УДК 512.552.1

О. Е. Грегуль, В. В. Кириченко

О полунаследственных полуцепных кольцах

В настоящей статье описание колец, указанных в названии, сводится к описанию первичных полунаследственных полуцепных колец. Это сведение базируется на следующих двух утверждениях, доказываемых нами: а) полупервичное полуцепное кольцо является прямым произведением первичных колец, б) в полуцепном кольце выполняется условие Оре, т. е. полуцепное кольцо обладает классическим кольцом частных.

Будем придерживаться терминологии, принятой в [1, 2]. Все кольца, рассматриваемые в статье, ассоциативные и с единицей, а модули — правые и унитарные.

1. Свойства полуцепных колец. Важную роль в теории колец играет понятие первичного радикала (см. [3], гл. 3). Пусть I — первичный радикал кольца A. Тогда фактор-кольцо A/I полупервично, т. е. в нем нет нильпотентных идеалов. Напомним, что кольцо называется первичным, если произведение любых двух его ненулевых идеалов не равно нулю.

Теорема 1. *Неразложимое как кольцо полуцепное полупервичное кольцо A является первичным.*

Пусть $1 = g_1 + g_2$ — разложение единицы кольца A в сумму взаимно ортогональных идемпотентов, $A = (A_{ij})$ — соответствующее пирсовское разложение кольца A, т. е. $A_{ij} = g_iAg_j$, $i = 1, 2$. Аналогично, если M — двусторонний идеал кольца A, то $M = (M_{ij})$ — пирсовское разложение идеала M, где $M_{ij} = g_iMg_j$.

Лемма 1. *Пусть $M = (M_{ij})$ — двусторонний идеал полупервичного кольца A. Если $M_{ij} \neq 0$, то $M_{ji} \neq 0$. Кроме того, если $M_{ij} \neq 0$, то $M_{ij}M_{ji} \neq 0$ и $M_{ji}M_{ij} \neq 0$.*

Доказательство. Пусть $M_{ij}M_{ji}=0$. Очевидно, $Z=M_{ij}A_{ji}+A_{ij}M_{ji}+A_{ji}M_{ij}+M_{ji}A_{ij}$ — двусторонний идеал и $Z^3=0$. Остальные случаи разбираются аналогично.

Лемма 2. ([4, 5]). *Если A — полупервичное полуцепное кольцо, то для любого идемпотента $e\in A$ кольцо eAe также полупервичное и полуцепное.*

Лемма 3. *Пусть A — полуцепное кольцо, $1=g_1+g_2$, где g_1 и g_2 — идемпотенты в A. Тогда g_1Ag_2 — полуцепной правый g_2Ag_2 (левый g_1Ag_1)-модуль. В частности, если g_1 (g_2)— локальный идемпотент, то g_1Ag_2 — цепной правый g_2Ag_2 (левый g_1Ag_1)-модуль.*

Доказательство этой леммы очевидно.

