УДК 519.21

Г. П. Буцан, М. Ю. Козаченко

Предельные теоремы о сходимости бесконечных произведений для параметрических стохастических операторных систем

Настоящая статья является непосредственным продолжением работ [1—3] и в ней сохранены принятые там обозначения и определения. Напомним некоторые из них. H — серапабельное гильбертово пространство с нормой $|\cdot|_1$, $X(H)$ — кольцо всех ограниченных линейных операторов на H с нормой $|\cdot|_2$, $\sigma_2(H)$ — идеал всех операторов Гильберта — Шмидта из $X(H)$ с нормой $|\cdot|_3$, $\sigma_2(H,\Omega)$ — гильбертово пространство всех случайных величин на $\sigma_2(H)$, у которых $|\xi|_4^2 = E|\xi|_3^2 < \infty$, $\sigma_2(H) + I = G_2(H)$, $G_2(H, \Omega) = \sigma_2(H,\Omega) + I$, σ_s^t — поток σ алгебр, причем для $0 \leqslant s \leqslant \tau \leqslant t \leqslant q$: σ_s^t и σ_t^q — независимы. В [1, 2] были указаны условия, при которых система Z_s^t, $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T < \infty$ на $G_2(H,\Omega)$, допускает существование в норме $|\cdot|_4$ и независимость от последовательности разбиений $\Delta_n[s,t]$ следующего предела:

$$X_s^t = \lim \sum_{k=1}^{m_n} Z_{t_{k-1}}^{t_k}, \quad \sigma_n = \max_k (t_k - t_{k-1}) \to 0. \tag{1}$$

Одним из таких условий являлось существование в $|\cdot|_2$ и независимость от $\Delta_n[s,t]$ предела

$$x_s^t = \lim x_s^t(n) = \lim \sum_{k=1}^{m_n} z_{t_{k-1}}^{t_k}, \quad \sigma_n \to 0, \quad z_s^t = EZ_s^t, \tag{2}$$

для которого

$$\gamma_n = \sup_k |x_0^{t_k} - x_0^{t_k}(n)|_2 \to 0, \quad \sigma_n \to 0. \tag{3}$$

Кроме того, в каждой точке $t \in [0, T]$ предполагалось существование следующих пределов:

$$Z_{t-}^t, \ Z_t^{t+} \in G_2(H,\Omega), \quad (z_{t-}^t)^{-1}, \ (Z_t^{t+})^{-1}, \ (x_{t-}^t)^{-1}, \ (x_t^{t+})^{-1} \in X(H), \tag{4}$$

первые из которых удовлетворяли условию регулярности

$$Z_{t-}^t = I \vee Z_t^{t+} = I, \quad Z_t^t = I \qquad \forall t \in [0, T]. \tag{5}$$

Естественно попытаться исключить из (3) и (4) условия на x_s^t, заменив их соответствующими условиями на z_s^t.

Для этого потребуются некоторые простые вспомогательные леммы, которые позволят усилить и результаты работ [1, 2]. Как легко увидеть из дальнейшего, все они справедливы для произвольного нормированного кольца с единицей, а не только для $X(H)$.

Лемма 1. *Если система Z_s^t удовлетворяет* (2) *и условию ограниченности вариации*

$$V_s^t = \sup_{\Delta_n[s,t]} \sum_{k=1}^{m_n} |z_{t_{k-1}}^{t_k} - I|_2 < \infty, \tag{6}$$

то вариация x_s^t также ограничена

$$f_s^t = \sup_{\Delta_n[s,t]} \sum_{k=1}^{m_n} |x_{t_{k-1}}^{t_k} - I|_2 < \infty, \tag{7}$$

и существование в каждой точке $t \in [0, T]$ пределов z_{t-}^t, z_t^{t+} влечет ра-

венства

$$z_{t-}^{t}=x_{t-}^{t},\ z_{t}^{t+}=x_{t}^{t+}. \tag{8}$$

Доказательство. При $\Delta_r=\{t_{k-1}=s_0^k\leqslant\ldots\leqslant s_{r_k}^k=t_k\}$, $\sigma_r=\max(s_i^k-s_{i-1}^k)\to 0$ соотношение (7) легко вытекает из следующей оценки:

$$\sum_{k=1}^{m_n}|x_{t_{k-1}}^{t_k}-I|_2=\sum_{k=1}^{m_n}\lim\Big|\prod_{i=1}^{r_k}z_{s_{i-1}}^{s_i}-I\Big|_2=\lim\sum_{k=1}^{m_n}\Big|\sum_{i=1}^{r_k}z_{s_{i-1}}^{s_i}-I\Big|_2=\lim\sum_{k=1}^{m_n}\Big|\sum_{i=1}^{r_k}(z_{s_{i-1}}^{s_i}-I)\prod_{j=1}^{i-1}z_{j-1}^{j}\Big|_2\leqslant\lim\sum_{k=1}^{m_n}\sum_{i=1}^{r_k}|z_{i_{i-1}}^{s_i}-I|_2\prod_{j=1}^{i-1}(|z_{j-1}^{j}-I|_2+I)\leqslant\lim\sum_{k=1}^{m_n}\sum_{j=1}^{r_k}|z_{s_{i-1}}^{s_i}-I|_2\times\exp\Big\{\sum_{j=1}^{i-1}|z_{s_{j-1}}^{s_j}-I|_2\Big\}\leqslant V_s^t\exp V_s^t.$$

