Развитие методов нелинейной механики в работах Ю. А. Митропольского

В начале 30-х годов в связи с запросами физики и техники возникла необходимость в создании математически обоснованной теории, пригодной для изучения как периодических, так и непериодических процессов, происходящих в нелинейных колебательных системах. К такой теории предъявлялись требования удовлетворять запросы практики, обладать простотой и наглядностью расчетных схем и иметь строгое математическое обоснование.

Эта задача была решена Н. М. Крыловым и Н. Н. Боголюбовым в ряде их работ, среди которых особое место занимает монография «Введение в нелинейную механику» (1937 г.). Они разработали новый подход к изучению нелинейных колебаний, основанный на построении асимптотических разложений.

В последующие годы Н. М. Крылов, Н. Н. Боголюбов и Ю. А. Митропольский создали целую область математической физики, основное внимание в которой уделено методам анализа колебательных систем. Их исследования вошли в монографию Н. Н. Боголюбова и Ю. А. Митропольского «Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний» (1955 г.), а также в ряд других монографий Ю. А. Митропольского. В настоящее время трудно представить какую-либо существенную проблему нелинейной механики, важный вклад в которую не внес бы Ю. А. Митропольский. Они касаются развития асимптотических методов нелинейной механики для исследования систем с медленно меняющимися параметрами, развития одночастотного метода, метода усреднения, метода интегральных многообразий, метода ускоренной сходимости, метода декомпозиции, многочастотного метода и др.

Охарактеризуем важнейшие направления исследований Ю. А. Митропольского.

Р а з в и т и е   а с и м п т о т и ч е с к и х   м е т о д о в. В работах Ю. А. Митропольского существенное развитие получили асимптотические методы для исследования систем с медленно меняющимися параметрами, которые описывают нестационарные колебательные процессы. Необходимость исследования нестационарных процессов в нелинейных колебательных системах вызвана бурным развитием техники. Нестационарность колебательного процесса по своей природе обусловлена наличием в системе медленно эволюционирующих параметров (частот, масс и др.). В результате возникают сложные колебательные явления, необходимость изучения которых связана с учетом прохождения системы через резонанс, а также через различные демультипликационные резонансы.

До Ю. А. Митропольского никто из исследователей не занимался созданием методов анализа таких систем и происходящих в них колебательных явлений.

Нестационарные колебательные системы с одной степенью свободы описываются обычно уравнением вида

$$\frac{d}{dt}\left[m(\tau)\frac{dx}{dt}\right]+c(\tau)x=\varepsilon F\left(\tau,\theta,x,\frac{dx}{dt}\right),\quad \frac{d\theta}{dt}=\nu(\tau), \tag{1}$$

параметры которого $m(\tau)$, $c(\tau)$ и $\nu(\tau)$ содержат независимую переменную t в комбинации с малым параметром ε ($\tau=\varepsilon t$). Ю. А. Митропольский разработал схему асимптотических разложений и построил приближенные решения этого уравнения.

По полученным формулам Ю. А. Митропольский провел качественный анализ сложных явлений, возникающих в рассматриваемых системах. Эти результаты в силу эффективности расчетных схем нашли применение при решении многих прикладных задач. Так, было исчерпывающе изучено явление прохождения через резонанс. До работ Ю. А. Митропольского расчет колебаний при прохождении через резонанс можно было довести до числа и графика лишь в случае линейной системы с одной степенью свободы. Однако для многих задач современной техники очень важно уметь рассчитать колебательную систему с одной или со многими степенями свободы с учетом нелинейности, изменения в процессе колебания ряда параметров и с учетом возможного прохождения через резонанс. Выполнение этих расчетов стало возможным с помощью метода, разработанного Ю. А. Митропольским. При этом на многих примерах он изучил сложные явления, которые наблюдаются в нелинейных системах, при прохождении через резонанс (например, явление затягивания амплитуды, срывы и скачки амплитуды, биения и т. д.). Так, одна из первых его работ «О прохождении через резонанс в нелинейной колебательной системе со многими степенями свободы» (1952 г.) дала возможность рассчитать резонансную и шумовую раскачку синхронных колебаний при проектировании сооружения синхрофазотрона на 10 БэВ, запущенного в 1957 г. в Объединенном институте ядерных исследований. С помощью метода Ю. А. Митропольского были выполнены расчеты колебаний при прохождении через резонанс в роторах турбомашин, центрифугах и т. д.

