УДК 517.9

Ю. А. Митропольский, А. К. Лопатин

Асимптотическая декомпозиция дифференциальных систем с малым параметром

В работах [1—7] предложен алгоритм асимптотической декомпозиции, являющийся развитием метода усреднения Н. Н. Боголюбова [8]. В основу метода положены преобразования в виде рядов Ли по малому параметру.

Впервые ряды Ли в теории возмущений были применены Хори [9] для канонических систем и распространены Хори [10] и Кэмелом [11] на неканонические системы. Это направление, названное методом усреднения и использованием рядов и преобразований Ли (см., например, [12]), получило дальнейшее развитие. Теория возмущений, основанная на рядах и преобразованиях Ли, имеет ряд преимуществ по сравнению с существующими методами. Одним из этих преимуществ является простота алгоритма.

Другой подход, использующий в качестве преобразований ряды Ли, содержащие параметр, предложен А. Я. Повзнером [13]. В основу метода, в отличие от упомянутых выше работ, положена известная формула Кэмпбелла — Хаусдорфа [14]. Специальные предложения о спектральных свойствах дифференциального оператора, ассоциированного с системой нулевого приближения, позволило дать конструктивный алгоритм и сформулировать ряд теорем о свойствах преобразований системы [15, 16].

В предложенном нами методе асимптотической декомпозиции также используется формула Кэмпбелла — Хаусдорфа, однако, в отличие от указанных выше работ, он сводится к исследованию структур алгебр Ли, порождаемых исходной и преобразованной системами. Это обстоятельство позволило использовать аппарат классической теории непрерывных групп Ли и получить ряд новых существенных результатов. Первыми публикациями авторов по этому вопросу являются работы [1, 2], которые появились под влиянием работы А. Я. Повзнера [13].

В настоящей работе приведены алгоритм метода асимптотической декомпозиции и доказательство основных теорем. Вместо термина «система централизатора», введенного в [4], используется термин «централизованная система».

Общая схема алгоритма асимптотической декомпозиции. Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$dx/dt = \omega(x), \ x(t_0) = x_0, \tag{1}$$

где $x = \operatorname{colon} \| x_1, \ldots, x_n \|$, $\omega = \operatorname{colon} \| \omega_1(x), \ldots, \omega_n(x) \|$, $\omega_i \in \mathfrak{O}(G)$, $i = \overline{1, n}$, $G_0 = I \times G \in R^{n+1}$, $G \in R^n$, $t \in I$, — область существования и единственности решения задачи Коши системы (1), $\mathfrak{O}(G)$ — многообразие аналитических функций, определенное на G.

Пусть $\mathfrak{O}^{(1)}(G)$ обозначает множество линейных дифференциальных операторов в частных производных первого порядка (в дальнейшем просто операторов) с коэффициентами из $\mathfrak{O}(G)$.

В основу изучения системы (1) положим структурные свойства, характеризуемые некоторой группой инвариантности. Система (1) инвариантна относительно локальной однопараметрической группы Ли, представленной в виде ряда Ли

$$x = \exp(\mu Z(\bar{x}))\, \bar{x}, \tag{2}$$

где μ — параметр, характеризующий группу, Z — некоторый оператор из $\mathfrak{O}^{(1)}(G)$, если под действием преобразования (2) она переходит в систему $d\bar{x}/dt = \omega(\bar{x})$. Как известно, для этого необходимо и достаточно, чтобы оператор Z был решением уравнения (см. [17, 18])

$$[U, S] = 0, \tag{3}$$

где $U = \omega_1(x)\,\partial/\partial x_1 + \ldots + \omega_n(x)\,\partial/\partial x_n$ — линейный дифференциальный оператор, ассоциированный с системой (1), $[\ ,\ ]$ — скобка Пуассона.

Множество всех решений уравнения (3) образует алгебру Ли $\mathfrak{B}_0$, которая вполне характеризует исходную систему (1). Эта алгебра не пуста, так как содержит элемент $Z = U$. Алгебру Ли $\mathfrak{B}_0$ будем называть алгеброй централизатора элемента U. Совокупность преобразований (2), где $Z \in \mathfrak{B}_0$, порождает некоторую псевдогруппу $\mathfrak{G}(\mathfrak{B}_0)$. Однако в дальнейшем достаточно рассматривать лишь алгебру $\mathfrak{B}_0$.

Пусть система (1), которую в дальнейшем будем называть системой нулевого приближения, подвергнута малым возмущениям $\varepsilon\tilde{\omega}(x)$:

$$dx'/dt = \omega(x') + \varepsilon\tilde{\omega}(x'), \quad x'(t_0) = x_0, \tag{4}$$

где $\tilde{\omega}(x') = \operatorname{colon} \| \tilde{\omega}_1(x'), \ldots, \tilde{\omega}_n(x') \|$, $\tilde{\omega}_i(x') \in \mathfrak{O}(G)$, $i = \overline{1, n}$, ε — малый положительный параметр. Через $G_{0\varepsilon} = I \times I_\varepsilon \times G \in R^{n+2}$, $I_\varepsilon = [0, 1]$, обозначим область существования и единственности решения задачи Коши системы (4), которую будем называть возмущенной системой. Сопоставим системе (4) некоторую эталонную систему. Для этого в системе (4) выполним замену переменных в виде ряда Ли.

$$x_j' = \exp(\varepsilon S)\, x_j, \quad j = \overline{1, n}, \tag{5}$$

где

$$S = S_1 + \varepsilon S_2 + \ldots, \ S_i = \gamma_{i1}(x)\,\partial/\partial x_1 + \ldots + \gamma_{in}(x)\,\partial/\partial x_n. \tag{6}$$

