta+k-\alpha}$.

Так как $\beta\leqslant k+1$, $[a, b_1]=a^{s_2p^{\alpha-1}}b^{t_2p^{\alpha-1}}$, $t_2\not\equiv 0 \pmod p$, то, полагая $z_1=a^{s_2p^{\alpha-\beta}}b^{t_2}$, получим в силу результата 3 $z_1^{p^{\beta-1}}=a^{s_2p^{\alpha-1}}b^{t_2p^{\beta-1}}\times$

$\times [a, b]^{-\frac{1}{2}s_2p^{\alpha-\beta}t_2p^{\beta-1}(p^{\beta-1}-1)}$. Легко заметить, что $[a, b]^{-\frac{1}{2}s_2p^{\alpha-\beta}t_2p^{\beta-1}(p^{\beta-1}-1)} = 1$ и потому $|z_1| = p^\beta$. Заменив z_1 на b, будем иметь $[a, b_1] = b^{p^{\beta-1}}$.

Таким образом, в случае 1 G — группа типа 1.

Случай 2. В этом случае $a^{sp^m} = b^{p^n}$, $k < m < \alpha$. По лемме 2 $A = \langle b\rangle\langle d\rangle$, где $\langle b\rangle \cap \langle d\rangle = 1$, $|d| = p^m$. Ясно, что $\langle a^{p^{\alpha-1}}\rangle \times \langle d\rangle \ntriangleright G'$. Предположим, что $[d, X] \neq 1$. Тогда в X найдется элемент x_1 такой, что $|[d, x_1]| = p$. Отсюда $\langle d, x_1\rangle \ntriangleright G'$, что противоречит результату 1. Итак, $[d, X] = 1$, т. е. $\langle d, x\rangle$ — абелева группа.

Покажем, что A дополняется в $A\langle x\rangle$. Действительно, выше показано, что $|x| \leqslant p^{2k-\alpha+2}$ и экспонента X_1 не превышает $p^{2k-\alpha+1}$. Так как $k < m < \alpha$, то $|d| < |b|$. Ясно, что $f = b^{ip^{\beta-1}}d^{jp^{m-1}}$. Положим $z = b^{ip^{\beta-m}}d^j$. Тогда в силу результата 3 $z^{p^{m-1}} = b^{ip^{\beta-m}}d^{jp^{m-1}}[b, d]^{-\frac{1}{2}ip^{\beta-m}jp^{m-1}(p^{m-1}-1)}$. Так как, очевидно, $[b, d]^{-\frac{1}{2}ip^{\beta-m}jp^{m-1}(p^{m-1}-1)} = 1$, то $z^{p^{m-1}} = f$ и, значит, $|z| = p^m$. Таким образом, $A = \langle b\rangle\langle z\rangle$, где $\langle b\rangle \cap \langle z\rangle = 1$. Поскольку $\gamma \leqslant 2k-\alpha+2$ и $m > k$, то $m > \gamma$. Нетрудно убедиться, что $[z, x] = 1$ и потому $\langle z, x\rangle$ — абелева группа. Стсюда $\langle z, x\rangle = \langle z\rangle \times \langle x_0\rangle$, где $|x_0| = p^{\gamma-1}$. Так как $|A\langle x\rangle : A| = p^{\gamma-1}$ и, очевидно, $A\langle x\rangle = A\langle x_0\rangle$, то $A\langle x\rangle = A \leftthreetimes \langle x_0\rangle$, что и требовалось доказать. Тогда $G = A \leftthreetimes B$, где B — абелева группа, $[d, B] = 1$, $B = \langle x_0\rangle \times X_1$. Ясно, что $[b, B] \neq 1$. Покажем, что $[b, B]$ экспоненты p и $\langle b\rangle \ntriangleright [b, B]$. Второе утверждение почти очевидно. Докажем первое. Предположим противное, т. е. пусть экспонента $[b, B]$ больше p. Тогда существует элемент g из B такой, что $|[b, g]| \geqslant p^2$. Отсюда в $\langle g\rangle$ существует элемент g_0 такой, что $|[b, g_0]| = p$, $[b, g_0] \in \langle b\rangle$. Следовательно, $\langle b\rangle \leftthreetimes \langle g_0\rangle \ntriangleright G'$ — противоречие с результатом 1. Значит, экспонента $[b, B]$ равна p. Ввиду представления d и равенства $[d, B] = 1$ вытекает $[a, B] = 1$. Ясно, что $B = \langle b_1\rangle \times C$, где $|b_1| = p^{\beta_1}$, $[b, b_1] \neq 1$. Проводя те же рассуждения, что и в случае 1 для подгруппы C, получаем $Z(G) \geqslant C$. Понятно, что экспонента C не превышает $p^{2k-\alpha+1}$ и $\beta_1 \leqslant 2k - \alpha + 2$.