Эта часть разработок Ю. А. Митропольского асимптотических методов органически вошла в асимптотические методы нелинейной механики Н. М. Крылова — Н. Н. Боголюбова, получившие всеобщее признание как асимптотические методы Крылова — Боголюбова —Митропольского.

Важные результаты Ю. А. Митропольский получил в области развития асимптотических методов нелинейной механики применительно к исследованию колебательных явлений в системах с распределенными параметрами. На эффективность такого распространения асимптотического метода впервые обратили внимание Н. М. Крылов и Н. Н. Боголюбов при решении задачи о колебании валов и стержневых систем. Ю. А. Митропольский вместе со своими учениками создал метод, учитывающий специфику распределенных систем и позволяющий строить асимптотические приближения для систем с распределенными параметрами при наличии нелинейностей, медленно меняющихся параметров, случайных возмущений, запаздывания, нелинейностей в краевых условиях.

Основные результаты, полученные Ю. А. Митропольским в этом направлении, вошли в ряд монографий (совместно с Б. И. Мосеенковым): «Дослідження коливань в системах з розподіленими параметрами» (Асимптотичні методи) (1961 г.), «Лекции по применению асимптотических методов к решению уравнений в частных производных» (1968 г.) «Асимптотическое исследование уравнений в частных производных» (1976 г.).

Большой вклад в развитие асимптотических методов нелинейной механики внесен работами Ю. А. Митропольского, посвященными исследованию влияния на колебания в нелинейных системах случайных возмущений. Соответствующие явления описываются стохастическими дифференциальными уравнениями, решениями которых являются диффузионные марковские процессы. Используя асимптотические методы и методы теории марковских процессов, Ю. А. Митропольский совместно с В. Г. Коломийцем исследовал влияние «белого шума» на автономные и неавтономные квазилинейные колебательные системы, описывающиеся различными классами дифференциальных уравнений.

Одной из актуальных задач теории колебаний является задача исследования колебательных процессов в системах с последействием, описываемых дифференциальными уравнениями с отклоняющимся аргументом. К исследованию этой проблемы приводят многие физические и технические задачи, в которых сила, действующая на материальную точку, зависит от скорости и положения этой точки не только в некоторый фиксированный момент времени, но и в момент времени, предшествующий данному.

Ю. А. Митропольский совместно с В. И. Фодчуком, Д. Г. Кореневским и Д. И. Мартынюком разработал асимптотические методы для исследования нелинейных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, при этом были рассмотрены случаи как постоянных, так и медленно меняющихся коэффициентов, входящих в уравнения. Были также подробно исследованы явления резонанса, возникающего в рассматриваемых системах. Результаты Ю. А. Митропольского по данному разделу исследований изложены в монографии «Периодические и квазипериодические колебания систем с запаздыванием» (1979 г., совместно с Д. И. Мартынюком) и монографии «Системы эволюционных уравнений с периодическими и условно периодическими коэффициентами» (1984 г., совместно с А. М. Самойленко и Д. И. Мартынюком).

