УДК 517.53

В. В. Андриевский

О скорости гармонической аппроксимации на компактах в R^3

1. Пусть $K \subset R^3$ — компакт со связным дополнением $\Omega = R^3 \setminus K$; $H^\omega_\Delta(K)$ (где $\omega(\delta)$, $\delta > 0$, — функция типа модуля непрерывности) — класс непрерывных на K и гармонических в его внутренних точках действительных функций f, удовлетворяющих условию $|f(x) - f(y)| \leqslant c\omega(|x-y|)$; $x, y \in K$, $c = c(f) = \mathrm{const}$, где $|x-y| = \left(\sum_{i=1}^{3} |x_i - y_i|^2\right)^{1/2}$, $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$.

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что область Ω удовлетворяет условию α-конуса, $0 < \alpha < \pi/2$, т. е. в любую ее точку x можно поместить вершину содержащегося в Ω конуса $V(x, \alpha, c)$, $c = c(\Omega) = \mathrm{const} > 0$, заданного в декартовой системе координат $y = (y_1, y_2, y_3)$ неравенствами $y_1^2 + y_2^2 < y_3^2 \operatorname{tg}^2 \alpha$, $0 < y_3 < c$.

Обозначим $\mathcal{H}_n$, $n = 0, 1, \ldots$ совокупность гармонических полиномов степени $\leqslant n$. Для $f \in H^\omega_\Delta(K)$ положим $E_{\Delta,n}(f, K) = \inf\limits_{H_n \in \mathcal{H}_n} \max\limits_{x \in K} |f(x) - H_n(x)|$.

Сформулируем основной результат работы. С этой целью введем в рассмотрение функцию $\gamma(t) = \sup\limits_{0<\tau<t} (\tau/1-\tau) \ln t/\tau$, $0 < t < 1$. Эта функция не убывает на $(0, 1)$ и, кроме того, $t/e \leqslant \gamma(t) \leqslant t$, $\lim\limits_{t \to 1} \gamma(t) = 1$.

Обозначим через $c, c_1, \ldots$ достаточно большие, а через $\varepsilon, \varepsilon_1, \ldots$ — достаточно малые положительные константы в различных соотношениях, вообще говоря, различные и зависящие, если не оговорено особо, только от компакта K или других несущественных для интересующих нас вопросов величин.

Теорема. *Пусть $\Omega = R^3 \setminus K$ удовлетворяет условию α-конуса, $0 < \alpha < \pi/2$; $f \in H^\omega_\Delta(K)$. Тогда $\forall \varepsilon$ справедлива оценка*

$$E_{\Delta,n}(f, K) \leqslant c(\varepsilon)\, \omega(n^{-\gamma(\sin\alpha)+\varepsilon}), \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{1}$$

Эта теорема является пространственным аналогом соответствующего утверждения С. Н. Мергеляна, относящегося к случаю полиномиального приближения аналитических функций (см., например, [1, с. 125]). Ее также можно рассматривать как продолжение исследований, начатых в работе [2].

Относительную точность оценки (1) демонстрирует следующий несложно выводимый из нее и свойств функции $\gamma(t)$ факт.

Пусть $K = \overline{G}$ является замыканием области G, ограниченной гладкой жордановой поверхностью класса C^1 (см., например, [3, с. 31]). Тогда для функции $f \in H^\omega_\Delta(\overline{G})$ имеем $E_{\Delta,n}(f, \overline{G}) \leqslant c(\varepsilon)\, \omega(n^{-1+\varepsilon})$, $n = 1, 2, \ldots$

2. Введем в рассмотрение два оператора и отметим некоторые их свойства, существенно использующиеся в дальнейшем (более подробно см. [4, 5]).

Обозначим $\mathcal{E}_0$ оператор продолжения, который каждой функции $f \in H^\omega_\Delta(K)$ ставит в соответствие функцию $g(x) = (\mathcal{E}_0 f)(x)$, заданную, непрерывную и удовлетворяющую условию $|g(x) - g(y)| \leqslant c\omega(|x-y|)$ на всем пространстве R^3, совпадающую с $f(x)$ на K и имеющую компактный носитель.

Введем также оператор усреднения U_δ, $\delta > 0$, положив

$$g_\delta(x) = (U_\delta g)(x) = \int_{R^3} g(x + \delta y)\, K(y)\, dy, \quad x \in R^3,$$

где

$$K(y) = \begin{cases} c \exp\{|y|^2/(|y|^2 - 1)\}, & 0 \leqslant |y| < 1, \\ 0 & |y| \geqslant 1, \end{cases}$$

а константа c подобрана так, чтобы выполнялось равенство $\int\limits_{R^3} K(y)\,dy = 1$.