Так как $|[b, b_1]| = p$ и $[b, b_1] \notin \langle b\rangle$, то $\langle b\rangle \times \langle [b, b_1]\rangle > \langle a^{p^k}\rangle$ (см. результат 1). Отсюда $a^{p^{k+1}} \in \langle b\rangle$ и потому $m = k + 1$.

Поскольку $[b, b_1] \in \langle b\rangle\langle a^{p^k}\rangle$ и $a^{p^{k+1}} \in \langle b\rangle$, то $[b, b_1] = b^{t_1p^{n_1}}a^{tp^k}$, и так как $|[b, b_1]| = p$, $[b, b_1] \notin \langle a\rangle$, $b^{p^n} \in \langle a\rangle$, то $n_1 < n$. Из равенства $a^{sp^{k+1}} = b^{p^n}$ получаем, что существует число s', $ss' \equiv 1 \pmod{p^{\alpha-k-1}}$ такое, что $a^{ss'p^{k+1}} = b^{s'p^n} = a^{p^k}$ и $[b, b_1]^p = b^{t_1p^{n_1+1}}b^{ts'p^n} = 1$. Отсюда $t_1p^{n_1+1} + ts'p^n \equiv 0 \pmod{p^\beta}$ и потому $n_1 = n - 1$. Значит, $[b, b_1]^p = 1$, т. е. $t_1 + ts' \equiv 0 \pmod{p^{\beta-n}}$ или $st_1 + tss' \equiv 0 \pmod{p^{\beta-n}}$. Так как $(t_1, p) = (t, p)$, то можно считать, что $t_1 = 1$ и, значит, $s + t \equiv 0 \pmod{p^{\alpha-k-1}}$.

Следовательно, в этом случае G — группа типа 2. Лемма доказана.

Теорема. *Периодические неабелевы метабелевы метагамильтоновы группы G с неэлементарным коммутантом исчерпываются группами следующих типов:*

1) $G = A \times C$, *где* $A = \langle a\rangle\langle b\rangle$, $|a| = p^\alpha$, $|b| = p^\beta$, $b^{-1}ab = a^{1+p^k}$, $2 \leqslant \alpha - k \leqslant k \leqslant \alpha - 2$, *при* $p = 2$ $k \geqslant 2$, $\langle a\rangle \cap \langle b\rangle = \langle a^{sp^m}\rangle = \langle b^{p^n}\rangle$, $(s, p) = 1$, $a^{sp^m} = b^{p^n}$, $m \geqslant k$, $\alpha \geqslant m$, $\beta \geqslant n$, $n \geqslant \alpha - k$, *при* $\langle a\rangle \cap \langle b\rangle \neq 1$, $k < m < \alpha < \beta$, C — *периодическая абелева группа, экспонента силовской p-подгруппы которой не превышает* $p^{2k-\alpha+1}$;

2) $G = (A \leftthreetimes B) \times C$, $A = \langle a\rangle \leftthreetimes \langle b\rangle$ — *группа типа* 1, $B = \langle b_1\rangle \times \ldots \times \langle b_i\rangle \times \ldots \times \langle b_r\rangle$, $1 \leqslant r \leqslant \min(\alpha - k - 1,\ \beta + k - \alpha)$, $[b_i, b] = 1$, $b_i^{-1}ab_i = a^{1+p^{k_i}}$, *при* $i = 1$ *полагаем* $k_{i-1} = k$, $k_i > k_{i-1}$, $\alpha > k_r$, $\alpha - k < \beta \leqslant k_1 + k - \alpha + 1$, $|b_i| = p^{\beta_i}$, *при* $i = 1$ *полагаем* $\beta_{i-1} = \beta$, $\alpha - k_i \leqslant \beta_i < \beta_{i-1} + k_{i-1} - k_i$,