Развитие одночастотного метода. Естественным развитием асимптотических методов исследования колебательных систем с одной степенью свободы явился одночастотный метод, пригодный для исследования нестационарных колебательных систем со многими степенями свободы. Известно, что обычные методы нелинейной механики для своего приложения к системам со многими степенями свободы требуют предварительного решения совокупности дифференциальных уравнений с числом неизвестных, пропорциональным числу степеней свободы, что значительно затрудняет их практическое применение. Поскольку колебательные системы со многими степенями свободы, а также с бесконечным их числом постоянно встречаются во многих актуальных проблемах современной физики и техники, устранение указанных затруднений представляет большой практический интерес. Наличие в колебательной системе со многими степенями свободы различного вида трения, а также внешних возмущающих сил обусловливает обычно исчезновение высших частот, т. е. происходит установление основного тона колебаний. Поэтому при исследовании таких систем удобно рассматривать одночастотный режим, т. е. такие колебания, при которых все точки системы совершают колебания с одной и той же частотой. В 1948 г. Н. Н. Боголюбов предложил для автономной системы со многими степенями свободы схему построения частного решения уравнений, описывающих одночастотные колебания. Предложенный Н. Н. Боголюбовым метод основан на идее усреднения и позволяет строить асимптотические разложения решений системы со многими степенями свободы аналогично разложению решений колебательной системы с одной степенью свободы.

Исходя из этой идеи, Ю. А. Митропольский для нестационарной системы уравнений

$$\frac{d}{dt}\left\{\sum_{r,s=1}^{N} a_{rs}(\tau)\,\frac{dq_r}{dt}\right\} + \sum_{r,s=1}^{N} c_{rs}(\tau)\,q_r = \varepsilon Q_s(\tau, \theta, q_1, \ldots, q_N; \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_N), \qquad (2)$$

где $\tau = \varepsilon t$ — медленное время, разработал метод построения приближенных асимптотических решений в виде ряда

$$q_s = \varphi_s^{(1)}(\tau)\, a\cos(\theta + \vartheta) + \varepsilon u_s^{(1)}(\tau, a, \theta, \theta + \vartheta) + \varepsilon^2 u_s^{(2)}(\tau, a, \theta, \theta + \vartheta) + \ldots, \quad (3)$$

где $u_s^{(1)}(\tau, a, \theta, \theta + \vartheta)$, $u_s^{(2)}(\tau, a, \theta, \theta + \vartheta)$, ... — периодические функции $\theta, \theta + \vartheta$ с периодом 2π, а величины a и ϑ определяются из системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} da/dt &= \varepsilon A_1(\tau, a, \vartheta) + \varepsilon^2 A_2(\tau, a, \vartheta) + \ldots, \\ d\vartheta/dt &= \omega_1(\tau) - \frac{p}{q}\nu(\tau) + \varepsilon B_1(\tau, a, \vartheta) + \varepsilon^2 B_2(\tau, a, \vartheta) + \ldots, \end{aligned} \qquad (4)$$

где $\varphi_s^1(\tau)$ — нетривиальные решения системы алгебраических уравнений

$$\sum_{s=1}^{N}\{-a_{rs}(\tau)\,\omega_k^2(\tau) + c_{rs}(\tau)\}\,\varphi_s^{(k)}(\tau) = 0, \quad r, k = 1, \ldots, N, \qquad (5)$$

при этом частоты $\omega_k(\tau)$ определяются частотным уравнением.

Для облегчения применения указанного метода в инженерной практике Ю. А. Митропольский разработал различные простые способы построения непосредственно системы уравнений (4) — метод типа известного метода «линеаризации», метод типа метода «гармонического баланса» и др. В частности, перспективным достижением стал предложенный Ю. А. Митропольским метод энергетической интерпретации, согласно которому, рассматривая виртуальную работу, совершаемую возмущающими силами на виртуальных перемещениях, соответствующих вариациям амплитуды и фазы «нормального колебания», можно составить уравнения (4) (в первом и втором приближениях), исходя из выражений для этой виртуальной работы, а также кинетической и потенциальной энергии. Таким образом, можно сразу составить уравнения (4), не рассматривая точных уравнений движения типа (2).