Функция $g_\delta(x)$ бесконечно дифференцируема и имеет, по-прежнему, компактный носитель. Кроме того, справедливы оценки

$$|g_\delta(x) - g(x)| \leqslant c_1\omega(\delta), \quad x \in R^3; \ |\Delta g_\delta(x)| \leqslant c_2\omega(\delta)/\delta^2, \ x \in R^3;$$

$$g_\delta(x) = f(x), \ x \in K \setminus K^\delta;$$

в которых $K^\delta = \{x : x \in K, \ \rho(x, \Omega) < \delta\}$, $\rho(x, E) = \inf\limits_{y \in E} |x - y|$, $x \in R^3$, $E \subset R^3$.

Пусть r, θ, φ — сферические координаты с центром в точке $x_0 \in R^3$, $B(x_0, R) = \{x : |x - x_0| < R\}$, $R > 0$. Пусть, далее, на сфере $S(x_0, R) = \{x : |x - x_0| = R\}$ задана непрерывная функция $F(R, \theta, \varphi)$.

Согласно формуле Лапласа решение задачи Дирихле $\Delta F = 0$, $F|_{S(x_0, R)} = F(R, \theta, \varphi)$ может быть представлено в виде:

для шара $B(x_0, R)$ —

$$F(r, \theta, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} (r/R)^k Y_k(\theta, \varphi), \tag{2}$$

для его дополнения $R^3 \setminus \overline{B(x_0, R)}$ —

$$F(r, \theta, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} (R/r)^{k+1} Y_k(\theta, \varphi), \tag{3}$$

где

$$Y_k(\theta, \varphi) = Y_k(\theta, \varphi, F) =$$

$$= \frac{2k+1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} F(R, \theta', \varphi') P_k(\cos\gamma) \sin\theta' d\theta' d\varphi' \tag{4}$$

— сферические гармоники, $P_k(x)$, $k = 0, 1, \ldots$,— полиномы Лежандра, γ — угол между векторами (r, θ, φ) и (R, θ', φ').

3. При $\delta > 0$ положим $K_\delta = \{x : \rho(x, K) < \delta\}$.

Лемма 1. *Для любой точки* $y \in K^\delta \cup (\Omega \cap K_{3\delta})$, $0 < \delta < \varepsilon$, *существует точка* $\tilde{y} \in R^3 \setminus K_{4\delta}$ *и гармоническая вне этой точки функция* $Q(x, y)$ *со следующими свойствами*:

$$|Q(x, y)| \leqslant c_1/\delta, \qquad x \in K_{3\delta}, \tag{5}$$

$$||x - y|^{-1} - Q(x, y)| \leqslant c_2\delta^3/|x - y|^4, \ |x - y| \geqslant c_3\delta. \tag{6}$$

Доказательство. Пусть точка $z \in \Omega$ такова, что $|y - z| < 2\delta$. В качестве $\tilde{y}$ возьмем точку на оси конуса $V(z, \alpha, c)$, для которой $\rho(\tilde{y}, K) > 4\delta$, $|\tilde{y} - z| < c_4\delta$.

В силу (3) при $x \in R^3 \setminus \overline{B(\tilde{y}, c_5\delta)}$, $c_5 = 2(c_4 + 2)$ имеем $|x - y|^{-1} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(\frac{c_5\delta}{|x - \tilde{y}|}\right)^{k+1} Y_k(\theta, \varphi)$. Нетрудно видеть, что функция $Q(x, y) = \sum\limits_{k=0}^{2} \left(\frac{c_5\delta}{|x - \tilde{y}|}\right)^{k+1} Y_k(\theta, \varphi)$ будет искомой.

Замечание 1. Из соображений непрерывности функции $|x - y|^{-1}$ по y вне точки x можно считать, что функция $Q(x, y)$ измерима по y при всех x.

Лемма 2. *Пусть* $f \in H^\omega_\Delta(K)$, $g = \mathscr{E}_0 f$. *Существует гармоническая в* $K_{3\delta}$, $0 < \delta < \varepsilon$, *функция* $h_\delta(x)$, *для которой справедливо неравенство*

$$|h_\delta(x) - g(x)| \leqslant c\omega(\delta), \qquad x \in K_{3\delta}. \tag{7}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим функцию $g_\delta = U_\delta g$. Согласно формуле Грина [5, с. 151]

$$g_\delta(x) = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Omega\cup\bar{K}^\delta} \Delta g_\delta(y)\frac{dy}{|x-y|}, \qquad x\in R^3.$$

Пользуясь соотношениями (5) и (6), легко показать, что функция

$$h_\delta(x) = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{K^\delta\cup(\Omega\cap K_{3\delta})} \Delta g_\delta(y)\,Q(x, y)\,dy - \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Omega\setminus K_{3\delta}} \Delta g_\delta(y)\frac{dy}{|x-y|},$$

где $Q(x, y)$ — функция из леммы 1, удовлетворяет неравенству (7).

