УДК 517.9

Ю. В. Роговченко, С. И. Трофимчук

Ограниченные и периодические решения слабо нелинейных импульсных эволюционных систем

В настоящей статье изучаются эволюционные системы с импульсным воздействием. Анализу понятия импульсной системы и установлению некоторых ее свойств посвящены работы [1—5]. Проведенные нами исследования непосредственно примыкают к [4, 5], причем в отличие от указанных работ мы рассмотрим эволюционные системы, описываемые абстрактными параболическими уравнениями.

Следуя [3], дадим краткую характеристику изучаемого объекта. Пусть $t \in R = (-\infty, +\infty)$, $x \in \Omega$, Ω — некоторая область в банаховом пространстве X. Будем считать, что процесс эволюции рассматриваемой системы описывается:

а) дифференциальным уравнением

$$dx/dt = F(t, x), \tag{1}$$

имеющим решения;

б) подмножеством $M_t \subset \Omega \times R$;

в) оператором A_t с областью определения $D(A_t) = M_t$ и областью значений $R(A_t) = M_t^*$, $M_t^* \subset \Omega \times R$.

Определение 1. *Тройку* $\iota = (dx/dt = F(t, x), M_t, A_t)$ *будем называть импульсной эволюционной системой.*

Предположим, что в X имеется такое плотное подмножество Y, что задача Коши $x(\tau) = y$, $y \in Y$, $\tau \in R$, для уравнения (1) имеет единственное решение, определенное на максимальном интервале существования Σ. Процесс, описываемый импульсной эволюционной системой ι, происходит следующим образом. Если $\Sigma \cap (\Omega \setminus M_t) = \varnothing$, т. е. $\Sigma = [\tau, +\infty)$, то процесс не подвергается импульсному воздействию. Если же существует такое $t_1 \in R$, $t_1 > \tau$, что $x(t) \in \Omega \setminus M_t$, $t \in [\tau, t_1)$ и $x(t_1) \in M_t$, то состояние процесса $x(t)$ в момент времени t_1 мгновенно изменяется и процесс переходит в состояние $A_t x(t_1)$. Теперь можно рассмотреть задачу Коши $dx^{(1)}/dt = F(t, x^{(1)})$, $x^{(1)}(t_1) = A_t x(t_1)$ и т. д. В итоге решение задачи Коши $x(\tau) = y$ для эволюционной системы ι определяется как «склейка» решений описанных выше подчиненных задач Коши на временных интервалах между моментами импульсного воздействия. Нам представляется удобным предполагать, что в моменты импульсного воздействия решение $x(t)$ непрерывно справа, а не слева, как предполагается в [2—5].

1. Линейные системы с импульсным воздействием. Пусть X — банахово пространство с нормой $|*|$, N и Z — соответственно множества натуральных и целых чисел. Пусть A — секториальный оператор (см. [6]), $A: X^1 \to X$ и $\operatorname{Re}\sigma(A) > \gamma > 0$. Тогда определены дробные степени оператора A и для $\alpha \geqslant 0$ определены пространства $X^\alpha = D(A^\alpha)$ с нормой $|x|_\alpha = |x| + |A^\alpha x|$. Предположим, что функция $f: R \to X$ локально-гельдерова. Рассмотрим линейное неоднородное уравнение в банаховом пространстве X:

$$dx/dt + Ax = f(t). \tag{2}$$

Пусть последовательность элементов $\{t_i\}$, $t_i \in R$, $i \in \Gamma$ Γ — индексное множество) не имеет конечных предельных точек. Если последовательность $\{t_i\}$ ограничена, то полагаем $\Gamma = \{1, 2, \ldots, n\}$ и $t_0 = -\infty$, $t_{n+1} = \infty$; если последовательность $\{t_i\}$ ограничена сверху (снизу), то полагаем $\Gamma = N$ и $t_0 = -\infty$ $(t_0 = +\infty)$; если последовательность $\{t_i\}$ неограничена, то полагаем $\Gamma = Z$. Кроме того, будем считать, что при $i < j$ $t_i < t_j$.