Легко указать обратное к (5) преобразование $x_j = \exp(-\varepsilon S')\, x_j'$, $j = \overline{1, n}$ (здесь для упрощения записи использовано соглашение [4] об обозначении функций $f(x')$ и $f(x)$ в виде $f' \equiv f(x')$, $f \equiv f(x)$). Пользуясь связью системы (4) и ассоциированного с ней дифференциального оператора

$$U_0' = U' + \varepsilon\tilde{U}', \tag{7}$$

где $\tilde{U} = \tilde{\omega}_1(x')\,\partial/\partial x_1' + \ldots + \tilde{\omega}_n(x')\,\partial/\partial x_n'$, подвергаем этот оператор преобразованию (5), а далее переходим к преобразованной системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Вид оператора U_0' после преобразования (5) дает формула Кэмпбелла—Хаусдорфа [14]

$$U_0' \to U_0 - \frac{\varepsilon}{1!}[U_0, S] + \frac{\varepsilon^2}{2!}[[U_0, S], S] - \frac{\varepsilon^2}{3!}[[[U_0, S], S], S] + \ldots .$$

Подставляя в приведенные формулы значения операторов S, U_0, задаваемых соотношениями (6) и (7), для оператора U_0' в новых переменных получим

$$U_0' \to U_0 = U + \varepsilon(-[U, S_1] + F_1) + \ldots + \varepsilon^\nu(-[U, S_\nu] + F_\nu) + \ldots, \tag{8}$$

где $F_1 = \tilde{U}$, $F_2 = -[\tilde{U}, S_1] + \frac{1}{2}[U, [U, S_1]], \ldots, F_\nu$ — известная функция от операторов $U, \tilde{U}, S_1, \ldots, S_{\nu-1}$.

Вид преобразованного оператора U_0, а следовательно, и соответствующей ему системы дифференциальных уравнений, зависит от способа выбора последовательности операторов

$$S_1, S_2, \ldots, \tag{9}$$

которые пока не определены. Для нахождения этих операторов образуем последовательность рекуррентных операторных уравнений

$$[U, S_j] = F_j, \quad j = 1, 2, \ldots . \tag{10}$$

В дальнейшем вместо системы (10) будем рассматривать уравнение-представитель

$$[U, S] = F, \ F \in \mathfrak{D}^{(1)}(G). \tag{11}$$

Разрешимость операторного уравнения (11) определяется структурой решения однородного уравнения (3), которое, в свою очередь, порождает алгебру централизатора $\mathfrak{B}_0$.

Неоднородное уравнение (11) должно обладать решениями с определенными аналитическими свойствами. Например, оно не должно содержать секулярных членов на траекториях системы нулевого приближения, или сохранять точку покоя и т. д. Это возможно лишь в том случае, когда правая часть уравнения (11) не содержит элементов из $\mathfrak{B}_0$.

Реализация нужных свойств решения операторных уравнений осуществляется заменой системы (10) системой

$$[U, S_j] = F_j - \operatorname{pr} F_j, \quad j = 1, 2, \ldots, \tag{12}$$

где $\operatorname{pr} F_j$ обозначает проекцию оператора F_j на алгебру $\mathfrak{B}_0$ (точное определение этого понятия приводится ниже).

Пусть последовательность операторов (9) определена из системы уравнений (12), тогда преобразованный оператор U_0 (8) примет вид

$$U_0 = U + \varepsilon N_1 + \varepsilon^2 N_2 + \ldots + \varepsilon^\nu N_\nu + \ldots, \tag{13}$$

где

$$N_\nu \equiv \operatorname{pr} F_\nu \equiv \sum_{j=1}^{n} b_{\nu j0}(x)\,\partial/\partial x_j, \quad \nu = 1, 2, \ldots . \tag{14}$$

По оператору (13) восстановим преобразованную систему

$$dx_j/dt = \omega_j(x) + \varepsilon N(x)\,x_j, \quad j = \overline{1, n}, \tag{15}$$

где $N(x) = N_1(x) + \ldots + \varepsilon^{\nu-1} N_\nu(x) + \ldots$, или, учитывая формулы (14), представим ее в виде

$$dx_j/dt = \omega_j(x) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon^\nu b_{\nu j 0}(x), \quad j = \overline{1, n}. \tag{16}$$

Обертывающей алгеброй Ли полученной системы (15) (или 16)) является алгебра централизатора $\mathfrak{B}_0$. Чтобы подчеркнуть эту связь с алгеброй централизатора, будем называть систему (15) централизованной. Централизованная система (15) обладает следующими свойствами: ее нулевое приближение совпадает с системой нулевого приближения (1) и она инвариантна относительно однопараметрической группы преобразований

$$x = \exp(\mu U(\bar{x}))\, \bar{x}, \tag{17}$$

где $\bar{x} = \operatorname{colon} \| \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n \|$, U — оператор, ассоциированный с системой нулевого приближения, т. е. системой (1).

Описанный алгоритм перехода от возмущенной системы (4) к централизованной системе (15) будем называть алгоритмом асимптотической декомпозиции. Инвариантность централизованной системы относительно однопараметрической группы (17) можно принять в качестве ее определения и формулировать полученный результат следующим образом: алгоритм асимптотической декомпозиции сопоставляет возмущенной системе (4) в качестве эталонной системы централизованную систему (15); централизованная система инвариантна относительно однопараметрической группы преобразований (17), в то время как возмущенная система инвариантна относительно этой группы лишь в нулевом приближении.

Интегрирование централизованной системы (15) проще, чем интегрирование исходной возмущенной системы (4). Соответствующие теоремы приведены ниже.