C — периодическая абелева группа, экспонента силовской p-подгруппы которой не превышает $p^{2k-\alpha+1}$;

3) $G = (A \rightthreetimes \langle b_1 \rangle) \times C$, *где* $A = \langle a \rangle \rightthreetimes \langle b \rangle$ *— группа типа* 1, $|b_1| = p^{\beta_1}$, $1 \leqslant \beta_1 \leqslant k + \beta - \alpha + 1$, $[b, b_1] = 1$, $[a, b_1] = b^{p^{\beta-1}}$, $\alpha - k < \beta \leqslant k + 1$, *$C$ — периодическая абелева группа, экспонента силовской p-подгруппы которой не превышает* $p^{k+\beta-\alpha}$;

4) $G = (A \rightthreetimes \langle b_1 \rangle) \times C$, *где* $A = \langle a \rangle \langle b \rangle$ *— группа типа* 1, $|b_1| = p^{\beta_1}$, $1 \leqslant \beta_1 \leqslant 2k - \alpha + 2$, $m = k + 1$, $[a, b_1] = 1$, $[b, b_1]\, a^{tp^k} b^{p^{n-1}}$, $t + s \equiv 0 \pmod{p^{\alpha-k-1}}$, *$C$ — периодическая абелева группа, экспонента силовской p-подгруппы которой не превышает* $p^{2k-\alpha+1}$.

Доказательство. Необходимость непосредственно следует из лемм 3, 4 и [12]. Достаточность почти очевидна.

1. *Ромалис Г. М.* О метагамильтоновых группах // Успехи мат. наук.— 1962.— 17, № 6.— С. 228.
2. *Ромалис Г. М., Сесекин Н. Ф.* О метагамильтоновых группах I // Мат. зап. Урал. ун-та.— 1966.— 5, № 3.— С. 45—49.
3. *Сесекин Н. Ф., Ромалис Г. М.* О метагамильтоновых группах II // Там же.— 1968.— 6, № 5.— С. 50—53.
4. *Ромалис Г. М., Сесекин Н. Ф.* О метагамильтоновых группах III // Там же.— 1970.— 7, № 3.— С. 195—199.
5. *Черников С. Н.* Бесконечные неабелевы группы, у которых инвариантны все бесконечные неабелевы подгруппы // Укр. мат. журн.— 1971.— 23, № 5.— С. 604—628.
6. *Нагребецкий В.* Конечные ненильпотентные группы, любая неабелева подгруппа которых инвариантна // Мат. зап. Урал. ун-та.— 1967.— 6, № 1.— С. 80—88.
7. *Махнев А. А.* О конечных метагамильтоновых группах //Всесоюз. алгебр. симп. (Гомель, 1975): Тез. докл.— Минск : Ин-т математики АН БССР, 1975.— С. 39.
8. *Махнев А. А.* О конечных метагамильтоновых группах // Мат. зап. Урал. ун-та.— 1976. 10, № 1.— С. 60—75.
9. *Кузенный Н. Ф., Семко Н. Н.* Строение разрешимых ненильпотентных метагамильтоновых групп // Мат. заметки.— 1983.— 34, № 2.— С. 179—188.
10. *Семко Н. Н., Кузенный Н. Ф.* Строение локально ступенчатых непериодических метагамильтоновых групп//XVII Всесоюз. алгебр. конф. (Минск, 1983): Тез. докл.—Минск: Ин-т математики АН БССР, 1983.— 4.2.— С. 214—215.
11. *Семко Н. Н., Кузенный Н. Ф.* Строение метациклических метагамильтоновых групп (методические рекомендации) // Киев : Киев. пед. ин-т, 1983.— 22 с.
12. *Семко Н. Н., Кузенный Н. Ф.* О строении бесконечных нильпотентных периодических метагамильтоновых групп // Строения групп и их подгрупповая характеризация.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1984.— С. 101—111.
13. *Кузенный Н. Ф., Семко Н. Н.* Строение разрешимых метагамильтоновых групп // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1985.— № 2.— С. 6—9.
14. *Redei L.* Das «Schiefe Produkt» in Gruppentheorie mit Anwendungen ... Cooment // Math. Helv.— 1947.— 20.— S. 225—264.
15. *Холл М.* Теория групп.— М. : Изд-во иностр. лит., 1962.— 468 с.

НПО «Горсистемотехника», Киев

Получено 01.08.85