Теперь переходя к доказательству равенств (8), замечаем, что из соображений симметрии достаточно показать справедливость первого из них. Для этого, прежде всего, заметим, что при $\tau\in\Delta_n[s,t]$, $\tau=t_j$, $j\neq m_n$, из равенства $\sum_{k=1}^{j}(z_{t_{k-1}}^{t_k}-I)+\sum_{k=j+1}^{m_n}(z_{t_{k-1}}^{t_k}-I)=\sum_{k=1}^{m_n}(z_{t_{k-1}}^{t_k}-I)$ вытекает оценка $V_s^\tau+V_\tau^t\leqslant V_s^t$, переходя к пределу в которой при $s\uparrow t$ получаем $\lim\limits_{s\uparrow t}V_s^\tau+\lim\limits_{\tau\uparrow t}V_\tau=\lim\limits_{s\uparrow t}V_s^t$, что в свою очередь влечет равенство $V_{t-}^{t-}=0$. Рассмотрим теперь предел $\tilde{x}_s^t=\lim\prod_{k=1}^{m_n-1}z_{t_{k-1}}^{t_k}$. В силу условия (2) он существует, не зависит от последовательности $\Delta_n[s,t]$, и справедливо следующее равенство:

$$x_s^t=\tilde{x}_s^t z_{t-}^t. \tag{9}$$

Покажем, что $\tilde{x}_{t-}^{t}=I$. Для этого предположим противное. Тогда найдется последовательность $t_n\uparrow t$ и $\varepsilon>0$ такое, что $|\tilde{x}_{t_n}^t-I|_2\geqslant\varepsilon$. Используя условие (2), для каждого n находим такое разбиение $\Delta_{rn}[t_n,t]=\{t_n=s_1\leqslant s_2\leqslant\ldots\leqslant s_{r_n}=t\}$, что для него и всех его измельчений справедливо неравенство $|\tilde{x}_{t_n}^t-\prod_{i=1}^{r_n-1}z_{s_{i-1}}^{s_i}|_2\leqslant\varepsilon/2$. Тогда, очевидно, выполняется и следующее неравенство:

$$\varepsilon/2\leqslant\Big|\prod_{i=1}^{r_n-1}z_{s_{i-1}}^{s_i}-I\Big|_2=\Big|\sum_{i=1}^{r_n-1}(z_{s_{i-1}}^{s_i}-I)\prod_{j=1}^{i-1}z_{s_{j-1}}^{s_j}\Big|_2\leqslant\sup_i\prod_{j=1}^{i-1}|z_{s_{i-1}}^{s_i}|_2V_{t_n}^{s_{r_n-1}}\leqslant V_{t_n}^{s_{r_n-1}}\exp V_s^t \tag{10}$$

переходя к пределу в котором при $n\to\infty$, получаем противоречие с равенством $V_{t-}^{t-}=0$, доказанным выше. Итак,

$$\tilde{x}_{t-}^{t}=I. \tag{11}$$

Используя теперь (11) и переходя к пределу в (9) при $s\uparrow t$ получаем требуемое равенство $x_{t-}^t=z_{t-}^t$.

Л е м м а 2. *Если в условиях леммы 1 для системы z_s^t выполняется условие регулярности* (5), *то существует не зависящий от* последовательности *разбиений $\Delta_n [s, t]$ предел*

$$y_s^t = D(x)_s^t = \lim \sum_{k=1}^{m_n} (x_{t_{k-1}}^{t_k} - I), \ \ \delta_n \to 0, \tag{12}$$

который удовлетворяет следующим соотношениям:

$$\varphi(t) = \sup_{\Delta_n[0,t]} \sum_{k=1}^{m_n} | y_{t_{k-1}}^{t_k} |_2 < \infty, \tag{13}$$

$$y_s^\tau + y_\tau^t = y_s^t, \ \ y_\tau^\tau = I, \qquad 0 \leqslant s \leqslant \tau \leqslant t \leqslant T, \tag{14}$$

$$D^{-1}(y)_s^t = \lim \prod_{k=1}^{m_n} (y_{t_{k-1}}^{t_k} + I) = x_s^t, \tag{15}$$

$$\sum_{k=1}^{m_n} | x_{t_{k-1}}^{t_k} - I - y_{t_{k-1}}^{t_k} |_2 \to 0, \ \ \delta_n \to 0, \tag{16}$$

$$\sup_k \Big| x_0^{t_k} - \prod_{i=1}^{k} (y_{t_{i-1}}^{t_i} + I) \Big|_2 \to 0, \ \ \delta_n \to 0, \tag{17}$$

$$z_{t-}^t - I = x_{t-}^t - I = y_{t-}^t = 0 \vee z_t^{t+} - I = x_t^{t+} - I = y_t^{t+} = 0. \tag{18}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу результатов работы [4], опираясь на лемму 4, легко показать справедливость соотношений (12)—(15) и (18).