Доказательство теоремы 1. Будем считать, что кольцо A неразложимо. Пусть $1=e_1+\ldots+e_n$ — разложение $1\in A$ в сумму попарно ортогональных локальных идемпотентов. Будем доказывать теорему индукцией по n. Пусть $n=1$, L_1 и L_2 — двусторонние идеалы кольца A, причем $L_1L_2=0$. Так как кольцо A цепное, можно считать, что $L_1\supset L_2$. Но тогда $L_2^2=0$ и из полупервичности A следует, что $L_2=0$. В общем случае положим $g_1=e_1$ и $g_2=1-e_1$. Учитывая лемму 2, покажем, что кольцо A_{22} неразложимо. Предположим противное: $A_{22}=A_2\times A_2'$— прямое произведение колец, $g_2=g_2'+g_2''$ — соответствующее разложение идемпотента g_2. По лемме 1 $g_1Ag_2\neq 0$. Согласно лемме 3 либо $g_1Ag_2'=0$, либо $g_1Ag_2''=0$. Отсюда с учетом леммы 1 следует, что либо $g_2'Ag_1=0$, либо $g_2''Ag_1=0$. Но это равносильно разложимости кольца A. Следовательно, кольцо A_{22} неразложимо и по предположению индукции первично. Пусть $MN=0$ — произведение двусторонних идеалов M и N. Если $M_{22}\neq 0$, то по предположению индукции $N_{22}=0$ и $N=N_{11}$ по лемме 2. Пусть $N_{11}\neq 0$. Покажем, что $A_{12}A_{21}\subset N_{11}$. Напомним, что A_{11} — цепное кольцо. Так как $N_{11}A_{12}=0$, то при $A_{12}A_{21}\supset N_{11}$ имеем $0\supset N_{11}^2$. Получили противоречие. Следовательно, $A_{12}A_{21}\subset N_{11}$. Легко проверить, что $(A_{12}A_{21}, A_{12})$ — правый нильпотентный идеал. Поэтому $N_{11}=0$. Случай $M_{22}\neq 0$ разбирается аналогично. Теорема доказана.

Теорема 2. *В любом полуцепном кольце выполняется условие Оре, т. е. любое полуцепное кольцо обладает классическим кольцом частных.*

Пусть $1=e_1+\ldots+e_n$ — разложение единицы полуцепного кольца A в сумму попарно ортогональных локальных идемпотентов, $A_{ij}=e_iAe_j$, $i, j=1, \ldots, n$.

Будем говорить, что элемент $a\in A_{ij}$ имеет правый (левый) аннулятор, если существует ненулевой $x\in A_{jk}$ $(y\in A_{ki})$ при некотором k такой, что $ax=0\,(ya=0)$. Пусть $N_{ij}^l\,(N_{ij}^r)$ — множество элементов A_{ij}, имеющих правые (левые) аннуляторы; $N_{ij}=N_{ij}^l+N_{ij}^r$, $X_{ij}=A_{ij}\setminus N_{ij}$.

Лемма 4. *Множество N_{ij} является $A_{ii}-A_{jj}$-бимодулем. Если $x_{ij}x_{ji}\in X_{ii}$, где $x_{ij}\in A_{ij}$, $x_{ji}\in A_{ji}$, то $x_{ij}\in X_{ij}$ и $x_{ji}\in X_{ji}$.*

Доказательство. Пусть $m\in N_{ij}^l$. Если m имеет правый аннулятор z, то, очевидно, $am\in N_{ij}^l$, где $a\in A_{ii}$. Покажем, что $ma\in N_{ij}^l$ при $a\in A_{jj}$. Рассмотрим правые идеалы zA и aA. Так как это подмодули цепного модуля e_jA, то либо $zA\supset aA$, либо $zA\subset aA$. В первом случае $a=zb$ и $ma=mzb=0$, во втором — $z=ay$ и $mz=may=0$, т. е. $ma\in N_{ij}^l$. Предположим теперь, что $x_{ij}\in N_{ij}^l$. Пусть существует ненулевой $y\in A_{jk}$ такой, что $x_{ij}y=0$. Рассмотрим правые идеалы yA и $x_{ij}A$. Снова либо $yA\supset x_{ij}A$, либо $x_{ij}A\supset yA$, что, как и выше, приводит к противоречию.