Пусть $B_i \in \mathscr{L}(X^1, X^\alpha)$, $i \in \Gamma$ — последовательность линейных непрерывных операторов, b_i — последовательность элементов из X^α. Рассмотрим разностное уравнение

$$\Delta x|_{t=t_i} = x(t_i) - x(t_i - 0) = B_i x(t_i - 0) + b_i. \tag{3}$$

Определение 2. *Под линейной импульсной эволюционной системой будем понимать тройку λ, состоящую из дифференциального уравнения* (2), *последовательности $\{t_i\}$, $i \in \Gamma$, и разностного уравнения* (3).

Определение 3. *Решением задачи Коши*

$$x(\tau) = y, \quad y \in Y \subset X, \quad \tau \in [t_k, t_{k+1}), \tag{4}$$

на интервале $[\tau, \sigma)$ (σ может быть равным $+\infty$) для импульсной эволюционной системы λ называется функция $x(t)$, x: $[\tau, \sigma) \to X$, непрерывная на каждом из интервалов $[\tau, t_{k+1}), [t_{k+1}, t_{k+2}), \ldots, [t_s, \sigma)$ с разрывами первого рода при $t = t_i$, $i \in \Gamma$, дифференцируемая на каждом из открытых интервалов (τ, t_{k+1}), $(t_{k+1}, t_{k+2}), \ldots, (t_s, \sigma)$ и удовлетворяющая при $\tau < t \leqslant \sigma$, $t \neq t_i$, дифференциальному уравнению (2), *при $t = t_i$, $i \in \Gamma$, — разностному уравнению* (3), *причем $x(t) \to x_0$ в X при $t \to \tau + 0$.*

Определение 4. *Будем называть импульсную эволюционную систему λ T-периодической ($T > 0$), если можно указать такое натуральное число p, что для всех $t \in R$ и $i \in \Gamma$ справедливы соотношения*

$$t_{i+p} = t_i + T, \quad f(t + T) = f(t), \quad B_{i+p} = B_i, \quad b_{i+p} = b_i. \tag{5}$$

Лемма. *Для любого $\tau \in R$ и любого $y \in X$ решение задачи Коши* (4) *для эволюционной системы λ на интервале $[\tau, +\infty)$ существует и единственно.*

Доказательство. Пусть $\tau \in [t_k, t_{k+1})$, $t \in [t_i, t_{i+1})$. Определим операторнозначную функцию Коши $K(t, \tau)$, $K: R \times R \to \mathscr{L}(X, X^\alpha)$ следующим образом:

$$K(t, \tau) = \begin{cases} \exp(-A(t - \tau)), & t \geqslant \tau, \quad i = k, \\ \exp(-A(t - t_i)) \cdot (B_i + E) \exp(-A(t_i - t_{i-1})) \ldots \exp(-A(t_{k+1} - \tau)), & i > k. \end{cases}$$

Определим теперь функцию $x(t)$ соотношением

$$x(t) = K(t, \tau) y + \int_\tau^t K(t, s) f(s)\, ds + \sum_{t_k < t_j < t} K(t, t_j) b_j, \quad t \geqslant \tau. \tag{6}$$

Пользуясь теоремой 3.2.2 из [6], можно показать, что она будет решением задачи Коши (4) для импульсной эволюционной системы λ.

О п р е д е л е н и е 5. *Пусть* $0 \leqslant \beta \leqslant \alpha < 1$, $t \in [t_k, t_{k+1})$. *Определим операторнозначную функцию* $G_{\alpha,\beta}(t, \tau)$, $G: R \times R \to \mathcal{L}(X, X^\alpha)$ *соотношением*

$$G_{\alpha,\beta}(t,\tau) = \begin{cases} 0, & t < \tau, \\ K(t,\tau), & t \geqslant \tau. \end{cases} \tag{7}$$

Если сумма $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |A^\beta G(t,\tau)|\, d\tau + \sum\limits_{i<k} |A^\beta G(t, t_i)|$ *равномерно по* t *ограничена некоторой вещественной постоянной* $K(G) > 0$, *то функцию* (7) *будем называть функцией Грина импульсной эволюционной системы* λ.