Выше была отмечена определяющая роль асимптотической декомпозиции структуры решения однородного уравнения (3) в осуществлении алгоритма. Решения уравнения (3) будем разыскивать в обертывающей алгебре Ли $\tilde{\mathfrak{B}}$ возмущенной системы. Она порождается операторами $U, \tilde{U}$ и содержит элементы $U, \tilde{U}, [U, \tilde{U}], [U, [U, \tilde{U}]], \ldots$, полученные путем вычисления скобок Пуассона от этих операторов. Очевидно, $\mathfrak{B}_0 \subset \tilde{\mathfrak{B}} \subseteq \mathfrak{D}^{(1)}(G)$. Наряду с уравнением (3) на $\tilde{\mathfrak{B}}$ можно рассмотреть также уравнение

$$[U, [U, Y]] = 0. \tag{18}$$

Нетрудно показать, что все решения уравнения (18) из $\tilde{\mathfrak{B}}$ также образуют алгебру Ли $\mathfrak{B}^{(1)}$, причем $\mathfrak{B}_0 \subseteq \mathfrak{B}^{(1)}$. Алгебру $\mathfrak{B}^{(1)}$ будем называть алгеброй централизатора степени 2 (по числу скобок Пуассона в уравнении (18)). По индукции можно определить алгебру централизатора произвольной степени k.

В дальнейшем ограничимся рассмотрением алгебр централизатора первой степени, т. е. предположим выполнение тождества $\mathfrak{B}^{(1)} \equiv \mathfrak{B}_0$. Именно этот случай имеет наибольшее практическое значение. Рассмотрение же сразу общей ситуации не вносит принципиальных изменений в рассуждения и значительно усложняет выкладки.

Другой важнейшей подалгеброй наряду с $\mathfrak{B}_0$ является подалгебра $\mathfrak{B}_n \subseteq \tilde{\mathfrak{B}}$, допускаемая оператором U. Ее элементы удовлетворяют соотношению $[U, \mathfrak{B}_n] = \mathfrak{B}_n$.

Определим линейное отображение L_U, действующее на алгебре $\tilde{\mathfrak{B}}$, формулой $L_U X = [U, X]$, $X \in \tilde{\mathfrak{B}}$. Таким образом, алгебра централизатора $\mathfrak{B}_0$ является ядром отображения L_U, а алгебра $\mathfrak{B}_n$ — его образом.

Возвращаясь к неоднородному уравнению (11), отметим, что при выборе оператора $\operatorname{pr} F$ и нахождении оператора S из уравнения $[U, S] = F - \operatorname{pr} F$ используем следующее свойство обертывающей алгебры Ли $\tilde{\mathfrak{B}}$.

О с н о в н о е с в о й с т в о р а з л о ж и м о с т и о б е р т ы в а ю щ е й а л г е б р ы $\tilde{\mathfrak{V}}$: любой элемент $F \in \tilde{\mathfrak{V}}$ может быть представлен однозначно в виде суммы

$$F = F_{0\Delta} + F_{0n}, \quad F_{0\Delta} \in \mathfrak{V}_0, \quad F_{0n} \in \mathfrak{V}_n. \tag{19}$$

О п р е д е л е н и е 1. *В предположении о выполнении свойства разложимости* (19) *в качестве проекции* $\operatorname{pr} F$ *оператора* F *примем* $\operatorname{pr} F \overset{\text{def}}{=} F_{0\Delta}$.

Свойство разложимости (19) является определяющим при выборе систем, к которым применим алгоритм асимптотической декомпозиции, и будет доказываться в каждом отдельном случае.

Рассмотрим решение операторного уравнения (3), определяющего алгебру $\mathfrak{V}_0$. Могут представиться два принципиальных случая.

В первом случае система (1) нулевого приближения в рассматриваемой области не имеет точек покоя. Используя классические теоремы существования и единственности решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений, можно показать, что операторное уравнение (3) имеет, по крайней мере локально (в окрестности каждой точки), решениями n линейно несвязанных операторов из $\mathfrak{D}^{(1)}(G)$. Обоснование алгоритма в этом случае приводится просто для систем нулевого приближения общего вида (см. работу [4]).

Во втором случае система (1) нулевого приближения содержит в рассматриваемой области точку покоя $x = 0$. Обозначим подмножество функций из $\mathfrak{D}(G)$, обращающихся в нуль при $x = 0$, через $\mathfrak{D}_0(G)$, а дифференциальные операторы, определенные на $\mathfrak{D}_0(G)$, через $\mathfrak{D}_0^{(1)}(G)$. Так как по предположению $U, \tilde{U} \in \mathfrak{D}_0^{(1)}(G)$, то и алгебра $\tilde{\mathfrak{V}}$ принадлежит $\mathfrak{D}_0^{(1)}(G)$. Здесь классические теоремы теории дифференциальных уравнений непригодны, а используется аппарат теории представлений групп и алгебр Ли в подходящих гильбертовых пространствах (см. [7]). Обоснование алгоритма асимптотической декомпозиции требует в этом случае, вообще говоря, знания более тонкой структуры системы нулевого приближения.

Чтобы различать описанные два случая, будем говорить, что $\tilde{\mathfrak{V}} \subseteq \mathfrak{D}^{(1)}(G)$, если область G не содержит точку покоя, и $\tilde{\mathfrak{V}} \subseteq \mathfrak{D}_0^{(1)}(G)$, если область G содержит точку покоя.

О с н о в н ы е т е о р е м ы о б и н т е г р и р о в а н и и ц е н т р а л и з о в а н н о й с и с т е м ы (15). Укажем преимущества, которые дает метод асимптотической декомпозиции, сводя интегрирование исходной возмущенной системы (4) к интегрированию централизованной системы (15). Особенностью централизованной системы (15) является возможность свести ее интегрирование к интегрированию системы нулевого приближения (1). Обозначим через $\bar{G}$ замкнутую подобласть из G, $\bar{G}_{0\varepsilon} = \bar{I} \times \bar{I}_{0\varepsilon} \times \bar{G}$, $\bar{I} = [a, b]$. Следующее утверждение о структуре централизованной системы справедливо для обертывающих алгебр как над $\mathfrak{D}^{(1)}(G)$, так и над $\mathfrak{D}_0^{(1)}(G)$.