Следующий шаг состоит в осуществлении «гармонического варианта» процедуры вывода полюсов М. В. Келдыша (см., например, [6, с. 21—27]).

Л е м м а 3. *Пусть $K\subset B(0, R)$, $R>0$. Для любых $\varepsilon>0$, $0<d<\varepsilon_1$ и $y\in B(0, 3R)\setminus K$ существует гармоническая в $B(0, 3R)$ функция $Q_{y,\varepsilon,d}(x)$, удовлетворяющая неравенствам*

$$||x-y|^{-1} - Q_{y,\varepsilon,d}(x)|\leqslant d, \quad x\in K; \quad \sup_{x\in B(0,3R)} |Q_{y,\varepsilon,d}(x)|\leqslant$$

$$\leqslant \exp\{c_1(\varepsilon)(\ln c_2(\varepsilon)/\rho d)\,\rho^{-1/(\gamma(\sin\alpha)-\varepsilon)}\},$$

где $\rho = \rho(y, K)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $V(y, \alpha, c)\subset\Omega$ — соответствующий конус с вершиной в точке y. Для простоты считаем, что $c=\infty$ (общий случай получается несложной модификацией приведенных ниже рассуждений).

Зафиксируем произвольные числа ν и $\beta: 0<\nu<1$, $0<\beta<\alpha$. На оси конуса $V(y, \alpha, c)$ выберем последовательность расположенных в порядке возрастания индекса точек $y_0 = y, y_1, \ldots, y_m$ так, чтобы

$$|y_k - y_{k+1}| = \nu d_{k+1}, \qquad k = 0, \ldots, m-1;$$

$$d_k = \begin{cases}\rho/8, & k=1,\\ |y_0-y_k|\sin\beta, & k=2,\ldots,m,\end{cases}$$

$$m = [-(\ln c_3/\rho)/\ln(1-\nu\sin\beta)],$$

причем константа c_3 выбрана настолько большой, чтобы выполнялось условие $B(0, 3R)\cap B(y_m, d_m) = \varnothing$.

Отправляясь от функции $Q_0(x) = |x-y|^{-1}$, строим последовательность функций $Q_k(x)$, $k=1, \ldots, m$. Каждая из этих функций будет гармонической соответственно в $R^3\setminus\overline{B(y_k, d_k)}$ и каждая последующая будет достаточно хорошо приближать на K предыдущую.

Опишем сначала процедуру построения функции $Q_1(x)$. При $x\in R^3\setminus\overline{B(y_1, \rho/4)}$ согласно (3) и (4) имеем

$$Q_0(x) = \sum_{j=0}^{\infty}(\rho/4|x-y_1|)^{j+1}\,Y_j(\theta, \varphi, Q_0), \quad |Y_j(\theta, \varphi, Q_0)|\leqslant c_4(2j+1)/\rho.$$

Естественно положить

$$Q_1(x) = \sum_{j=0}^{n_1}(\rho/4|x-y_1|)^{j+1}\,Y_j(\theta, \varphi, Q_0).$$

Покажем теперь как по $Q_k(x)$ строится функция $Q_{k+1}(x)$. При $x\in R^3\setminus\overline{B(y_{k+1}, d_{k+1})}$ в силу (3) и (4) имеем

$$Q_k(x) = \sum_{j=0}^{\infty}(d_{k+1}/|x-y_{k+1}|)^{j+1}\,Y_j(\theta, \varphi, Q_k),$$

$$|Y_j(\theta, \varphi, Q_k)| \leqslant c_5 (2j+1) \max_{x \in S(y_{k+1}, d_{k+1})} |Q_k(x)| \leqslant$$

$$\leqslant c_6 (2j+1)\, n_k \lambda^{n_k} M_h,$$

где

$$\lambda = 1 - \nu \sin\beta/1 - \nu, \;\; M_k = \max_{x \in S(y_k,\, d_k)} |Q_{k-1}(x)|.$$

Положим

$$Q_{k+1}(x) = \sum_{j=0}^{n_{k+1}} (d_{k+1}/|\, x - y_{k+1}\,|)^{j+1}\, Y_j(\theta, \varphi, Q_k).$$

При этом справедливо неравенство

$$\max_{x \in S(y_{k+1},\, d_{k+1})} |Q_{k+1}(x)| \leqslant c_7 n_k n_{k+1}^2 M_k \lambda^{n_k}. \tag{8}$$

Если теперь положить $n_1 = c_8 \ln (c_9/\rho d)$, $n_{k+1} = [t n_k]$, $k = 1, \ldots, m-1$, $t > 1 + (\ln \lambda)/(\ln \mu)$, $\mu = \sin\alpha/\sin\beta$, то построенная последовательность будет удовлетворять условию $|Q_k(x) - Q_{k+1}(x)| \leqslant d 2^{-k-1}$, $x \in K$.