Из определения следует, что при произвольном фиксированном $\tau \in R$ функция Грина непрерывна на R за исключением множества точек $\{\tau\} \cup \cup \{t_i \mid t_i > \tau,\ i \in \Gamma\}$, в которых она имеет разрывы первого рода и является непрерывной справа: при $\tau \neq t_i$

$$\begin{gathered} G(\tau,\tau) - G(\tau - 0, \tau) = G(\tau + 0, \tau) - G(\tau - 0, \tau) = E, \\ G(t_i, \tau) - G(t_i - 0, \tau) = G(t_i + 0, \tau) - G(t_i - 0, \tau) = B_i G(t_i - 0, \tau). \end{gathered} \tag{8}$$

Кроме того, при $t \bar{\in} \{\tau\} \cup \{t_i \mid t_i > \tau,\ i \in \Gamma\}$ функция $G(t, \tau)$ имеет производную по t и $dG(t,\tau)/dt + AG(t,\tau) = 0$.

Т е о р е м а 1. *Пусть эволюционная система* λ *имеет функцию Грина* $G_{\alpha,\beta}(t,\tau)$. *Тогда существует единственное ограниченное на всей оси решение* $x^*(t)$ *задачи* (2), (3) *и* $|x^*(t)|_\beta \leqslant (K(G) + 1) \max \{\sup\limits_{i \in \Gamma} |b_i|_\beta, \sup\limits_{t \in R} |f(t)|\}$. *Если система* λ — T-*периодическая, то решение* $x^*(t)$ *будет периодическим с тем же периодом.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Определим функцию $x^*(t)$ соотношением

$$x^*(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t,\tau) f(\tau)\, d\tau + \sum_{i \in \Gamma} G(t, t_i)\, b_i \tag{9}$$

и покажем, что она является искомым решением. По определению 5 имеем

$$\begin{gathered} |x^*(t)|_\beta \leqslant \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |A^\beta G(t,\tau)|\,|f(\tau)|\, d\tau + |\exp(-A(t - t_k))\, A^\beta b_k| + \\ + \sum_{i<k} |A^\beta G(t, t_i)|\,|b_i|_\beta \leqslant (K(G) + 1) \max \{\sup_{i \in \Gamma} |b_i|_\beta, \sup_{t \in R} |f(t)|\}. \end{gathered}$$

Согласно [6], функция $x^*(t)$ при $t \in (t_i, t_{i+1})$, $i \in \Gamma$, удовлетворяет дифференциальному уравнению (2), а, используя соотношения (8), можно показать справедливость (3). Пусть теперь $y^*(t)$ — отличное от $x^*(t)$ ограниченное решение задачи (2), (3). Очевидно, что функция $x^*(t) - y^*(t)$ будет ограниченным решением однородной импульсной системы $dz/dt + Az = 0$, $\Delta z|_{t=t_i} = B_i z$, которая при наших предположениях имеет только тривиальное решение. Тем самым установлена единственность ограниченного в X^β решения задачи (2), (3), хотя нами и не предполагается взаимная однозначность операторов B_i.

2. С л а б о н е л и н е й н ы е с и с т е м ы с и м п у л ь с н ы м в о з д е й с т в и е м.

О п р е д е л е н и е 6. *Под нелинейной импульсной эволюционной системой будем понимать тройку* ν, *состоящую из дифференциального уравнения*

$$dx/dt + Ax = f(t, x, \varepsilon), \tag{10}$$

последовательности $\{t_i\}$ *и разностного уравнения*

$$\Delta x|_{t=t_i} = B_i x + g_i(x, \varepsilon), \tag{11}$$

где $t \in R$, $x \in U = \{x \in X^{\alpha}; |x|_{\alpha} \leqslant \rho\}$, $\varepsilon \in \Lambda = (0, \varepsilon_0]$. *Если для некоторого* $T > 0$ *можно указать такое натуральное число* p, *что для всех* $t \in R$, $\varepsilon \in \Lambda$ *и* $i \in \Gamma$

$$t_{i+p} = t_i + T, \quad f(t+T, x, \varepsilon) = f(t, x, \varepsilon), \quad B_{i+p} = B_i, \quad g_{i+p}(x, \varepsilon) = g_i(x, \varepsilon),$$