Разработанный Ю. А. Митропольским метод энергетической интерпретации дал возможность распространить одночастотный метод на системы с распределенными параметрами, что позволило рассмотреть ряд практически важных задач (нестационарные колебания стержней, пластинок, лопаток турбин, балок и др.).

Ю. А. Митропольский развил также одночастотный метод для построения асимптотических решений для систем с гироскопическими членами. Построенные уравнения первого приближения для амплитуды и фазы одночастотного процесса позволили с высокой точностью проанализировать целый ряд сложных явлений в гироскопических системах при нестационарном режиме.

Ю. А. Митропольским был развит метод исследования нестационарных одночастотных колебаний в системах, описываемых уравнениями в символической форме

$$Z(p)\,x = \varepsilon F(\tau, \theta, x), \tag{6}$$

где $p = d/dt,\ Z(p) = \sum_{n=1}^{N} a_n(\tau)\,p^n$.

Этот метод оказался удобным при рассмотрении задач, связанных с исследованием нестационарных колебательных процессов в механических системах типа коленчатых валов, систем передач, в системах регулирования, при изучении электрических цепей и т. д.

В работах Ю. А. Митропольского одночастотный метод был применен также для исследования колебаний в нелинейных системах с запаздыванием.

Одночастотный метод получил строгое математическое обоснование в большом цикле исследований Ю. А. Митропольского. Это обоснование сводится, во-первых, к установлению оценки точности получаемых приближенных решений и, во-вторых,— к решению вопроса об устойчивости получаемых двупараметрических семейств частных решений, заключающейся в притяжении этим семейством решений произвольных решений рассматриваемой системы, начальные значения которых принадлежат достаточно малой окрестности данного двупараметрического семейства.

Результаты, полученные Ю. А. Митропольским по исследованию систем с медленно меняющимися параметрами и по развитию одночастотного метода, вошли в фундаментальную монографию Ю. А. Митропольского «Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний» (1964 г.), а также в монографию «Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний» (1955 г., совместно с Н. Н. Боголюбовым). Эта монография кроме результатов по асимптотическим методам, изложенных Н. М. Крыловым и Н. Н. Боголюбовым в монографии «Введение в нелинейную механику» (1937 г.), содержит основные результаты, полученные ее авторами в области развития асимптотических методов нелинейной механики в период 1945—1965 гг. Она вышла в четырех изданиях в нашей стране, а также в пяти изданиях за рубежом и является основным руководством в области нелинейной механики.

Развитие метода усреднения. Наряду с асимптотическим и одночастотным методом одним из основных методов анализа нелинейных систем является метод усреднения.

Строгая теория метода усреднения принадлежит Н. Н. Боголюбову.

Он показал, что метод усреднения органически связан с существованием некоторой замены переменных, позволяющей исключить время t из правых частей уравнений с произвольной степенью точности относительно малого параметра ε. Н. Н. Боголюбов также дал строгое математическое основание метода усреднения и предложил схему построения высших приближений.

Ю. А. Митропольский развил метод усреднения применительно к исследованию самых разнообразных классов дифференциальных уравнений, содержащих «малый» и «большой» параметры. Так, Ю. А. Митропольский распространил метод усреднения на нелинейные дифференциальные уравнения с медленно меняющимися параметрами, на уравнения с недифференцированными правыми частями, на уравнения, близкие к интегрирующимся, на уравнения в функциональных пространствах, на интегро-дифференциальные уравнения и стохастические дифференциальные уравнения, на дифференциальные уравнения в частных производных, близкие к уравнениям гиперболического типа. Посредством осуществления в бесконечномерных системах усреднения и укорочения получены результаты, дающие возможность полностью проанализировать колебательные процессы в некоторых системах с распределенными параметрами. В частности, исследованы системы с медленно меняющимися параметрами, описывающие нестационарные колебательные процессы в системах с распределенными параметрами.

Результаты Ю. А. Митропольского по этому разделу изложены в монографии «Метод усреднения в нелинейной механике» (1971 г.).