Лемма 5. *Для любого $a\in A$ и $x=x_1+\ldots+x_n$, $x_i\in X_{ii}$, существуют $y=y_1+\ldots+y_n$, $y_i\in X_{ii}$, и $b\in A$ такие, что $ay=xb$.*

Доказательство. Положим $a_{ij}=e_iae_j$. Покажем, что для каждого a_{ij} существует $k_j^{(i)}\in X_{jj}$ такой, что $a_{ij}k_j^{(i)}\in x_iA$. Рассмотрим правые идеалы x_iA и $a_{ji}A$. Если $a_{ij}A\subset x_iA$, то $a_{ij}e_j\in x_iA$, где $e_j\in X_{jj}$. Пусть $x_iA\subset a_{ij}A$. Тогда $x_i=a_{ij}a_{ji}$. По лемме 4 $a_{ij}\in X_{ij}$ и $a_{ji}\in X_{ji}$. Следовательно,

$a_{ji}a_{ij} \in X_{jj}$ и $x_i a_{jj} = a_{ij}a_{ji}a_{ij}$. Рассмотрим правые идеалы $k_j^{(i)}A$, $i = 1, \ldots, n$. Эти идеалы линейно упорядочены и пусть $k_j^{(i_0)}A$ — наименьший из них. Обозначим $y_j = k_j^{(i_0)}$. Очевидно, $a_{ij}y_j \in x_iA$ при $i = \overline{1, n}$. Положим $y = y_1 + \ldots + y_n$. Ясно, что $ay = xb$. Лемма доказана.

Покажем, как из этих лемм следует теорема 2.

Докажем, что для любого $a \in A$ и любого регулярного $r \in A$ существует регулярный $y \in A$ и $b \in A$ такие, что $ay = rb$.

Как следует из [6], существуют обратимые элементы k_1 и k_2 такие, что в двустороннем пирсовском разложении элемента k_1rk_2 в каждой строке и каждом столбце находится ровно один ненулевой элемент, лежащий, очевидно, в X_{ij}. Поэтому для некоторого натурального s элемент $(k_1rk_2)^s = x = k_1rb_1$ имеет «диагональный» вид и его диагональные элементы лежат в X_{ii}. Рассмотрим элемент k_1a. По предыдущей лемме $k_1ay = k_1rb_1b$ и, значит, $ay = rb_1b$. Теорема доказана.

Замечание 1. Нетрудно видеть, что кольцо частных полуцепного кольца также является полуцепным кольцом. Оно артиново тогда и только тогда, когда идеал $N = (N_{ij})$ нильпотентен. Как следует из [4], все нетеровы с одной стороны полуцепные кольца имеют артиновы кольца частных.

Замечание 2. При проверке условия Оре для любого элемента $a \in A$ и любого регулярного $r \in A$ регулярный элемент y такой, что $ay = rb$, можно выбрать «диагональным».

2. Полунаследственные полуцепные кольца. В данном пункте полунаследственное кольцо означает полунаследственное справа кольцо.

Предложение 1 [5]. *Пусть I — первичный радикал кольца A, $e^2 = e \in A$. Тогда eIe совпадает с первичным радикалом кольца eAe.*

Предложение 2 [4, 5]. *Если A — полуцепное полунаследственное кольцо, то таким же является кольцо eAe для любого идемпотента $e \in A$.*

Известно (см. [1], гл. 25), что полуцепное кольцо является полусовершенным. Всякое полусовершенное кольцо A разлагается в прямую сумму неразложимых правых идеалов: $A = P_1^{n_1} \oplus \ldots \oplus P_s^{n_s}$ (X^n — прямая сумма n экземпляров модуля X). Правые идеалы $P_1, \ldots, P_s$ считаем попарно неизоморфными. Всякий проективный A-модуль распадается в прямую сумму модулей $P_1, \ldots, P_s$ [3] (гл. 3]), которые называются главными A-модулями.

Обозначим через R радикал Джекобсона кольца A. Кольцо A называется приведенным, если фактор-кольцо A/R есть прямое произведение тел. Любое полусовершенное кольцо эквивалентно в смысле Мориты приведенному кольцу [2]. Именно, если $A = P_1^{n_1} \oplus \ldots \oplus P_s^{n_s}$, то кольцо $B = \mathrm{End}_A(P_1 \oplus \ldots \oplus P_s)$ является приведенным и эквивалентно в смысле Мориты кольцу A. Кольцо B естественно отождествляется с кольцом eAe для некоторого $e^2 = e \in A$. В силу предложения 2 достаточно рассматривать приведенные полунаследственные полуцепные кольца.