то эволюционная система ν *называется* T*-периодической.*

Определение 7. *Под решением задачи Коши* $x(\tau) = y$ *для эволюционной системы* ν *на интервале* $[\tau, \sigma)$ *будем понимать функцию* $x(t, \varepsilon)$, $x: [\tau, \sigma) \times \Lambda \to X$, *непрерывную на интервалах* $[\tau, t_{k+1}), [t_{k+1}, t_{k+2}), \ldots, [t_s, \sigma)$ *с разрывами первого рода при* $t = t_i$, $i \in \Gamma$ *и для* $t \in (\tau, \sigma) \setminus \{t_i \mid \tau < t_i < \sigma\}$ *имеем* $(t, x(t, \varepsilon), \varepsilon) \in R \times U \times \Lambda$, $x(t, \varepsilon) \in D(A)$ *для любого* $\varepsilon \in \Lambda$, *существует производная* $dx(t)/dt$, *отображение* $t \to f(t, x(t, \varepsilon), \varepsilon)$ *локально-гельдерово для любого* $\varepsilon \in \Lambda$ *и при* $t \to \tau + 0$ $\int\limits_{\tau}^{t} (t-s)^{-\alpha} |f(s, x(s, \varepsilon), \varepsilon)| \, ds \to 0$. *Кроме того, при* $t \neq t_i$ *функция* $x(t, \varepsilon)$ *удовлетворяет* (10), *а при* $t = t_i$ — (11).

Пусть функции $f(t, x, \varepsilon)$ и $g_i(x, \varepsilon)$, $i \in \Gamma$, удовлетворяют следующим условиям:

1) $f: R \times U \times \Lambda \to X$ и $g_i: X \times \Lambda \to X^{\alpha}$, $i \in \Gamma$, непрерывны по всем своим переменным в соответствующих областях;

2) для любых t, s из R и некоторых $H(\varepsilon) > 0$, $\theta > 0$,

$$|f(t, x, \varepsilon) - f(s, x, \varepsilon)| \leqslant H(\varepsilon) |t - s|^{\theta}; \tag{12}$$

3) для любых x, y из U равномерно по $t \in R$, $\varepsilon \in \Lambda$ и $i \in \Gamma$

$$|f(t, x, \varepsilon) - f(t, y, \varepsilon)| + |g_i(x, \varepsilon) - g_i(y, \varepsilon)|_{\alpha} \leqslant \mathcal{N}(\rho, \varepsilon_0) |x - y|_{\alpha}, \tag{13}$$

где $\mathcal{N}(\rho, \varepsilon_0)$ — неотрицательная неубывающая функция переменных ρ и ε_0 такая, что при $\rho, \varepsilon_0 \to 0$, $\mathcal{N}(\rho, \varepsilon_0) \to 0$;

4) равномерно по $t \in R$, $\varepsilon \in \Lambda$ и $i \in \Gamma$ выполняется неравенство

$$|f(t, 0, \varepsilon)| + |g_i(0, \varepsilon)|_{\alpha} \leqslant \mathcal{M}(\varepsilon), \tag{14}$$

где $\mathcal{M}(\varepsilon)$ — положительная при $\varepsilon > 0$ неубывающая функция такая, что при $\varepsilon \to 0$, $\mathcal{M}(\varepsilon) \to 0$.

Теорема 2. *Пусть выполнены предположения* 1—4 *и для линейной импульсной эволюционной системы* λ *существует функция Грина* $G_{\alpha,\alpha}(t, \tau)$. *Тогда существует единственное ограниченное на всей оси решение задачи* (10), (11). *Если эволюционная система* ν T*-периодическая, то и решение* $x^*(t, \varepsilon)$ *будет периодическим по* t *с тем же периодом.*

Доказательство. Ограниченное решение будем искать методом последовательных приближений, взяв в качестве нулевого приближения $x_0(t, \varepsilon) \equiv 0$ и построив последовательность функций $x_m(t, \varepsilon)$, $m \geqslant 1$, каждая из которых является ограниченным на всей оси решением системы уравнений

$$dx_m/dt + Ax_m = f(t, x_{m-1}(t, \varepsilon), \varepsilon), \tag{15}$$

$$\Delta x |_{t=t_i} = B_i x + g_i(x_{m-1}(t_i - 0, \varepsilon), \varepsilon). \tag{16}$$