В последние годы Ю. А. Митропольский совместно с А. М. Самойленко разработал аксиоматическую теорию метода усреднения: аксиоматически вводятся три условия, налагаемые на оператор усреднения M_t и на некоторый вспомогательный дифференциальный оператор L.

Установлена оценка близости точного решения и его m-го приближения. Показано, что разработанная схема включает в себя классический алгоритм метода усреднения. Реализация предложенного алгоритма для системы с главной линейной частью при $m = \infty$ и $\varepsilon = 1$ приводит к методу нормальных форм.

На основе рассмотренной методики предложен алгоритм асимптотического интегрирования для исследования слабо нелинейных дифференциальных уравнений. Найдены формулы асимптотических приближений, исследованы уравнения m-х приближений.

Развитый здесь подход позволил выделить классы уравнений, асимптотическое интегрирование которых приводит к расщеплению движения на «нормально» и «медленно» изменяющиеся составляющие.

Дальнейшим развитием метода усреднения стали результаты Ю. А. Митропольского, полученные совместно с А. К. Лопатиным. Ими предложен алгоритм преобразования возмущенной системы к специально сконструированной системе сравнения, названный алгоритмом асимптотической декомпозиции и основанный на использовании рядов Ли и привлечении теоретико-групповых методов исследования. Рассмотрен широкий класс дифференциальных уравнений как в обыкновенных, так и в частных производных.

Основная идея нового подхода состоит в замене непосредственного исследования системы дифференциальных уравнений исследованием алгебр Ли $\mathscr{L}$ и $\tilde{\mathscr{L}}$, соответствующих системе нулевого приближения и возмущенной системе. В такой постановке построение системы сравнения сводится к задаче проектирования возмущенной алгебры $\tilde{\mathscr{L}}$ на некоторую подалгебру $\mathscr{L}_0$, названную алгеброй централизатора. Новый подход не ограничивается рамками исследования чисто колебательных процессов в исходной системе, характерными для метода усреднения, а включает широкий круг задач, тесно связанных со свойствами алгебр $\mathscr{L}$, $\tilde{\mathscr{L}}$. Например, важным частным случаем задачи, которую удается рассмотреть при указанном подходе, является задача о декомпозиции (расщеплении), состоящая в том, чтобы решение системы дифференциальных уравнений высокого порядка заменить последовательным решением систем меньшей размерности.

Основным моментом нового подхода является возможность замены исходной дифференциальной системы некоторой пфаффовой системой общего вида. Предполагается, что ее нулевое приближение в рассматриваемой области обладает интегральным многообразием $\mathfrak{M}_m$ размерности m (интегральной поверхностью). Кроме размерности интегральное многообразие может характеризоваться одним из следующих свойств, например быть инвариантным относительно некоторой группы преобразований, быть компактным и т. д. Исследуется вопрос о близости свойств интегрального многообразия $\mathfrak{M}_m$ исходной и возмущенной $\mathfrak{M}_m^\varepsilon$ системы при малых значениях параметра ε.

Исследование пфаффовой системы заменяется исследованием ее векторных полей $X_{01}+\varepsilon Y_1, \ldots, X_{0k}+\varepsilon Y_k$, записываемых в виде линейных дифференциальных операторов в частных производных первого порядка и порождающих обертывающую алгебру Ли $\tilde{\mathscr{L}}$ возмущенной системы. При $\varepsilon=0$ эти поля порождают алгебру Ли $\mathscr{L}$ системы нулевого приближения.

Алгебра Ли $\mathscr{L}$ нулевого приближения может быть компактной или декомпозируемой в прямую сумму подалгебр, т. е. приводимой, или обладать другими свойствами в соответствии со структурой интегрального многообразия $\mathfrak{M}_m$.

Таким образом, переход от исходной дифференциальной системы к системе пфаффовых уравнений позволяет ввести алгебры $\mathscr{L}, \tilde{\mathscr{L}}$ и рассмотреть задачу возмущений на алгебрах Ли.