Т е о р е м а 1. *Пусть в централизованной системе* (15) *коэффициенты оператора* $N(x)$ *являются аналитическими функциями в области* $\bar{G}_{0\varepsilon} = \bar{I} \times \bar{I}_\varepsilon \times \bar{G} \in R^{n+2}$, $\bar{I}_\varepsilon = [0, 1]$, $\bar{I} = [a, b]$. *Тогда можно указать такое число* $T_0 > 0$, *что решение системы* (15) *представимо рядом Ли*

$$x_j = \exp(\tau(N(z)) z_j, \quad \tau \equiv \varepsilon(t - t_0), \quad j = \overline{1, n}, \tag{20}$$

где $z = \operatorname{colon} \| z_1, \ldots, z_n \|$ — *решение системы нулевого приближения*

$$dz/dt = \omega(z), \quad z(t_0) = x_0. \tag{21}$$

Ряд Ли (20) *сходится абсолютно и равномерно в области* $\bar{G}_{0\varepsilon T} = [t_0, t_0 + T_0/\varepsilon] \times \bar{I}_\varepsilon \times \bar{G}$.

С л е д с т в и е 1. *Пусть решение* $z(t, t_0, x_0)$ *системы* (21) *нулевого приближения продолжимо на интервал* $[t_0, t_0 + L]$, $L < +\infty$. *Тогда можно указать такой интервал* $I_\varepsilon(t_0, x_0) \in \bar{I}_\varepsilon$, *что при всех* $\varepsilon \in I_\varepsilon(t_0, x_0)$

решение централизованной системы (15) *представимо в виде сходящегося на интервале* $[t_0, t_0+L]$ *ряда Ли* $x_j(t) = \exp(\tau N(t, t_0, z_0)) z_j(t, t_0, x_0)$.

Следствие 2. *Пусть решение системы* (21) *нулевого приближения представимо сходящимся рядом Ли*

$$z(t) = \exp((t-t_0) U(x_0)) x_0, \quad t \in [t_0, t_0+L]. \tag{22}$$

Тогда можно указать такой интервал $I_\varepsilon(t_0, x_0) \in \overline{I}$, *что при всех* $\varepsilon \in I_\varepsilon(t_0, x_0)$ *решение централизованной системы* (15) *представляется в виде сходящегося на интервале* $[t_0, t_0+L]$ *ряда Ли*

$$x_j(t) = \exp((t-t_0) U(x_0)) \exp(\tau (N(x_0)) x_0. \tag{23}$$

Доказательство. В централизованной системе (15) сделаем замену переменных в виде ряда Ли

$$x = \exp(\tau N(z)) z, \quad \tau = \varepsilon (t-t_0). \tag{24}$$

Обратное преобразование задается формулой $z = \exp(-\tau N(x)) x$. Преобразуем вначале соответствующий централизованной системе (15) оператор $U^{(1)}(x) = \partial/\partial t + U(x) + \varepsilon N(x)$. В новых переменных для оператора $U^{(1)}(x)$ получим выражение

$$\sum_{i=1}^{n} U^{(1)}(x) z_i \partial/\partial z_i = \sum_{i=1}^{n} (U^{(1)} \exp(-\varepsilon t N(x)) x_i) \partial/\partial z_i = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} (\exp(-\varepsilon t N(x)) \times \right.$$

$$\left. \times x_i + U(x) \exp(-\varepsilon t N(x)) x_i + \varepsilon N(x) \exp(-\varepsilon t N(x)) x_i \right\} \frac{\partial}{\partial z_i} \equiv$$

$$\equiv \sum_{i=1}^{n} \{-\varepsilon N(x) \exp(-\varepsilon t N(x)) x_i + U(x) \exp(-\varepsilon t N(x)) x_i + \varepsilon N(x) \times$$

$$\times \exp(-\varepsilon t N(x) x_i\} \partial/\partial z_i \equiv \sum_{i=1}^{n} (U(x)) \exp(-\varepsilon t N(x)) x_i \partial/\partial z_i.$$

Коэффициенты полученного оператора являются функциями переменных x, которые подвергнуты точечным преобразованиям (24). Используя свойства этих преобразований, получаем $U(x) \exp(-\varepsilon t N(x)) x_i \equiv \exp(\varepsilon t N(z)) U(z) \exp(-\varepsilon t N(z)) z_i \equiv U(z) z_i \equiv \omega_i(z)$. При выводе последнего тождества следует принять во внимание коммутативность операторов U и N. Итак, в новых переменных z оператор $U^{(1)}(z) \equiv \partial/\partial t + U(z)$ и ему соответствует система (21).

В [17] (§3) показано, что ряд Ли (24) сходится абсолютно при $|\tau| < \min\left\{\chi, \frac{\alpha}{K(n+2)}\left(1-\frac{\chi}{\alpha}\right)^{n+2}\right\}$, $\tau = \varepsilon(t-t_0)$, где постоянная K находится по коэффициентам оператора, постоянные χ, α определяют параллелепипед из $\overline{G}: |z_j| \leqslant \chi < \alpha$, $j = \overline{1, n}$. Примем в приведенном неравенстве $\chi = \theta\alpha$, $0 < \theta < 1$. Тогда ряд (24) при $|\tau| \leqslant \tau_0 < \min\left\{\theta\alpha, \frac{\alpha(1-\theta)^{n+2}}{K(n+2)}\right\}$ в области $\overline{Q}$, определяемой неравенствами $|z_j| \leqslant \alpha\theta$, будет сходиться абсолютно и равномерно и представлять в ней аналитическую функцию переменных τ, z.

Приведенные рассуждения для окрестности точки $\tau = z = 0$ справедливы для любой точки из $\overline{G}_{0\varepsilon}$. Тем самым любой точке $z \in \overline{G}_{0\varepsilon}$ можно сопоставить число $\tau_0(z)$ и область $\overline{Q}(z)$ такие, что внутри этой области ряд (24) будет сходиться абсолютно и равномерно. Множество областей типа $\overline{Q}(z)$ образует некоторое покрытие области $\overline{G}_{0\varepsilon}$, из которого согласно теореме Бореля можно выделить конечное подпокрытие. В этом конечном множестве областей каждой подобласти соответствует свое число $\tau_0(z)$. Выберем среди этих чисел наименьшее и обозначим его T_0. Тогда при $|\tau| \leqslant T_0$ или $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + T_0/\varepsilon$ ряд (24) будет сходиться абсолютно и равномерно во всей области $\overline{G}_{0\varepsilon}$.