Лемма 6 [5]. *Ненулевой гомоморфизм главных модулей над полусовершенным полунаследственным кольцом является мономорфизмом.*

Кольца, удовлетворяющие этому условию, в [7] называются кусочными областями.

Пусть I — двусторонний идеал произвольного кольца A, $1 = e_1 + \ldots + e_s$ — разложение единицы этого кольца в сумму попарно ортогональных идемпотентов.

Лемма 7. *Если $e_iIe_i = 0$ для $i = 1, \ldots, s$, то $I^s = 0$.*

Доказательство. Будем доказывать лемму индукцией по s. При $s = 1$ $I = 0$. Положим $e = e_1 + \ldots + e_{s-1}$ и $f = e_s$, $I_1 = eIe$. По предположению индукции $I_1^{s-1} = 0$. Непосредственное вычисление показывает, что $I^k \subset I_1^{k-1} + I_1^{k-1}eIf + fIeI_1^{k-1}$. Поэтому $I^s = 0$.

Следствие 1 [7]. *Первичный радикал полунаследственного полусовершенного кольца нильпотентен.*

Доказательство следует из леммы 6, так как для любого локального идемпотента имеет место $eIe = 0$, где I — первичный радикал кольца eAe.

Пусть A — полуцепное полунаследственное кольцо, I — его первичный радикал, $\bar{A} = A/I = \bar{A}_1 \times \ldots \times \bar{A}_t$ — прямое произведение первичных полуцепных колец. По теореме 1 такое разложение существует. Пусть $\bar{1} = \bar{f}_1 + \ldots$ $\ldots + \bar{f}_t$ — соответствующее разложение единицы кольца $\bar{A}$ и $f_1, \ldots, f_t$ — ортогональные идемпотентные прообразы $\bar{f}_1, \ldots, \bar{f}_t$, сумма которых равна единице кольца A. Обозначим $f_i A f_j = A_{ij}$ при $i, j = 1, \ldots, t$. Очевидно, $f_i I f_j = A_{ij}$ при $i \neq j$. Поэтому с учетом предложения 1 двустороннее пирсовское разложение первичного радикала I кольца A задается формулой

$$I = (I_{ij}),\ I_{ij} = A_{ij} \tag{1}$$

при $i \neq j$, I_{ii} — первичный радикал кольца A_{ii}.

Предложение 3. *Для кольца A, неразложимого в прямое произведение колец, существует перенумерация идемпотентов $f_1, \ldots, f_t$ такая, что $A_{ij} = 0$ при $i > j$, $f_i I f_i = 0$ для всех i и $A_{ij} \neq 0$ при $i < j$.*