Применение алгоритма асимптотической декомпозиции к системам обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$dx'/dt = \omega(x') + \varepsilon\tilde{\omega}(x'), \tag{7}$$

где $x' \in R^n, \omega, \tilde{\omega}$ — n-мерные векторы вещественных аналитических функций, позволяет получить новые результаты.

С помощью замены переменных в виде ряда Ли

$$x_j' = \exp(\varepsilon S)\, x_j, \quad j=\overline{1,n}, \tag{8}$$

где $S = S_1 + \varepsilon S_2 + \ldots, S_i$ — специальным образом выбираемые дифференциальные операторы в частных производных первого порядка с аналитическими коэффициентами, системе (7) сопоставляется эталонная система

$$dx_j/dt = \omega_j(x) + \varepsilon N(x)\, x_j, \quad j=\overline{1,n}, \tag{9}$$

где $N = N_1(x) + \varepsilon N_2(x) + \ldots,\ N_\nu(x) = \sum\limits_{j=1}^{n} b_{\nu j0}(x)\, \partial/\partial x_i$, называемая централизованной.

Нулевое приближение централизованной системы совпадает с системой нулевого приближения исходной системы. Кроме того, эта система инвариантна относительно однопараметрической группы преобразований

$$x = \exp\{\mu u(x)\}\ \bar{x}, \tag{10}$$

где $x, \bar{x} \in R^n$, $U(x)$ — оператор, ассоциированный с системой нулевого приближения, в то время как возмущенная система (7) инвариантна относительно этой группы лишь в нулевом приближении.

Интегрирование централизованной системы проще по сравнению с исходной возмущенной системой. Например, ее решение можно представить в виде ряда Ли

$$x_j = \exp(\tau N(z))\, z_j, \quad j=\overline{1,n}, \tag{11}$$

по медленному времени $\tau=\varepsilon t$, в котором переменная z определяется как решение системы нулевого приближения

$$dz/dt = \omega(z). \tag{12}$$

Обоснование алгоритма асимптотической декомпозиции сводится к исследованию свойств линейного оператора $L_U X = [U, X]$, $([\cdot, \cdot]$ — скобка Пуассона), действующего в обертывающей алгебре $\tilde{\mathcal{L}}$ возмущенной системы.

Доказан ряд теорем об интегрировании централизованной системы, в частности, о представлении решения в виде ряда Ли (11). Доказана теорема о необходимых и достаточных условиях разделения переменных на быстрые и медленные в централизованной системе лишь при предположении об их аналитичности.

Проведено обоснование алгоритма асимптотической декомпозиции и установлен асимптотический характер приближения решения $x'(t)$ исходной системы с помощью централизованной системы m-го порядка, указаны условия, при которых асимптотическая оценка справедлива на интервале изменения независимой переменной порядка L/ε. Исследован вопрос о том, когда централизованная система наследует свойство декомпозируемости от системы нулевого приближения.

В качестве различных приложений были рассмотрены уравнения Ван-дер-Поля, классическая модель Вольтерра хищник — жертва, колебательные системы, близкие к инвариантным, возмущенное движение самолета вблизи независимых движений в вертикальной и горизонтальной плоскости и др.

Изложенные выше результаты Ю. А. Митропольского относятся к развитию алгоритмических аспектов развитых им методов нелинейной механики.

Важное место в его исследованиях занимают качественные аспекты развитых методов нелинейной механики. Рассмотрим основные результаты, полученные Ю. А. Митропольским в этом направлении.