Теперь воспользовавшись леммой 5 из [4] при $\delta \to 0$ и результатами работы [5], получим

$$\sum_{k=1}^{m_n} | x_{t_{k-1}}^{t_k} - I - y_{t_{k-1}}^{t_k} |_2 = \sum_{k=1}^{m_n} \lim \Big| \prod_{i=1}^{r_k} (y_{s_{i-1}}^{s_i} + I) - I -$$

$$- y_{t_{k-1}}^{t_k} \Big|_2 \leqslant \lim \sum_{k=1}^{m_n} \sum_{i=1}^{r_k} (\varphi(s_{i-1}) - \varphi(t_{k-1}))(\varphi(s_i) -$$

$$- \varphi(s_{i-1})) \exp\{\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})\} \leqslant \exp\{\varphi(t) - \varphi(s)\} \times$$

$$\times \Big[\lim \sum_{k=1}^{m_n} \sum_{i=1}^{r_k} \varphi(s_{i-1})(\varphi(s_i) - \varphi(s_{i-1})) - \sum_{k=1}^{m_n} \varphi(t_{k-1})(\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})) \Big] =$$

$$= \exp\{\varphi(t) - \varphi(s)\} \Big[(e)\int_s^t \varphi(t)\, d\varphi(t) - \sum_{k=1}^{m_n} \varphi(t_{k-1})(\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})) \Big],$$

переходя в последнем соотношении к пределу при $\delta \to 0$ и опять используя [5], убеждаемся в справедливости (16).

Для доказательства (17), воспользовавшись (7), (13), запишем следующее соотношение:

$$\sup_k \Big| x_s^{t_k} - \prod_{i=1}^{k} (y_{t_{i-1}}^{t_i} + I) \Big|_2 \leqslant \sup_k \sum_{j=1}^{k} \prod_{i=1}^{j-1} x_{t_{i-1}}^{t_i} (x_{t_{j-1}}^{t_j} -$$

$$- I - y_{t_{j-1}}^{t_j}) \prod_{i=j+1}^{k} (y_{t_{i-1}}^{t_i} + I) \Big|_2 \leqslant \sup_k \Big(\sum_{j=1}^{k} | x_{t_{j-1}}^{t_j} - I -$$

$$- y_{t_{j-1}}^{t_j} | \Big) \sup_j \prod_{i=1}^{j-1} (| x_{t_{i-1}}^{t_i} - I |_2 + I) \sup_{j,k} \prod_{i=j+1}^{k} (| y_{t_{i-1}}^{t_i} |_2 + I) \leqslant$$

$$\leqslant \exp\{f_s^t + (\varphi(t) - \varphi(s))\} \sum_{k=}^{m_n} | x_{t_{k-1}}^{t_k} - I - y_{t_{k-1}}^{t_k} |_2.$$

Переходя затем к пределу при $\delta_n \to 0$, с учетом (16) получаем (17).

Приведенные леммы позволяют усилить теорему из работы [1], а также следующим образом усилить теорему из работы [2].

Теорема 1. *Если система* Z_s^t *из* $G_2(H, \Omega)$ *удовлетворяет условиям* (2), (3), (5), (6), *кроме того,*

$$\forall \tau \in [0, T], \ (z_{\tau-}^{\tau})^{-1}, \ (z_{\tau}^{\tau+})^{-1} \in X(H), \tag{19}$$

и существует в $|\cdot|_4$ *не зависящий от последовательности разбиений* $\Delta_n[s, t]$ *предел*

$$\check{Y}_s^t = \lim \sum_{k=1}^{m_n} (Z_{t_{k-1}}^{t_k} - z_{t_{k-1}}^{t_k}), \tag{20}$$

то справедливо соотношение (1), *и при этом для* $\delta_n \to 0$ *имеют место равенства*

$$X_s^t = \lim \prod_{k=1}^{m_n} Z_{t_{k-1}}^{t_k} = \lim \prod_{k=1}^{m_n} (\check{Y}_{t_{k-1}}^{t_k} + z_{t_{k-1}}^{t_k}) =$$

$$= \lim \prod_{k=1}^{m_n} (\check{Y}_{t_{k-1}}^{t_k} + x_{t_{k-1}}^{t_k}) = \lim \prod_{k=1}^{m_n} (Y_{t_{k-1}}^{t_k} + I) = \lim \prod_{k=1}^{m_n} (\check{Y}_{t_{k-1}}^{t_k} + x_{t_{k-1}}^{t_k}), \tag{21}$$

$$Y_s^t = \lim \sum_{k=1}^{m_n} (X_{t_{k-1}}^{t_k} - I), \ \mathrm{Y}_s^t = \check{\mathrm{Y}}_s^t + y_s^t, \ y_s^t = D(x)_s^t, \tag{22}$$

в которых пределы понимаются в смысле $|\cdot|_4$ *и не зависят от последовательности* $\Delta_n[s, t]$.