Для доказательства следствия 1 необходимо найти параметр ε_1 из уравнения $T_0/\varepsilon_1 = L$. Тогда искомый интервал $I(t_0, x_0)$ есть $[0, \varepsilon_1]$. Для доказательства следствия 2 решение (22) в виде ряда Ли подставим в исходный ряд (20). Далее примем во внимание точечность преобразований и найдем интервал $I(t_0, x_0)$ согласно следствию 1. В результате получим формулы (23).

Укажем еще один путь интегрирования централизованной системы (15), определяемый следующими теоремами.

Теорема 2. *Пусть в централизованной системе* (15) *решение системы нулевого приближения* $dx/dt = \omega(x)$ *может быть представлено сходящимся рядом Ли*

$$x_j = \exp((t - t_0)U(\bar{x}))\bar{x}_j, \quad j = \overline{1, n}, \quad t \in [t_0, t_0 + L], \ \bar{x} \in G_{0\varepsilon}. \tag{25}$$

Тогда принимая в качестве новых переменных вектор $\bar{x} = \operatorname{colon} \| \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n \|$ *и выполняя в централизованной системе* (15) *замену переменных* (25), *приводим ее к системе с медленным временем вида* $d\bar{x}_j/d\tau = N(\bar{x})\bar{x}_j$, $j = \overline{1, n}$, $\bar{x}(t_0) = x_0$, *где* $N(\bar{x}) = N_1(\bar{x}) + \varepsilon N_2(\bar{x}) + \ldots$, $\tau = \varepsilon(t - t_0)$.

Теорема 3. *Пусть в централизованной системе* (15) *известно общее решение системы нулевого приближения*

$$\bar{x} = \varphi(t, t_0, c), \quad c = \operatorname{colon} \| c_1, \ldots, c_n \|, \tag{26}$$

определенное в области $G_{0\varepsilon}$. *Тогда, принимая в качестве новых переменных вектор* c *и выполняя в централизованной системе замену переменных* (26), *приводим ее к системе с медленным временем* $dc/d\tau = \Phi_1(c) + \varepsilon\Phi_2(c) + \ldots$, $\tau = \varepsilon(t - t_0)$.

Доказательство теорем 2 и 3 аналогично доказательству теоремы 1.

Одним из важнейших вопросов асимптотических методов нелинейной механики и метода усреднения является возможность разделения переменных в системе сравнения на быстрые и медленные. Исследуем условия разделения переменных на быстрые и медленные для централизованной системы (15) с помощью замены переменных

$$\begin{gathered} y_1 = \rho_1(x), \ldots, y_k = \rho_k(x), \\ z_1 = \varphi_1(x), \ldots, z_r = \varphi_r(x), \quad r = n - k. \end{gathered} \tag{27}$$

При этом будем учитывать принадлежность преобразующих функций (27) классу $\mathfrak{O}_0(G)$. Т. е. эти функции должны обращаться в нуль в точке $x = 0$, являющейся точкой покоя централизованной системы (15).

Будем говорить, что централизованная система (15) допускает разделение переменных над $\mathfrak{O}_0(G)$ на быстрые и медленные, если с помощью замены переменных (27) она преобразуется к совокупности двух последовательно интегрируемых подсистем порядков k и r. При этом система порядка k содержит k медленных переменных y и принимает вид

$$dy_j/dt = \sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon^{\nu}\Phi_{\nu j}(y_1, \ldots, y_k), \ j = \overline{1, k}. \tag{28}$$

Соответственно, система порядка $r = n - k$ содержит быстрые переменные z и имеет вид

$$dz_i/dt = F_i(z) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\chi=1}^{m_\nu} \varepsilon^{\nu} \Lambda_{\nu\chi}^{(i)}(y)\, \xi_{\nu\chi}^{(i)}(z). \tag{29}$$

Здесь $y = \operatorname{colon} \| y_1, \ldots, y_k \|$, $z = \operatorname{colon} \| z_1, \ldots, z_r \|$. Коэффициенты систем (28) и (29) принадлежат $\mathfrak{O}_0(G)$. Это означает, что точка покоя $x = 0$ централизованной системы (15 переходит в точку покоя $y = 0$, $z = 0$ преобразованной системы (28), (29).

Для формулировки основного результата о разделении переменных в централизованной системе нам потребуются некоторые вспомогательные понятия.

Запишем уравнение в частных производных

$$Uf = 0, \tag{30}$$

где U — оператор, ассоциированный с ситемой нулевого приближения.

Рассмотрим множество функций $P\{\rho_1(x), \rho_2(x), \ldots,\}$ из $\mathfrak{D}_0(G)$, являющихся решением уравнения (30). Может случиться, что в множестве P найдется конечное число функций $P_l = \{\rho_1(x), \ldots, \rho_l(x)\}$, независимых в G, такое, что любой элемент $\rho(x) \in P$ может быть выражен через функции $P_l: \rho(x) = a(\rho_1, \ldots, \rho_l)$ с помощью функций из $\mathfrak{D}_0(G)$, т. е. $a(0, \ldots, 0) \equiv 0$. Если указанное множество P_l существует, то будем называть его базисным для множества решений P.