Исследование интегральных многообразий. Проблема изучения интегральных многообразий возникла при исследовании колебаний в системах с большим числом степеней свободы. Она заключается в выделении из всей совокупности решений, допускаемых сложными системами нелинейных дифференциальных уравнений, многообразия решений (интегрального многообразия), имеющего размерность меньше порядка системы и обладающего теми или иными характерными свойствами. Основополагающие результаты по исследованию интегральных многообразий были получены в 1945 г. Н. Н. Боголюбовым. Он установил признаки существования асимптотически (условно асимптотически) устойчивого однопараметрического интегрального многообразия уравнения в стандартной форме

$$dx/dt = \varepsilon X(t, x), \quad \varepsilon > 0, \tag{13}$$

исходя из свойств уравнения первого приближения

$$d\xi/dt = \varepsilon X_0(\xi), \tag{14}$$

где $X_0(\xi) = \lim\limits_{T\to\infty} \int\limits_0^T X(t, x)\, dt$ равномерно относительно x, а также исследовал структуру этого многообразия.

Эти результаты Н. Н. Боголюбова послужили основой для создания нового направления в качественной теории дифференциальных уравнений, которое получило название метода интегральных многообразий. В дальнейшем плодотворность идей интегральных многообразий была продемонстрирована в работах Н. Н. Боголюбова и Ю. А. Митропольского. Они показали, что метод интегральных многообразий является удобным аппаратом исследования многомерных динамических систем. Наличие у рассматриваемой системы интегрального многообразия позволяет сводить качественное исследование системы высокого порядка на многообразии к качественному исследованию системы более низкого порядка. Эта идея сведения исследования процесса высокой размерности к исследованию процесса более низкой размерности, как известно, является важной во многих прикладных задачах.

В работе Ю. А. Митропольского «Об исследовании интегрального многообразия для системы нелинейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами» (1958 г.) идея интегральных многообразий получила существенное развитие при исследовании однопараметрических интегральных многообразий нелинейных дифференциальных уравнений вида

$$d\varphi/dt = \omega(t) + P(t, \varphi, h, \varepsilon), \qquad dh/dt = H(t)\, h + Q(t, \varphi, h, \varepsilon) \tag{15}$$

с переменной матрицей $H(t)$.

В последующих работах по этому направлению Ю. А. Митропольский рассмотрел интегральные многообразия дифференциальных уравнений с медленно меняющимися параметрами, а также интегральные многообразия уравнений, близких к уравнениям с переменными коэффициентами в гильбертовом пространстве, и др.

Существенным толчком в развитии метода интегральных многообразий явился проблемный доклад по интегральным многообразиям Н. Н. Боголюбова и Ю. А. Митропольского на Международном симпозиуме по нелинейным колебаниям в 1961 г. В этом докладе кроме изложения общей идеи интегральных многообразий и основных результатов были сформулированы постановки новых задач, решение которых во многом продвинуло развитие этой теории для исследования широкого класса нелинейных дифференциальных уравнений. В работах Ю. А. Митропольского и его учеников (О. Б. Лыковой, В. И. Фодчука и др.) были исследованы интегральные многообразия нелинейных дифференциальных уравнений, близких к интегрирующимся, уравнений, содержащих быстрые и медленные переменные (в частности, уравнений с быстро вращающейся фазой), уравнений с отклоняющимся аргументом, сингулярно возмущенных уравнений. Применив аппарат спектральной теории линейных операторов, Ю. А. Митропольский распространил метод интегральных многообразий для исследования указанных типов уравнений на случай бесконечномерного банахова пространства.

В работах Ю. А. Митропольского с помощью метода интегральных многообразий развита известная в теории устойчивости идея сведения.

Исследования Ю. А. Митропольского по теории интегральных многообразий изложены в совместных с О. Б. Лыковой монографиях «Лекции по методу интегральных многообразий» (1969 г.) и «Интегральные многообразия в нелинейной механике» (1973 г.).