Доказательство. В силу лемм 1, 2 теоремы из [2] и ее следствия достаточно доказать только последнее равенство в (21) и (22). Для этого рассмотрим систему $Y_s^t + I = \check{Y}_s^t + (y_s^t + I)$. Легко видеть, что она удовлетворяет всем условиям теоремы из [2]. Поэтому существуют в норме $|\cdot|_4$ и не зависят от последовательности разбиений $\Delta_n[s, t]$ пределы

$$\lim \prod_{k=1}^{m_n} (Y_{t_{k-1}}^{t_k} + I) = \lim \prod_{k=1}^{m_n} (\check{Y}_{t_{k-1}}^{t_k} + y_{t_{k-1}}^{t_k} + I), \ \check{\mathrm{Y}}_s^t =$$

$$= \lim \sum_{k=1}^{m_n} (X_{t_{k-1}}^{t_k} - y_{t_{k-1}}^{t_k} - I).$$

Еще раз воспользовавшись следствием теоремы из [2] и соотношениями (17) и (14), запишем равенства $\lim \prod_{k=1}^{m_n} (\check{Y}_{t_{k-1}}^{t_k} + x_{t_{k-1}}^{t_k}) = \lim \prod_{k=1}^{m_n} (\check{\mathrm{Y}}_{t_{k-1}}^{t_k} + (y_{t_{k-1}}^{t_k} + I)) = \lim \prod_{k=1}^{m_n} (Y_{t_{k-1}}^{t_k} + I)$, $\check{Y}_s^t = \lim \sum_{k=1}^{m_n} (X_{t_{k-1}}^{t_k} - I) - y_s^t$, из которых (21) и (22) вытекают очевидным образом.

Последующие леммы 3 и 4 можно рассматривать как симметричные предыдущим леммам 1 и 2 относительно x и y.

Лемма 3. *Если система* z_s^t *удовлетворяет условию* (6), *а также следующим условиям:*

$$\exists D(z)_s^t = y_s^t = \lim \sum_{k=1}^{m_n} (z_{t_{k-1}}^{t_k} - I), \ \delta_n \to 0, \tag{23}$$

$$\forall \tau \in [0, T] \ \exists z_{\tau-}^{\tau}, \ z_{\tau}^{\tau+} \in X(H), \ z_{\tau}^{\tau} = I, \tag{24}$$

то система y_s^t удовлетворяет (14) *и обладает свойствами*

$$\varphi(t) = \sup_{\Delta[s,t]} \sum_{k=1}^{m_n} | y_{t_{k-1}}^{t_k} |_2 < \infty, \tag{25}$$

$$\forall t \in [0, T] : y_{t-}^t = z_{t-}^t - I,\ y_t^{t+} = z_t^{t+} - I. \tag{26}$$

Доказательство. Свойство (25) вытекает из очевидного при $\delta_r \to 0$ соотношения $\sum_{k=1}^{m_n} | y_{t_{k-1}}^{t_k} |_2 = \sum_{k=1}^{m_n} \lim \left| \sum_{i=1}^{r_k} (z_{s_{i-1}}^{s_i} - I)_2 \right|_2 \leqslant \sum_{k=1}^{m_n} V_{t_{k-1}}^{t_k} \leqslant V_s^t$. Далее из условия (23) следует, что y_s^t удовлетворяет уравнению (14). Поэтому $\forall t \in [0, T]$ существуют пределы y_{t-}^t, y_t^{t+}, так как в противном случае (например для первого из них) существовала бы такая последовательность $t_n \uparrow t$ и $\varepsilon > 0$, что выполнялось бы неравенство $| y_{t_n}^{t_{n+1}} |_2 = |y_{t_n}^t - y_{t_{n+1}}^t |_2 > \varepsilon$, а это противоречит (25).

Теперь рассмотрим $\tilde{y}_s^t = \lim \sum_{k=1}^{m_n-1} (z_{t_{k-}}^{t_k} - I)$. Из условий (23) и (24) вытекает, что справедливо равенство $y_s^t = \tilde{y}_s^t + (z_{t-}^t - I)$. Если покажем, что $\forall t \in [0, T]\ \tilde{y}_{t-}^t = 0$, то, перейдя в нем к пределу при $s \uparrow t$, сможем получить первое из равенств (26). Второе доказывается аналогично.