Остановимся на структуре алгебры централизатора $\mathfrak{B}_0$. Множество элементов $\mathfrak{B}_{0U} \in \mathfrak{B}_0$ вида $\rho(x)U$, $\rho(x) \in P$ является идеалом в $\mathfrak{B}_0$. Действительно, пусть $Z \in \mathfrak{B}_0$, $Z \not\equiv \rho(x)U$, тогда $[\rho(x)U, Z] \equiv -Z\rho(x)U$. В силу коммутативности элементов $\mathfrak{B}_0$ с U любой интеграл $\rho(x) \in P$ переводится оператором $Z \in \mathfrak{B}_0$ в интеграл совокупности P. Следовательно, элемент $Z\rho(x)U \in \mathfrak{B}_{0U}$.

Так как $\mathfrak{B}_{0U}$ является линейным подпространством в алгебре $\mathfrak{B}_0$, рассматриваемой как линейное пространство, то произвольный элемент Z_j алгебры централизатора представим суммой

$$Z_j = N_j + \rho_j(x)U, \quad j = 1, 2, \ldots . \tag{31}$$

По алгебре централизатора можно построить фактор-алгебру $\mathfrak{B}_0/\mathfrak{B}_{0U}$, образованную комплексами $\{N_j + \mathfrak{B}_{0U}\}$, $j = 1, 2, \ldots$, где N_j — представители классов, являющиеся составляющими в разложении (31).

Образуем множество, составленное из представителей классов смежности $\mathfrak{T} = \{N_1, N_2, \ldots\}$. Множество элементов $\mathfrak{T}$, как нетрудно видеть, образует подалгебру алгебры централизатора $\mathfrak{B}_0$, не являющуюся, однако, идеалом. Если $N \in \mathfrak{T}$, то и оператор $\rho(x)N \in \mathfrak{T}$, $\rho(x) \in P$. Обозначим через $\mathfrak{T}_0$ подмножество элементов из $\mathfrak{T}$: $\mathfrak{T}_0 = \{M_1, M_2, \ldots\}$, которые нельзя представить в виде произведения интеграла $\rho(x) \in P$ на некоторый элемент из $\mathfrak{T}: M_j \not\equiv \rho(x)N_j$, $N_j \in \mathfrak{T}$. Множество $\mathfrak{T}_0$ образует подалгебру алгебры $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{T}_0 \subset \mathfrak{T}$. И, как следует из определения $\mathfrak{T}_0$, подалгебра $\mathfrak{T}$ получается из элементов $\mathfrak{T}_0$ умножением на интегралы из совокупности P. Подалгебру $\mathfrak{T}_0$ будем называть определяющей подалгеброй алгебры централизатора.

Предположим, что в подалгебре $\mathfrak{T}_0$ имеется идеал $\mathfrak{T}_0^{(1)}$, т. е. $[\mathfrak{T}_0, \mathfrak{T}_0^{(1)}] = \mathfrak{T}_0^{(1)}$. Например, в качестве идеала $\mathfrak{T}_0^{(1)}$ может быть выбрана сама подалгебра $\mathfrak{T}_0$. Обозначим элементы идеала $\mathfrak{T}_0^{(1)}$ через $M_j^{(1)}$, $j = 1, 2, \ldots$, т. е. $\mathfrak{T}_0^{(1)} = \{M_1^{(1)}, M_2^{(1)}, \ldots\}$. Пусть бесконечная совокупность дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, образованная элементами $\mathfrak{T}_0^{(1)}: M_j^{(1)}f = 0$, $j = 1, 2, \ldots$, имеет нетривиальные решения из $\mathfrak{D}_0(G)$. Обозначим множество таких решений через $T = \{\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots\}$. Может случиться, что в множестве T найдется конечное число функций $T_r = \{\varphi_1(x), \ldots, \varphi_r(x)\}$, независимых в G, такое, что любой элемент $\varphi(x)$ из T может быть выражен через функции $T_r: \varphi(x) = b(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_r(x))$ с помощью функций из $\mathfrak{D}_0(G)$, т. е. $b(0, \ldots, 0) \equiv 0$. Если указанное множество T_r существует, то будем называть его базисным для множества решений T.

Обозначим через $\mathfrak{G}(U)$ локальную однопараметрическую группу преобразований $x' = \exp(sU)x$, действующую на множестве функций $\mathfrak{D}_0(G)$ и определенную в области $\Delta_s \times G$, $s \in \Delta_s$. Тогда множество P решений уравнения (30) образует систему неподвижных точек многообразия $\mathfrak{D}_0(G)$, так как $\rho(\exp(sU)x) \equiv \rho(x)$, $\rho(x) \in P$.

Совокупность функций T образует систему импримитивности группы $\mathfrak{G}(U)$, т. е. $\varphi(\exp(sU)x) \in T$. Этот факт легко доказывается. Из тождеств $[U, M_j^{(1)}] \equiv 0$, $j = 1, 2, \ldots$, следует, что любое решение $\varphi(x) \in T$ удовлетворяет соотношению $M_j^{(1)}U\varphi(x) \equiv 0$, т. е. функция $U\varphi(x)$ является решением системы $M_j^{(1)}f = 0$, $j = 1, 2, \ldots$, и, следовательно, принадлежит множеству T.

В случае, когда множество T имеет конечное базисное множество, для любой функции $\varphi_j(x) \in T_r$ справедливы тождества $U\varphi_j(x) \equiv \Phi_j(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_r(x))$, $j = \overline{1, r}$, где Φ_j — функция из $\mathfrak{O}_0(G)$, т. е. $\Phi_j(0, \ldots, 0) \equiv 0$.

Докажем основное утверждение о разделении переменных на быстрые и медленные в централизованной системе (15).