Доказательство проведем индукцией по t. Будем писать $e \in f$, если $f = e + e'$, где e, e' и f — идемпотенты и $ee' = e'e = 0$. Пусть $t = 1$, $f = f_1$ и e — локальный идемпотент, причем $e \in f$, $f = e + e'$. Так как кольцо A/I первично, то eAe' и $e'Ae$ отличны от нуля. Если $eIe \neq 0$, то по лемме 6 $eIe'e'Ae \neq 0$. Но с другой стороны, $eIe'e'Ae \subset eIe = 0$. Если $e'Ie \neq 0$, то $eAe'e'Ie \subset eIe = 0$. Получим противоречие. Значит, $I = 0$. Точно так же с помощью формулы (1) можно показать, что $f_i I f_i = 0\ \forall i$. Положим $g_1 = f_1 + \ldots + f_{t-1}$ и $g_2 = f_t$. Предположим, что кольцо $A_1 = g_1 A g_1$ представимо в виде прямого произведения колец $A_1 = A_1' \times A_1''$. Пусть $g_1' + g_1'' = g_1$ — соответствующее разложение идемпотента g_1. Обозначим $g_1' A g_2 = A_{12}'$, $g_1'' A g_2 = A_{12}''$, $g_2 A g_1' = A_{21}'$, $g_2 A g_1'' = A_{21}''$, $g_2 A g_2 = A_2$. Так как кольцо A неразложимо, то без ограничения общности можно считать, что $A_{12}' \neq 0$. Поэтому существует локальный идемпотент $e \in g_1'$ такой, что $eAg_2 \neq 0$. Из первичности кольца A_2 и из леммы 6 получаем, что $eAh \neq 0$ для любого локального идемпотента $h \in g_2$. По лемме 3 левый A_1-модуль $g_1 A h$ является цепным. Но, очевидно, $g_1 A h = g_1' A h \oplus g_1'' A h$. Следовательно, $g_1'' A h = 0$ для любого локального идемпотента $h \in g_2$. Поэтому $A_{12}'' = 0$. Если $A_{21}'' = 0$, то кольцо A разложимо. Значит, $A_{21}'' \neq 0$. Следовательно, существует локальный идемпотент $f \in g_1'$ такой, что $g_2 A f \neq 0$. Как и выше, $hAf \neq 0$ для любого локального идемпотента $h \in g_2$. Но тогда, если $eah \neq 0$ и $ha_1 f \neq 0$, по лемме 6 $eaha_1 f \neq 0$ и $eaha_1 f \in g_1' A g_1'' = 0$. Получили противоречие. Теперь по предположению индукции кольцо A имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1,t-1} & A_{1t} \\ 0 & A_{22} & \ldots & A_{2,t-1} & A_{2t} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{t1} & A_{t2} & \ldots & A_{t,t-1} & A_{tt} \end{pmatrix}.$$

Из первичности колец A_{ii} и из леммы 6 получаем, что если $A_{ij} \neq 0$, то для любых локальных идемпотентов $e \in f_i$ и $h \in f_j$ произведение eAf отлично от нуля. Пусть $A_{t1} \neq 0$. Так как $A_{it} A_{t1} = 0$ при $i = 2, \ldots, t-1$, то по лемме 6 из того, что $A_{t1} \neq 0$, следуют равенства $A_{it} = 0$ при $i = 2, \ldots$ $\ldots, t-1$. Кроме того, $A_{1t} A_{t1} \subset f_1 I f_1 = 0$. Значит, и $A_{1t} = 0$. Меняя местами идемпотенты f_1 и f_t, получаем, что в новом пирсовском разложении $A_{1t} \neq 0$, $A_{t1} \neq 0$. Кольцо $(1 - f_1) A (1 - f_1)$ по предположению индукции после некоторой перенумерации идемпотентов $f_2, \ldots, f_t$ имеет клеточно-треугольный вид. Но тогда кольцо A имеет вид, указанный в формулировке предложения. Если $A_{t1} = 0$, то снова кольцо $(1 - f_1) A (1 - f_1)$ имеет клеточно-треугольный вид. Из неразложимости кольца A следует существование наименьшего номера j такого, что $A_{1j} \neq 0$. Если $j > 2$, то полагая

$g_1' = f_1$, $g_1'' = f_2 + \ldots + f_{j-1}$, $g_2 = f_j + \ldots + f_t$, приходим к ситуации, рассмотренной выше. Поэтому $A_{12} \neq 0$. Поскольку $A_{23} \neq 0, \ldots, A_{t-1,t} \neq 0$, по лемме 6 получаем, что произведение $A_{12}A_{23} \ldots A_{t-1,t} \neq 0$, откуда $A_{1k} \neq 0$ при $k = 1, \ldots, t$. Предложение доказано.