Итак, осталось показать, что $\tilde{y}_{t-}^t = 0$. Предположим противное. Пусть найдется такая последовательность $t_m \uparrow t$ и $\varepsilon > 0$, что $| y_{t_m}^t |_2 > \varepsilon$. Но тогда существует разбиение $\Delta_{r_m}[t_m, t] = \{t_m = s_0 \leqslant s_1 \leqslant \ldots \leqslant s_{r_m} = t\}$, для которого $\left| \tilde{y}_{t_m}^t - \sum_{i=1}^{r_m-1} (z_{s_{i-1}}^{s_i} - I) \right|_2 < \frac{\varepsilon}{2}$. Отсюда получаем $V_{t_m}^{s_{r_m-1}} \geqslant \sum_{i=1}^{r_m-1} |z_{s_{i-1}}^{s_i} - I |_2 \geqslant \left| \sum_{i=1}^{r_m-1} (z_{s_{i-1}}^{s_i} - I) \right|_2 \geqslant \frac{\varepsilon}{2}$, что противоречит равенству $V_{t-}^{t-} = 0$ (доказанному в лемме 1). Значит $\tilde{y}_{t-}^t = 0$.

Лемма 4. *Если в условиях леммы* 3 *выполняется* (5), *то существует и не зависит от последовательности* $\Delta_n[s, t]$ *предел* $D^{-1}(y)_s^t = x_s^t = \lim \sum_{k=1}^{m_n} (y_{t_{k-1}}^{t_k} + I)$, $\delta_n \to 0$, *который удовлетворяет соотношениям* (7), (11), (16) — (18), *и следующему равенству*: $D(x)_s^t = \lim \sum_{k=1}^{m_n} (x_{t_{k-1}}^{t_k} - I) = y_s^t$, $\delta_n \to 0$.

Доказательство вытекает непосредственно из результатов работы [4] и доказательства (17) в лемме 2.

Лемма 5. *Если в условиях леммы* 4 *выполняется соотношение*

$$\sum_{k=1}^{m_n} | z_{t_{k-1}}^{t_k} - I - y_{t_{k-1}}^{t_k} |_2 \to 0, \quad \delta_n \to 0, \tag{27}$$

то существует и не зависит от последовательности разбиений Δ $[s, t]$ *предел* (2) *и при этом справедливо* (3).

Тем самым лемма 5 определяет достаточные условия для справедливости условия 3 в [1].

Доказательство. В силу свойств (6) и (25) справедлива оценка

$$\sup_k \left| \prod_{i=1}^{k} z_{t_{i-1}}^{t_i} - \prod_{i=1}^{k} (y_{t_{k-1}}^{t_k} + I) \right|_2 = \sup_k \left| \sum_{j=1}^{k} \prod_{i=1}^{j-1} z_{t_{i-1}}^{t_i} (z_{t_{j-1}}^{t_j} - \right.$$

$$- I - y^{t_j}_{t_{j-1}}) \prod_{i=j+1}^{k} (y^{t_i}_{t_{i-1}} + I) \Big|_2 \leqslant \sup_k \sum_{j=1}^{k} \prod_{i=1}^{j-1} (| z^{t_i}_{t_{i-1}} -$$

$$- I |_2 + I) | z^{t_j}_{t_{i-1}} - I - y^{t_j}_{t_{j-1}} \Big|_2 \prod_{i=j+1}^{k} (| y^{t_i}_{t_{i-1}} |_2 + I) \leqslant$$

$$\leqslant \exp \{ V^t_s + \varphi(t) - \varphi(s) \} \sum_{k=1}^{m_n} | z^{t_k}_{t_{k-1}} - I - y^{t_k}_{t_{k-1}} |_2,$$

переходя к пределу в которой при $\delta_n \to 0$ с учетом условия (27) получаем равенство (2) и свойство (3).

Лемма 5 позволяет получить достаточные условия на систему Z^t_s, при которых справедливо соотношение (1). Приведем их в виде следующей теоремы.

Теорема 2. *Если система Z^t_s из $G_2(H, \Omega)$ удовлетворяет условиям* (5), (6), (19), (20), (23), (27), *то справедливы соотношения* (1), (21) (22), *а так же равенства*

$$Y^t_s = \lim \sum_{k=1}^{m_n} (X^{t_k}_{t_{k-1}} - I) = \lim \sum_{k=1}^{m_n} (Z^{t_k}_{t_{k-1}} - I), \quad y^t_s = D(z)^t_s = D(x)^t_s. \quad (28)$$

Лемма 5 позволяет также определить достаточные условия на системы $z^s_t(i)$ для того, чтобы система $z^t_s = z^t_s(1)\, z^t_s(2)$ удовлетворяла условиям (2) и (3) и, следовательно, предоставляет возможность уточнить теорему из работы [3].

Для этого понадобится один простой вспомогательный результат, который сформулируем в виде следующей леммы.