Теорема 4. *Пусть для однопараметрической группы $\mathfrak{G}(U)$, порожденной оператором U, ассоциированным с системой нулевого приближения, выполняются следующие условия:*

1) *в $\mathfrak{O}_0(G)$ имеется система инвариантов с базисным множеством $P_k = \{\rho_1(x), \ldots, \rho_k(x)\}$, определяемым как решения уравнения $Uf = 0$;*

2) *в $\mathfrak{O}_0(G)$ имеется система импримитивности с базисным множеством $T_r = \{\varphi_1(x), \ldots, \varphi_r(x)\}$, определяемым как решение системы уравнений $M_j^{(1)}f = 0$, $j = 1, 2, \ldots$, где $M_j^{(1)}$ — образующие некоторого идеала $\mathfrak{T}_0^{(1)} = \{M_j^{(1)}\}$, $j = 1, 2, \ldots$, входящего в определяющую алгебру $\mathfrak{T}_0$, $\mathfrak{T}_0^{(1)} \subseteq \mathfrak{T}_0$;*

3) *функции определяющих множеств P_k и T_r образуют совместную систему $k + r = n$ независимых функций в G. Тогда замена переменных*

$$y_1 = \rho_1(x), \ldots, y_k = \rho_k(x), \quad z_1 = \varphi_1(x), \ldots, z_r = \varphi_r(x), \tag{32}$$

преобразует централизованную систему $dx_j/dt = \omega_j(x) + \varepsilon N x_j$, $j = \overline{1, n}$, где $N = N_1 + \varepsilon N_2 + \ldots, N_\nu \in \mathfrak{O}_0^{(1)}(G)$, $[U, N_\nu] \equiv 0$, $\nu = 1, 2, \ldots$, к двум последовательно интегрируемым подсистемам порядков k и $n - k$ для медленных и быстрых переменных.

Система для k медленных переменных

$$dy_j/dt = \sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon^\nu \Psi_{\chi\nu}(y)\,(\Psi_{0\chi\nu}^{(j)}(y) + \Psi_{\chi\nu}^{(j)}(y)), \tag{33}$$

где $\Phi_{\chi\nu}(y)$, $\Psi_{0\chi\nu}^{(j)}$, $\Psi_{\chi\nu}^{(j)}(y) \in \mathfrak{O}_0(G)$, интегрируется независимо и содержит медленное время $\tau = \varepsilon t$.

Система для $r = n - k$ быстрых переменных

$$dz_i/dt = F_i(z) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon^\nu \sum_{\chi=1}^{m_\nu} (\Phi_{0\nu}(y)\,F_i(z) + \Psi_{\chi\nu}(y)\,\Phi_{\chi\nu}^{(i)}(z)), \tag{34}$$

где $\Phi_{0\nu}, F_i(z)$, $\Phi_{\chi\nu}(y)$, $\Phi_{\chi\nu}^{(i)}(z) \in \mathfrak{O}_0(G)$, $i = \overline{1, r}$, интегрируется после того, как мы проинтегрируем систему для медленных переменных.

Условия 1—3 являются не только достаточными, но и необходимыми для разделения переменных на быстрые и медленные в централизованной системе.

Доказательство. Достаточность. Выпишем явный вид операторов U, N_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$, после выполнения преобразований (32). Поскольку $U\rho_j(x) \equiv 0$, $U\varphi_i(x) \equiv F_i(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)$, $j = \overline{1, k}$, $i = \overline{1, r}$, то оператор U имеет вид

$$U = F_1(z)\,\partial/\partial z_1 + \ldots + F_r(z)\,\partial/\partial z_r. \tag{35}$$

Согласно структуре алгебры $\mathfrak{V}_0$ операторы N_ν, входящие в централизованную систему, представимы суммой $N_\nu = \Psi_{0\nu}(\rho)\,U + \sum_{\chi=1}^{m_\nu} \Psi_{\chi\nu}(\rho)\,(M_{\chi\nu}^{(1)} + M_{\chi\nu})$, $\nu = 1, 2, \ldots$, где $\Psi_{0\nu}(\rho)$, $\Psi_{\chi\nu}(\rho)$ — известные функции из множества P, операторы $M_{\chi\nu}^{(1)} \in \mathfrak{T}_0^{(1)}$, $M_{\chi\nu} \in \mathfrak{T}_0$.

Примем во внимание соотношения

$$M_{\chi\nu}^{(1)}\rho_j(x) \equiv \Psi_{1\chi\nu}^{(j)}(\rho) \equiv \Psi_{1\chi\nu}^{(j)}(y), \tag{36}$$
$$M_{\chi\nu}\rho_j(x) \equiv \Psi_{\chi\nu}^{(j)}(\rho) \equiv \Psi_{\chi\nu}^{(j)}(y),$$

следующие из коммутативности операторов алгебры $\mathfrak{V}_0$ с U.

Так как $\mathfrak{X}_0^{(1)}$ является идеалом $\mathfrak{X}_0$ и имеют место тождества $[\mathfrak{X}_0^{(1)}, \mathfrak{X}_0] = \mathfrak{X}_0^{(1)}$, то множество функций T_r, аннулируемых операторами $\mathfrak{X}_0^{(1)}$, переводится операторами из $\mathfrak{X}_0$ снова в себя, как это следует из тождеств $\mathfrak{X}_0^{(1)} \mathfrak{X}_0 \varphi(x) \equiv \mathfrak{X}_0 \mathfrak{X}_0^{(1)} \varphi(x) \equiv 0$, $\varphi(x) \in T_r$. Следовательно, выполняются соотношения

$$M_{\chi\nu}^{(1)} \varphi_i(x) \equiv 0, \; i = \overline{1, r},$$
$$M_{\chi\nu} \varphi_i(x) \equiv \Phi_{\chi\nu}^{(i)}(\varphi_1, \ldots, \varphi_r) \equiv \Phi_{\chi\nu}^{(i)}(z), \quad \varphi_i(x) \in T_r. \tag{37}$$

Использовав формулы (36), (37), представим оператор N_ν в новых переменных:

$$N_\nu = \sum_{i=1}^{r} \Psi_{0\nu}(y) F_i(z) \partial/\partial z_i + \sum_{j=1}^{k} \Big(\sum_{\chi=1}^{m_\nu} \Psi_{\chi\nu}(y) (\Psi_{1\chi\nu}^{(j)}(y) + \Psi_{\chi\nu}^{(j)}(y)\Big) \partial/\partial y_j +$$
$$+ \sum_{i=1}^{r} \Big(\sum_{\chi=1}^{m_\nu} \Psi_{\chi\nu}(y) \Phi_{\chi\nu}^{(i)}(z) \Big) \partial/\partial z_i. \tag{38}$$

Восстановив по операторам (35), (38) систему централизатора, придем к системе (33) для медленных и системе (34) для быстрых переменных.