Итак, можно считать, что полунаследственное полуцепное кольцо A имеет вид, указанный в предложении 3. По теореме 2 кольцо A имеет полуцепное кольцо частных $\tilde{A}$. В силу замечания 1 кольцо $\tilde{A}$ артиново. Обозначим через $r_i \in A_{ii}$ регулярный элемент кольца A_{ii}, $i = 1, \ldots, t$. Ясно, что элемент $r = r_1 + \ldots + r_t + x$, где $x \in I$, является регулярным элементом кольца A и всякий регулярный элемент кольца A имеет такой вид. Пусть $\tilde{A}_{ii}$ — кольцо частных кольца A_{ii}. Тогда, учитывая вид регулярных элементов кольца A, получаем, что кольцо $\tilde{A}$ имеет следующее двустороннее пирсовское разложение:

$$\tilde{A} = (\tilde{A}_{ij}), \tag{2}$$

где $\tilde{A}_{ii}$ — кольцо частных A_{ii}, $\tilde{A}_{ij} = \tilde{A}_{ii}A_{ij}\tilde{A}_{jj}$, $i, j = 1, \ldots, t$.

Отметим, что локальные идемпотенты кольца A остаются локальными и в кольце $\tilde{A}$. Поэтому кольца A и $\tilde{A}$ одновременно разложимы в прямое произведение колец. Кроме того, очевидно, что если в кольце $\tilde{A}$ есть нильпотентные идеалы, то и в кольце A есть нильпотентные идеалы. Отсюда мы получаем следующее предложение.

Предложение 4. *Первичное полунаследственное полуцепное кольцо обладает простым артиновым кольцом частных.*

Из формулы (2) с учетом предложения 4 получаем, что кольцо $\tilde{A}$ имеет простой $\tilde{A}$-модуль. Тогда по теореме Голди [8] получаем, что кольцо $\tilde{A}$ изоморфно кольцу $\tilde{K}$ клеточно-треугольных матриц над некоторым телом D:

$$\tilde{K} = \left(\begin{array}{c|c|c|c} M_{n_1}(D) & M_{n_1 \times n_2}(D) & \cdots & M_{n_1 \times n_t}(D) \\ \hline 0 & M_{n_2}(D) & \cdots & M_{n_2 \times n_t}(D) \\ \hline 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ \hline 0 & 0 & 0 & M_{n_t}(D) \end{array}\right),$$

где n_i — число локальных попарно ортогональных идемпотентов, в сумму которых разлагается идемпотент f_i, $i = 1, \ldots, t$.

Поэтому можно считать, что $A_{ii} \subset M_{n_i}(D)$, а $A_{ij} \subset M_{n_i \times n_j}(D)$, $i, j = \overline{1, t}$. Покажем теперь, что $A_{ij} = M_{n_i \times n_j}(D)$ при $i \neq j$. Для этого достаточно показать, что для любых двух локальных идемпотентов $e \in f_i$ и $h \in f_j$ $(i \neq j)$ $eAh = D$. Положим $g = e + h$ и пусть $B = gAg$. Обозначим $eAe = \mathfrak{O}_1$, $hAh = \mathfrak{O}_2$ и $eAh = X$. По предложению 2 кольцо $B = \begin{pmatrix} \mathfrak{O}_1 & X \\ 0 & \mathfrak{O}_2 \end{pmatrix}$ полунаследственное и полуцепное. Ясно, что можно считать $B \subset T_2(D)$ и $\mathfrak{O}_i = e_{ii}Be_{ii}$, $i = 1, 2$, $X = e_{11}Be_{22}$ (e_{11}, e_{22} — матричные идемпотенты). По лемме 3 X — цепной правый $\mathfrak{O}_2$-модуль. Покажем, что для каждого $\alpha \in \mathfrak{O}_1$ выполняется равенство $\alpha X = X$. Если $\alpha X \neq X$, то для $x_0 \in X \setminus \alpha X$ имеет место включение $x_0\mathfrak{O}_2 \supset \alpha X$. Тогда $(\alpha\mathfrak{O}_1, \alpha X) + (0, x_0\mathfrak{O}_2) = (\alpha\mathfrak{O}_1, x_0\mathfrak{O}_2)$ — конечно порожденный B-модуль, который является цепным как подмодуль цепного модуля. Кроме того, он проективен. Значит, он главный и изоморфен модулю $P = e_{11}B$. Поэтому кольцо B имеет вид $B = \begin{pmatrix} \mathfrak{O}_1 & x\mathfrak{O}_2 \\ 0 & \mathfrak{O}_2 \end{pmatrix}$.