Лемма 6. *Если системы $y_s(i)$, $i = 1, 2$, удовлетворяют условиям* (14) *и* (25), *а также условию согласованной регулярности* $\forall \tau \in [0, T]$: $0 = y^{\tau}_{\tau-}(1) = y^{\tau}_{\tau-}(2) \vee y^{\tau+}_{\tau}(1) = y^{\tau+}_{\tau}(2) = 0$, *то существуют и не зависят от последовательности разбиений $\Delta_n[s, t]$ пределы*

$$(y(1) \boxplus y(2))^t_s = \lim \sum_{k=1}^{m_n} y^{t_k}_{t_{k-1}}(1)\, y^{t_k}_{t_{k-1}}(2) = y^t_s,$$

$$(y(2) \boxplus y(1))^t_s = \lim \sum_{k=1}^{m_n} y^{t_k}_{t_{k-1}}(2)\, y^{t_k}_{t_{k-1}}(1) = \overline{y}^t_s,$$

которые удовлетворяют условиям (14), (25) *и* (18) *и называются смешанными суммами систем $y^t_s(i)$ в указанном порядке.*

Доказательство этой леммы содержится в работе [6].

Лемма 7. *Если системы $z^t_s(i)$, $i = 1, 2$, удовлетворяют условиям леммы* 5 (6), (23), (27) *и следующему условию согласованной регулярности:* $\forall \tau \in [0, T] : z^{\tau}_{\tau-}(1) = z^{\tau}_{\tau-}(2) = I \vee z^{\tau+}_{\tau}(1) = z^{\tau+}_{\tau}(2) = I$, *то для системы $z^t_s = z^t_s(1)\, z^t_s(2)$ также справедливы условия леммы* 5.

Доказательство. В силу лемм 5 и 6 определена смешанная сумма $y^t_s = (y(1) \boxplus y(2))^t_s$, удовлетворяющая условиям (18), (14) и (25). Причем, $\forall \tau \in [0, T]$ $y^{\tau}_{\tau-} = y^{\tau}_{\tau-}(1) = y^{\tau}_{\tau-}(2) = z^{\tau}_{\tau-} - I = z^{\tau}_{\tau-}(1) - I = z^{\tau}_{\tau-}(2) - I = 0 \vee y^{\tau+}_{\tau} = y^{\tau+}_{\tau}(1) = y^{\tau+}_{\tau}(2) = z^{\tau+}_{\tau} - I = z^{\tau+}_{\tau}(1) - I = z^{\tau+}_{\tau}(2) - I = 0$. Поэтому для доказательства леммы 7 достаточно показать, что при $\delta_n \to 0$ справедливо соотношение

$$\lim \sum_{k=1}^{m_n} | z^{t_k}_{t_{k-1}} - I - y^{t_k}_{t_{k-1}} - y^{t_k}_{t_{k-1}}(1) - y^{t_k}_{t_{k-1}}(2) |_2 \to 0, \quad (29)$$

из которого с учетом леммы 6 условия леммы 5 для системы z_s вытекают очевидным образом

Перепишем сумму, входящую в левую часть (29) в виде

$$\sum_{k=1}^{m_n} |(z_{t_{k-1}}^{t_k}(1) - I)(z_{t_{k-1}}^{t_k}(2) - I) + (z_{t_{k-1}}^{t_k}(1) - I) + (z_{t_{k-1}}^{t_k}(2) - I) -$$

$$- y_{t_{k-1}}^{t_k}(1) - y_{t_{k-1}}^{t_k}(2) - (y(1) \boxplus y(2))_{t_{k-1}}^{t_k}|_2 \leqslant \sum_{k=1}^{m_n} |z_{t_{k-1}}^{t_k}(1) - I -$$

$$- y_{t_{k-1}}^{t_k}(1)|_2 + \sum_{k=1}^{m_n} |z_{t_{k-1}}^{t_k}(2) - I - y_{t_{k-1}}^{t_k}(2)|_2 + \sum_{k=1}^{m_n} |(z_{t_{k-1}}^{t_k}(1) - I -$$

$$- y_{t_{k-1}}^{t_k}(1)|_2 |z_{t_{k-1}}^{t_k}(2) - I|_2 + \sum_{k=1}^{m_n} |y_{t_{k-1}}^{t_k}(1)|_2 |z_{t_{k-1}}^{t_k}(1) - I - y_{t_{k-1}}^{t_k}(2)|_2 +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m_n} |y_{t_{k-1}}^{t_k}(1) y_{t_{k-1}}^{t_k}(2) - (y(1) \boxplus y(2))_{t_{k-1}}^{t_k}|_2.$$

По условию, все слагаемые кроме последнего в правой части этого неравенства стремятся к нулю при $\delta_n \to 0$. Последнее слагаемое также стремится к нулю в силу соотношения (5) из работы [6].

Следствие 1.

$$D(z(1)z(2))_s^t = y_s^t(1) + y_s^t(2) + (y(1) \boxplus y(2))_s^t. \tag{30}$$

Опираясь на лемму 7 и теорему 2, уточним теорему из работы [3].