М е т о д у с к о р е н н о й с х о д и м о с т и. Для исследования многих задач теории нелинейных колебаний удобен специальный метод последовательных замен переменных, развитый Н. М. Крыловым и Н. Н. Боголюбовым. В середине 60-х годов в связи с появлением работ А. Н. Колмогорова и В. И. Арнольда Н. Н. Боголюбов разработал новый вариант метода последовательных замен переменных, который объединил метод ускоренной сходимости, типичный для ньютоновского метода касательных, с методом интегральных многообразий, что дало возможность рассмотреть довольно широкий круг нелинейных задач.

В работах Ю. А. Митропольского этим методом решен ряд задач нелинейной механики. В частности, построено общее решение нелинейной системы

$$dh/dt = \beta h + F(\varphi, h), \quad d\varphi/dt = \omega \tag{16}$$

(β — диагональная постоянная матрица, ω — вектор сильно несоизмеримых частот) с аналитической вектор-функцией $F(\varphi, h)$, в окрестности инвариантного тора

$$\mathrm{T}_m : h = 0, \quad \varphi \in \mathrm{T}_m. \tag{17}$$

Указан алгоритм с ускоренной сходимостью итераций, строящий преобразование

$$h, \varphi \to g, \theta, \tag{18}$$

приводящее нелинейную систему (16) в окрестности тора (17) к интегрируемой системе вида

$$dg/dt = \alpha g, \quad d\varphi/dt = \omega, \tag{19}$$

где α — диагональная постоянная матрица. Эти результаты изложены в работе Ю. А. Митропольского «О построении общего решения нелинейных дифференциальных уравнений с помощью метода, обеспечивающего «ускоренную» сходимость» (1964 г.).

В совместных работах с А. М. Самойленко этим методом исследованы задачи о приводимости линейной системы с квазипериодическими коэффициентами и сильно несоизмеримым базисом частот

$$dx/dt = Ax + P(\varphi)\,x, \quad d\varphi/dt = \omega \tag{20}$$

к системе с постоянными коэффициентами

$$dy/dt = A_0 y, \quad d\varphi/dt = \omega \tag{21}$$

для случая как аналитических, так и гладких матриц $P(\varphi)$, достаточно малых по норме. Кроме того, обобщены известные результаты А. Н. Колмогорова и В. И. Арнольда о приводимости динамической системы на n-мерном торе к чистому вращению на случай конечное число раз дифференцируемых правых частей.

Результаты исследований Ю. А. Митропольского по методу ускоренной сходимости изложены в монографии «Метод ускоренной сходимости в задачах нелинейной механики» (1969 г., совместно с Н. Н. Боголюбовым и А. М. Самойленко).

Асимптотические методы в многочастотных системах. В последние годы в нелинейной механике произошел существенный сдвиг в сторону изучения многочастотных колебаний. Это потребовало для исследования колебательных систем со многими степенями свободы разработать алгоритмы асимптотического интегрирования таких систем и дать их математическое обоснование. Эта важная задача решена Ю. А. Митропольским совместно с А. М. Самойленко.

Разработанные ими алгоритмы позволили исследовать такие тонкие явления, возникающие в многочастотных системах, как квазипериодические колебания, явления внутреннего резонанса и др.

Особо детально разработана алгоритмическая часть метода применительно к колебательным системам 2-го порядка типа систем Ван-дер-Поля. Доказан ряд теорем общего характера, выясняющих вопросы существования и устойчивости инвариантных тороидальных многообразий таких систем и их разложения в асимптотические ряды по степеням малого параметра. Алгоритмы, разработанные Ю. А. Митропольским и А. М. Самойленко, доведены до практических реализаций на ЭВМ.

Изложенное выше, естественно, не дает полное представление о всем множестве полученных Ю. А. Митропольским результатов. Достаточно указать монографии «Математическое обоснование асимптотических методов нелинейной механики» (1983 г., совместно с Г. П. Хомой) и «Машинный анализ нелинейных резонансных цепей» (1981 г., совместно с А. А. Молчановым), обзор результатов которых не вошел в настоящую статью.

А. М. САМОЙЛЕНКО, О. Б. ЛЫКОВА