При этом согласно (8) выполняется неравенство

$$\max_{x \in S(y_m,\, d_m)} |Q_m(x)| \leqslant c_{10} \lambda^{c_{11} n_m} \leqslant \exp\{c_{12} (\ln c_{13}/\rho d)\, \rho^{(\ln t)/\ln(1 - \nu \sin\beta)}\}.$$

Для завершения доказательства леммы 3 положим $Q_{y,\varepsilon,d}(x) = Q_m(x)$ и учтем, что $\lim\limits_{\nu \to 0} \ln(1 - \nu \sin\beta)/\ln t = -\sin\beta/1 - \sin\beta \ln \sin\alpha/\sin\beta$.

З а м е ч а н и е 2. Из соображений непрерывности можно считать, что функция $Q_{y,\varepsilon,d}(x)$ при всех x измерима по y.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы. Пусть n достаточно велико, $\delta = \delta(n)$ — достаточно малое число, выбор которого будет произведен ниже, $h_\delta(x)$, $x \in \overline{K}_{2\delta}$,— функция из леммы 2.

К функции $p_\delta = U_\delta \mathscr{E}_{\overline{K_{2\delta}}} f_\delta$ применим формулу Грина [5, с. 151]

$$p_\delta(x) = -1/4\pi \int_{R^3 \setminus K_\delta} \Delta p_\delta(y)\, dy/|\, x - y\,|, \qquad x \in R^3$$

и рассмотрим функцию

$$Q_\delta(x) = -1/4\pi \int_{B(0, 3R) \setminus K_\delta} \Delta p_\delta(y)\, Q_{y,\varepsilon,d}(x)\, dy -$$

$$-1/4\pi \int_{R^3 \setminus B(0, 3R)} \Delta p_\delta(y)\, dy/|\, x - y\,|, \quad x \in B(0, 3R),$$

где $Q_{y,\varepsilon,d}(x)$ — функции из леммы 3.

При $x \in K$ и $d = \delta^3$ находим $|p_\delta(x) - Q_\delta(x)| \leqslant c_1 \delta$. Кроме того,

$$\max_{x \in B(0, 2R)} |Q_\delta(x)| \leqslant c_2 \exp\{c_3 \delta^{-1/(\gamma(\sin\alpha) - \varepsilon)}\}.$$

Согласно (2) и (4) при $x \in B(0, 2R)$

$$Q_\delta(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (r/2R)^k\, Y_k(\theta, \varphi),$$

$$|Y_k(\theta, \varphi)| \leqslant c_4 (2k+1) \exp\{c_3 \delta^{-1/(\gamma(\sin\alpha) - \varepsilon)}\}.$$

Для завершения доказательства теоремы остается рассмотреть гармонический полином $H_n(x) = \tilde{H}_n(r, \theta, \varphi) = \sum\limits_{k=0}^{n} (r/2R)^k\, Y_k(\theta, \varphi)$, положить $\delta = c_5 n^{-\gamma(\sin\alpha) + \varepsilon}$ и, произведя элементарные выкладки, убедиться в справедливости неравенства $|Q_\delta(x) - H_n(x)| \leqslant c_6 \exp\{-\varepsilon_1 n\}$, $x \in K$.

1. *Смирнов В. И., Лебедев Н. А.* Конструктивная теория функций комплексного переменного.— М. : Наука, 1964.— 438 с.
2. *Мергелян С. Н.* Гармоническая аппроксимация и приближенное решение задачи Коши для уравнения Лапласа // Успехи мат. наук.— 1956.— 11, № 5.— С. 3—26.
3. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа.— М. : Наука, 1973.— 576 с.
4. *Стейн И. М.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций.— М. : Мир, 1973.— 342 с.
5. *Соболев С. Л.* Уравнения математической физики.— М. : Наука, 1966.— 443 с.
6. *Мергелян С. Н.* О полноте систем аналитических функций // Успехи мат. наук.— 1953. — 8, № 4.— С. 3—63.

Ин-т прикл. математики и механики АН УССР,
Донецк

Получено 24.06.87