Теорема 3. *Если независимые σ_s^t-измеримые системы $Z_s^t(i)$, $i = 1, 2$, из $G_2(H, \Omega)$ удовлетворяют условиям* (6), (19), (20), (23), (27) *и следующему условию согласованной регулярности: $Z_{\tau-}^{\tau}(1) = Z_{\tau-}^{\tau}(2) = I \vee \vee Z_{\tau}^{\tau+}(1) = Z_{\tau}^{\tau+}(2) = I$, то для системы $Z_s^t = Z_s^t(1) Z_s^t(2)$ справедливы соотношения* (1), (21), (22), (28), *которые при $\delta_n \to 0$ принимают вид*

$$X_s^t = (Z(1) \boxtimes Z(2))_s^t = \lim \prod_{k=1}^{m_n} (\check{Y}_{t_{k-1}}^{t_k} + (z(1) \boxtimes z(2))_{t_{k-1}}^{t_k}) =$$

$$= \lim \prod_{k=1}^{m_n} (\check{Y}_{t_{k-1}}^{t_k} + (x(1) \boxtimes x(2))_{t_{k-1}}^{t_k}) = \lim \prod_{k=1}^{m_n} (Y_{t_{k-1}}^{t_k} + I),$$

$$Y_s^t = \lim \sum_{k=1}^{m_n} ((Z(1) \boxtimes Z(2))_{t_{k-1}}^{t_k} - I) = \lim \sum_{k=1}^{m_n} (Z_{t_{k-1}}^{t_k}(1) Z_{t_{k-1}}^{t_k}(2) - I)$$

где $Y_s^t = \check{Y}_s^t + y_s^t$, $Y_s^t(i) = \check{Y}_s^t(i) + y_s^t(i)$, $\check{Y}_s^t = \check{D}(Z(1)Z(2))_s^t$ $\check{Y}_s^t(i) = \check{D}(Z(i))_s^t$, $y_s^t(i) = D(z(i))_s^t$, $x_s^t(i) = D^{-1}(y(i))_s^t$, $i = 1, 2$. *Кроме того, выполняются равенства*

$$Y_s^t = Y_s^t(1) + Y_s^t(2) + (Y(1) \boxplus Y(2))_s^t, \tag{31}$$

$$(Z(1) \boxtimes Z(2))_s^t = (Z(1) \boxtimes (\check{Y}(2) + + z(2))_s^t =$$

$$= ((\check{Y}(1) + z(1)) \boxtimes (\check{Y}(2) + z(1)))_s^t = ((\check{Y}(1) + z(1)) \boxtimes Z(2))_s^t. \tag{32}$$

Доказательство. Легко проверить, что из условий теоремы вытекают все условия теоремы 2 для системы $Z_s^t = Z_s^t(1) Z_s^t(2)$ кроме (20). Далее, условия (6), (23) и (27) очевидно влекут выполнение условий (11), (12) теоремы из [3], которые, в частности, обеспечивают выполнение условия (20) для системы $Z_s^t(1) Z_s^t(2)$.

Формулу (31) легко получить из формулы (20) работы [3] и (30).

Для доказательства первого из равенств (32) рассмотрим систему $Z_s^t(1)(\check{Y}_s^t(2)+z_s^t(2))$. Легко видеть, что математическое ожидание данной системы равно $z_s^t(1)\,z_s^t(2)$. Покажем, что ее инфинитезимальная система совпадает с инфинитезимальной системой для $Z_s^t(1)\,Z_s^t(2)$. Для этого в силу условий (6) и (20) для $Z_s^t(i)$ оценим разность

$$\Big|\sum_{k=1}^{m_n}(Z_{t_{k-1}}^{t_k}(1)(\hat{Y}_{t_{k-1}}^{t_k}(2)+z_{t_{k-1}}^{t_k}(2))-z_{t_{k-1}}^{t_k}(1)\,z_{t_{k-1}}^{t_k}(2)-$$

$$-\Big(\sum_{k=1}^{m_n}(Z_{t_{k-1}}^{t_k}(1)\,Z_{t_{k-1}}^{t_k}(2)-z_{t_{k-1}}^{t_k}(1)\,z_{t_{k-1}}^{t_k}(2))\Big|_4^2=\Big|\sum_{k=1}^{m_n}Z_{t_{k-1}}^{t_k}(1)\times$$

$$\times(z_{t_{k-1}}^{t_k}(2)-z_{t_{k-1}}^{t_k}(2)-\check{Y}_{t_{k-1}}^{t_k}(2))\Big|_4^2\leqslant 2\Big|\sum_{k=1}^{m_n}(Z_{t_{k-1}}^{t_k}-z_{t_{k-1}}^{t_k})\times$$

$$\times(Z_{t_{k-1}}^{t_k}(2)-z_{t_{k-1}}^{t_k}(2)-\check{Y}_{t_{k-1}}^{t_k}(2))\Big|_4^2+2\Big|\sum_{k=1}^{m_n}z_{t_{k-1}}^{t_k}(1)(Z_{sk-1}^{t_k}(2)-$$

$$-z_{t_{k-1}}^{t_k}(2)-\check{Y}_{t_{k-1}}^{t_k}(2)\Big|_4^2\leqslant 2\Big(\sum_{k=1}^{m_n}|Z_{t_{k-1}}^{t_k}(1)-z_{t_{k-1}}^{t_k}(1)|_4^2\times$$