Трансформируя кольцо B с помощью матрицы $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, получаем кольцо $B_1 = \begin{pmatrix} x^{-1}\mathfrak{O}_1 x & \mathfrak{O}_2 \\ 0 & \mathfrak{O}_2 \end{pmatrix} \subset T_2(D)$, которое изоморфно кольцу B. Обозначим $\mathfrak{O} = x^{-1}\mathfrak{O}_1 x$ и $\mathfrak{M}$ — радикал Джекобсона кольца $\mathfrak{O}$. В силу изложенного выше, существует элемент $\alpha \in \mathfrak{M}$ такой, что $\alpha\mathfrak{O}_2 \neq \mathfrak{O}_2$. Рассмотрим идеалы $(\alpha^2\mathfrak{O}, \mathfrak{O}_2)$ и $(\alpha\mathfrak{O}, \alpha\mathfrak{O}_2)$, лежащие в $(\mathfrak{O}, \mathfrak{O}_2)$. Так как $\alpha^2\mathfrak{O} \neq \alpha\mathfrak{O}$, то эти два идеала не содержатся друг в друге, и потому модуль $(\mathfrak{O}, \mathfrak{O}_2)$ не цепной. Следовательно, для любого $\alpha \in \mathfrak{O}$ выполняется равенство $\alpha X = X$, откуда X является левым векторным пространством над телом D. Поскольку $X \subset D$, то $X = D$. Итак, мы доказали следующую теорему.

Теорема 3. *Всякое полуцепное полунаследственное кольцо A с точностью до изоморфизма эквивалентно в смысле Мориты прямому произведению колец вида K, где*

$$K = \left(\begin{array}{c|c|c|c} A_1 & M_{n_1 \times n_2}(D) & \cdots & M_{n_1 \times n_t}(D) \\ \hline 0 & A_2 & \cdots & M_{n_2 \times n_t}(D) \\ \hline 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ \hline 0 & 0 & 0 & A_t \end{array} \right).$$

Кольца $A_1, \ldots, A_t$ — первичны и являются полуцепными и полунаследственными и кольцо частных $\tilde{A}_i$ кольца A_i имеет вид $M_{n_i}(D)$, $i = 1, \ldots, t$.

1. *Фейс К.* Алгебра: кольца, модули и категории.— М. : Мир, 1979.— 464 с.
2. *Кириченко В. В.* Обобщенно однорядные кольца // Мат. сб.— 1976.— 99, № 4.
3. *Ламбек И.* Кольца и модули.— М. : Мир, 1971.— 280 с.
4. *Кириченко В. В.* Обобщенно однорядные кольца.— Киев, 1975.— 58 с.— (Препринт / АН УССР; Ин-т математики, № 75-1).
5. *Кириченко В. В.* О полуцепных наследственных и полунаследственных кольцах // Зап. науч. семинара Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СССР.— 1982.— **114**.— С. 137—147.
6. *Дрозд Ю. А.* Об обобщенно однорядных кольцах // Мат. заметки.— 1975.— **18**, № 5.— С. 705—710.
7. *Gordon R., Small L. W.* Piecewise domains // J. Algebra.— 1972.— **23**, N 3.— P. 553—564.
8. *Goldie A. W.* Torsion-free modules and rings // Ibid.— 1964.— **1**, N 3.— P. 268—287.

Киев. ун-т | Получено 05.06.85