Необходимость. Пусть в централизованной системе переменные разделены и она записана в виде систем (28) и (29). Тогда, как следует из структуры этой системы, оператор $U = F_1(z) \partial/\partial z_1 + \ldots + F_r(z) \partial/\partial z_r$ и множество функций P состоит из всех функций $F(y) \in \mathfrak{D}_0(G)$. Поскольку эти функции обращаются в нуль при $y_1 = \ldots = y_k = 0$, $k = n - r$, то в качестве базисного множества P_k можно выбрать функции $y_1, \ldots, y_k$. Подалгебра $\mathfrak{X}_0$ порождается операторами

$$Y_\nu = \sum_{j=1}^{k} \Phi_{\nu j}(y) \partial/\partial y_j, \quad \nu = 1, 2, \ldots, \tag{39}$$

и $Z_{\nu\chi} = \sum_{i=1}^{r} \xi_{\nu\chi}^{(i)}(z) \partial/\partial z_i$, $\chi = \overline{1, m_\nu}$, $\nu = 1, 2, \ldots$. Как легко видеть, операторы Y_ν (39) порождают идеал $\mathfrak{X}_0^{(1)}$ в алгебре $\mathfrak{X}_0$.

Решениями системы уравнений $Y_\nu f = 0$, $\nu = 1, 2, \ldots$, являются функции $f(z_1, \ldots, z_r) \in \mathfrak{D}_0(G)$, а базисным множеством этой системы — функции $z_1, \ldots, z_r$. По предположению централизованная система (28), (29) не может быть сведена к меньшему чем n числу переменных и, следовательно, система функций $y_1, \ldots, y_k$, $z_1, \ldots, z_r$, $k + r = n$, образует независимую систему функций в G.

1. *Лопатин А. К.* Асимптотическое расщепление систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений высокой размерности // Кибернетика и вычисл. техника.— 1978.— Вып. 39.— С. 39—45.
2. *Mitropolsky Yu. A.* Sur la decompositions asymptotique des systems differentieles fondee des Transformations de Lie // Nonlinear differential equations, invariance, stability and bifurcations / Ed. by P. Mottoni de, L. Salvadori : Trento Acad. press, 1981.— P. 283—326.
3. *Митропольский Ю. А.* Развитие метода усреднения // IX Междунар. конф. по нелинейн. колебаниям: Аналит. методы теории нелинейн. колебаний .— Киев : Наук. думка, 1984.— Т. 1.— С. 23—34.
4. *Митропольский Ю. А., Лопатин А. К.* Асимптотическая декомпозиция систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Укр. мат. журн. — 1984. — **36**, № 1.— с. 35—44.
5. *Лопатин А. К.* Асимптотическая декомпозиция систем дифференциальных уравнений высокой размерности и ее приложения // IX Междунар. конф. по нелинейн. колебаниям: Аналит. методы теории нелинейн. колебаний.— Киев : Наук. думка, 1984.— Т. 1.— С. 235—242.
6. *Лопатин А. К.* Теоретико-групповые критерии декомпозиции систем обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром на быстрые и медленные перемен-

ные // Тез. докл. II Всесоюзн. конф. «Лаврентьевские чтения по математике, механике, физике».— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1985.— С. 145—147.
7. *Митропольский Ю. А., Лопатин А. К.* Теоретико-групповые аспекты асимптотических методов нелинейной механики // Мат. физика и нелинейн. механика.— 1986.— № 5.— С. 34—45.
8. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.— М. : Наука, 1974.— 502 с.
9. *Hori G.* Theory of general perturbations with unspecified canonical variables // J. Jap. Astron. Soc.— 1966.— 18, N 4.— P. 287—296.
10. *Hori G.* Lie transformations in nonhamiltonian systems // Lect. Notes, Summer Institute in Orbital Mechanics, The Univ. of Texas at Austin, May, 1970.— P. 7—9.
11. *Kamel A.* A perturbations methods in the theory of nonlinear Oscillations // Celest. Mech.— 1970.— 3, N.1.— P. 90—106.
12. *Найфэ А. Х.* Методы возмущений.— М. : Мир, 1976.— 456 с.
13. *Povzner A.* Linear methods in problems of nonlinear differential equations with a small parameter // Int. J. Non-Linear Mech.— 9, N 4.— P. 279—323.
14. *Campbell J. E.* Introductory treatise on Lie's theory of finite Continuous transformations of groups.— Oxford : Clarendon press, 1903.— 412 p.
15. *Богаевский В. Н., Повзнер А. Я.* Линейные методы в нелинейной теории возмущений дифференциальных уравнений // IX междунар. конф. по нелинейн. колебаниям: Аналит. методы теории нелинейн. колебаний.— Киев : Наук. думка, 1984.— Т. 1.— С. 90—93.
16. *Bogaevsky V. N., Povzner A. Ya.* Linear methods in nonlinear problems with a small parameter // Lect. Notes Math., Asymp. Anal. 1-serveys and new trends.— 1983.— N 985.— P. 441—448.
17. *Митропольский Ю. А., Лопатин А. К.* Векторные поля, алгебры и группы, порождаемые системой обыкновенных дифференциальных уравнений, и их свойства.— Киев, 1985. 63 с.— (Препринт/АН УССР. Ин-т математики АН УССР; 85.73).
18. *Митропольский Ю. А., Лопатин А. К.* Декомпозиция систем обыкновенных дифференциальных уравнений.— Киев, 1985.— 64 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики АН УССР; 85.74).

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 01.08.86