$$\times\Big(\sum_{k=1}^{m_n}|Z_{t_{k-1}}^{t_k}(2)-z_{t_{k-1}}^{t_k}(2)-\check{Y}_{t_{k-1}}^{t_k}(2)|_4^2\Big)+2\sum_{k=1}^{m_n}|z_{t_{k-1}}^{t_k}(1)(Z_{t_{k-1}}^{t_k}(2)-$$

$$-z_{t_{k-1}}^{t_k}(2)-\check{Y}_{t_{k-1}}^{t_k}(2))|_4^2\leqslant 2\Big|\sum_{k=1}^{m_n}(Z_{t_{k-1}}^{t_k}(1)-z_{t_{k-1}}^{t_k}(1))\Big|_4^2\times$$

$$\times\Big|\sum_{k=1}^{m_n}(Z_{t_{k-1}}^{t_k}(2)-z_{t_{k-1}}^{t_k}(2))-\check{Y}_s^t(2)\Big|_4^2+2\sup_k|z_{t_{k-1}}^{t_k}(1)|_2^2\times$$

$$\times\Big|\sum_{k=1}^{m_n}(Z_{t_{k-1}}^{t_k}(2)-z_{t_{k-1}}^{t_k}(2))-\check{Y}(2)\Big|_4^2\to 0,\quad \delta_n\to 0,$$

На основании теоремы из работы [2] (см. (1)) получаем первое из равенств (32). Второе получается аналогично из оценки

$$\Big|\sum_{k=1}^{m_n}(Z_{t_{k-1}}^{t_k}(1)(\check{Y}_{t_{k-1}}^{t_k}(2)+z_{t_{k-1}}^{t_k}(2))-\sum_{k=1}^{m_n}(\check{Y}_{t_{k-1}}^{t_k}(1)+z_{t_{k-1}}^{t_k}(1))(\check{Y}_{t_{k-1}}^{t_k}(2)+$$

$$+z_{t_{k-1}}^{t_k}(2))\Big|_4^2=\Big|\sum_{k=1}^{m_n}(Z_{t_{k-1}}^{t_k}(1)-z_{t_{k-1}}^{t_k}(1)-\check{Y}_{t_{k-1}}^{t_k}(1))(\check{Y}_{t_{k-1}}^{t_k}(2)+$$

$$+z_{t_{k-1}}^{t_k}(2))\Big|_4^2\leqslant 2|\check{Y}_s^t(2)|_4^2\sum_{k=1}^{m_n}(Z_{t_{k-1}}^{t_k}(1)-z_{t_{k-1}}^{t_k}(1))-\check{Y}_s^t(1)|_4^2+$$

$$+2\sup_k|z_{t_{k-1}}^{t_k}(2)|_2^2\Big|\sum_{k=1}^{m_n}(Z_{t_{k-1}}^{t_k}(1)-z_{t_{k-1}}^{t_k}(1))-\check{Y}_s^t(1)\Big|_4^2.$$

третье вытекает из соображений симметрии.

Следствие 2. *Воспользовавшись леммой 7 и теоремой 2, несложно показать, что в равенствах* (32) *системы* $z_s^t(i)$ *можно заменить на* $y_s^t(i)+1$ *или* $x_s^t(i)$. *В частности, равенства* (32) *можно представить в сле-*

дующем виде

$$(Z(1) \boxtimes Z(2))_s^t = (Z(1) \boxtimes (Y(2) + I))_s^t = ((Y(1) + I) \boxtimes (Y(2) + I))_s^t =$$
$$= ((Y(1) + I) \boxtimes Z(2))_s^t = (x(1) \boxtimes x(2))_s^t = (x(1) \boxtimes (Y(2) + I))_s^t =$$
$$= ((Y(1) + I) \boxtimes x(2))_s^t.$$

1. *Буцан Г. П., Козаченко М. Ю.* Предельные теоремы для параметрических стохастических операторных систем // Укр. мат. журн.— 1988.— **40**, № 2.— С. 153—162.
2. *Буцан Г. П., Козаченко М. Ю.* Представление параметрических операторных стохастических систем с помощью их инфинитезимальных систем // Укр. мат. журн.— 1989.— **41**, № 5.— С. 597—602.
3. *Буцан Г. П., Козаченко М. Ю.* Смешанное произведение операторных стохастических систем с прогнозируемыми скачками // Укр. мат. журн.— 1989.— **41**, № 7.— С. — .
4. *Каратаева Т. В., Буцан Г. П.* Об изоморфизме мультипликативных и аддитивных параметрических полугрупп без условий непрерывности // Укр. мат. журн.— 1985.— **37**, № 2.— С. 168—175.
5. *Буцан Г. П.* Необходимое и достаточное условие существования интеграла Стильтьеса для функций ограниченной вариации // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1984.— № 12.— С. 3—6.
6. *Каратаева Т. В.* О смешанном произведении эволюционных мультипликативных систем без условий непрерывности // Укр. мат. журн.— 1987.— **39**, № 4.— С. 444—450.

Ин-т математики АН УССР, Киев Получено 14.04.88