Заметим, что при наших предположениях функции $f(t, x_{m-1}(t, \varepsilon), \varepsilon)$ для любого натурального m локально-гельдеровы по t, а $g_i(x_{m-1}(t_i - 0, \varepsilon), \varepsilon) \in X^{\alpha}$ для любого $\varepsilon \in \Lambda$. Поэтому можно воспользоваться теоремой 1, согласно которой для любого натурального m существует единственное ограниченное (в X^{α}) на всей оси решение $x_m(t, \varepsilon)$ задачи (15), (16), и это решение задается формулой

$$x_m(t, \varepsilon) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t, \tau) f(\tau, x_{m-1}(\tau, \varepsilon), \varepsilon) \, d\tau + \sum_{i \in \Gamma} G(t, t_i) g_i(x_{m-1}(t_i - 0, \varepsilon), \varepsilon). \tag{17}$$

С помощью метода математической индукции можно показать справедливость для достаточно малых значений $\varepsilon \in \Lambda$ следующих неравенств:

$$\| x_m(t, \varepsilon) \| \leqslant \{K(G) + 1\} \mathscr{M}(\varepsilon) (1 - (K(G) + 1) \mathscr{N}(\rho, \varepsilon_0))^{-1}, \qquad (18)$$

$$\| x_{m+1}(t, \varepsilon) - x_m(t, \varepsilon) \| \leqslant (K(G) + 1) \mathscr{M}(\varepsilon) \{(K(G) + 1) \mathscr{N}(\rho, \varepsilon_0)\}^m, \qquad (19)$$

где $\| u(t) \| = \sup_{t \in R} | u(t) |_\alpha$.

Выберем $\varepsilon^0 \leqslant \varepsilon_0$ и $\rho^0 \leqslant \rho$ такими малыми, чтобы

$$(K(G) + 1) \mathscr{M}(\varepsilon^0) (1 - (K(G) + 1) \mathscr{N}(\rho^0, \varepsilon^0))^{-1} \leqslant \rho^0,$$
$$(K(G) + 1) \mathscr{N}(\rho^0, \varepsilon^0) < 0{,}5 \qquad (20)$$

(этого всегда можно добиться, используя свойства функций $\mathscr{N}(\rho, \varepsilon_0)$ и $\mathscr{M}(\varepsilon)$). Тогда неравенства (20) обеспечат продолжимость итерационного процесса, а неравенство (19) —сходимость итерационного процесса, а именно, $x_m(t, \varepsilon) \to x^*(t, \varepsilon)$ в X^α равномерно по $t \in R$ и $\varepsilon \in \Lambda$. При этом предельная функция $x^*(t, \varepsilon)$ будет удовлетворять оценке $\| x^*(t, \varepsilon) \| \leqslant (K(G) + 1) \mathscr{M}_0(\varepsilon)$, где $\mathscr{M}_0(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ и интегральному уравнению

$$x^*(t, \varepsilon) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t, \tau) f(\tau, x^*(\tau, \varepsilon), \varepsilon) \, d\tau + \sum_{i \in \Gamma} G(t, t_i) g_i(x^*(t_i - 0, \varepsilon), \varepsilon).$$

Используя лемму 3.3.2 из [6], можно показать, что при $t_i < t < t_{i+1}$ предельная функция $x^*(t, \varepsilon)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $dx^*/dt + Ax^* = f(t, x^*, \varepsilon)$, а при $t = t_i$ — разностному уравнению $\Delta x^* |_{t=t_i} = B_i x^* + g_i(x^*(t_i - 0, \varepsilon), \varepsilon)$. Единственность решения $x^*(t, \varepsilon)$ следует из единственности ограниченного решения задачи (15), (16) при каждом натуральном m. Можно показать, что если импульсная эволюционная система T-периодическая, то предельная функция $x^*(t, \varepsilon)$ также будет периодической по t с периодом T.

1. *Митропольский Ю. А.* Метод усреднения в нелинейной механике.— Киев : Наук. думка, 1971.— 440 с.
2. *Митропольский Ю. А., Перестюк Н. А., Черникова О. С.* Конвергентность систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1983.— № 11.— С. 11—14.
3. *Самойленко А. М.* Метод усреднения в системах с толчками // Мат. физика.— 1971.— Вып. 9.— С. 101—117.
4. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Периодические решения слабо нелинейных систем с импульсным воздействием // Дифференц. уравнения.— 1978.— 14, № 6.— С.1034—1045.
5. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием.— Киев : Изд-во Киев. ун-та, 1980.— 79 с.
6. *Хенри Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений.— М. Мир, 1985.— 376 с.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 03.06.86