УДК 517.95

В. Н. Гусаков, С. П. Дегтярев

Существование гладкого решения в одной задаче фильтрации

Настоящая работа посвящена изучению краевой задачи с неизвестной границей, описывающей процесс трехмерной нестационарной фильтрации двух флюидов в пористой среде [1—5] в предположении, что плотности этих флюидов практически не зависят от давления и, следовательно, являются постоянными величинами. Это условие может быть принято в хорошем приближении при описании, например, процесса фильтрации двух несмешивающихся несжимаемых жидкостей (вода, нефть), при вытеснении жидкости селикатным раствором и т. д.

1. Пусть Ω — двухсвязная область в R^3 с границей $\partial\Omega = \Gamma^+ \cup \Gamma^-$, где $\Gamma^\pm$ — гладкие замкнутые поверхности без самопересечений; Γ_τ, $\tau \in [0,T]$,— гладкая замкнутая поверхность без самопересечений, разделяющая Ω на две двухсвязные области $\Omega_\tau^\pm$, при этом $\partial\Omega_\tau^\pm = \Gamma_\tau \cup \Gamma^\pm$.

В областях $\Omega_\tau^\pm$ рассмотрена следующая краевая задача для определения давлений $p^\pm(y,\tau)$ и поверхностей Γ_τ ($\Gamma_0 \equiv \Gamma$ — заданная поверхность):

$$\Delta p^\pm(y,\tau) = 0, \quad y \in \Omega_\tau^\pm, \tag{1}$$

$$p^+|_{\Gamma_\tau} = p^-|_{\Gamma_\tau}, \tag{2}$$

$$k/\mu^+ (\nabla p^+, \vec{N})|_{S_T} = k/\mu^- |(\nabla p^-, \vec{N})|_{S_T} = m\cos(\vec{N},\tau), \tag{3}$$

$$p^\pm|_{\Gamma_\tau^\pm} = q^\pm(y,\tau), \tag{4}$$

$$p^\pm(y,0) = p_0^\pm(y), \quad y \in \Omega^\pm, \tag{5}$$

где $S_T = \{(y,\tau): y \in \Gamma_\tau, \ \tau \in [0,T]\}$ — поверхность в $R^3 \times [0,T]$, $\vec{N}$ — нормаль к S_T, направленная в сторону Ω_τ^+; m, k, $\mu^\pm$ — соответственно пористость, проницаемость среды и вязкости флюидов — заданные положительные постоянные величины; $p_0^\pm(y)$ — заданные функции, удовлетворяющие соотношениям

$$\partial p_0^-/\partial\vec{n} - \partial p_0^+/\partial\vec{n} \geqslant \varepsilon_0 > 0, \quad \nabla^2 p_0^\pm(y) = 0, \quad y \in \Omega^\pm, \tag{6}$$

второе из которых — условие согласования для $p_0^\pm(y)$, вытекающее из (1) — (5) в силу постоянства плотностей, а $\vec{n}$ — нормаль к Γ, направленная в сторону Ω^+ ($\Omega_0^\pm \equiv \Omega^\pm$).

Введем следующие обозначения: $Q_T = \Omega \times (0, T)$, $\hat{H}^{l+\alpha, \frac{l+\alpha}{2}}(\bar{Q}_T)$, $\tilde{H}^{2+\alpha, \frac{2+\alpha}{2}}(\bar{Q}_T)$, $H^{l+\alpha,\alpha/2}(\bar{Q}_T)$, $l = 0, 1, 2,$ — банаховы пространства функций $u(y, \tau)$, образующиеся замыканием множества c^∞ соответственно в нормах

$$|u|_{Q_T}^{\{l+\alpha\}} = |u|_{Q_T}^{(2+\alpha)} + \sum_{|s|}^{2l} «D^s u»_{Q_T}^{\alpha,\alpha/2}, \quad |u|_{Q_T}^{[2+\alpha]} \equiv |u|_{Q_T}^{(2+\alpha)} + |u_{y,\tau}|_{Q_T}^{(\alpha)} +$$

$$+ \sum_{s=0}^{2} «D^s u»_{Q_T}^{(\alpha,\alpha/2)}, \quad |u|_{Q_T}^{\langle l+\alpha\rangle} = \sum_{|s|\leqslant l} |D_y^s u|_{Q_T}^{(\alpha)} + \sum_{|s|\leqslant l} «D_y^s»_{Q_T}^{(\alpha,\alpha/2)}$$

где

$$«u»_{Q_T}^{(\alpha,\beta)} = \sup_{\substack{(x,t)\\(y,\tau)\in Q_T}} \frac{|u(x,t) - u(y,t) - u(x,\tau) + u(y,\tau)|}{|x-y|^\alpha |t-\tau|^\beta}.$$

Аналогично определяются указанные пространства при замене Q_T на $\bar{Q}_T^\pm = \bar{\Omega}^\pm \times [0, T]$, $\Gamma_T = \Gamma \times [0, T]$, $\Gamma_T^\pm = \Gamma^\pm \times [0, T]$.

Гладкость заданных поверхностей и функций предполагается следующей:

$$\Gamma^\pm,\ \Gamma \in c^{4+\alpha}, \quad p_0^\pm(y) \in c^{4+\alpha}(\bar{\Omega}^\pm), \quad q^\pm(y,\tau) \in H^{3+\alpha, \frac{3+\alpha}{2}}(\Gamma_T^\pm). \tag{7}$$

Также будем использовать пространства $\underset{0}{\tilde{H}}^{2+\alpha, \frac{2+\alpha}{2}}$ и $\underset{0}{H}^{2+\alpha, \alpha/2}$, где нуль внизу означает обращение в нуль при $\tau = 0$ самой функции и производной по τ, если она требуется классом Введем еще пространство $\mathscr{K}_T = H^{2+\alpha,\alpha/2}(\bar{Q}_T^+)\, H^{2+\alpha,\alpha/2}(\bar{Q}_T^-) \times \tilde{H}^{2+\alpha, \frac{2+\alpha}{2}}(\Gamma_T)$ с элементами $k = (p^+, p^-, \rho)$ и нормой $\|k\| = |p^+|_{Q_T^+}^{(2+\alpha)} + |p^-|_{Q_T^-}^{(2+\alpha)} + |\rho|_{\Gamma_T}^{[2+\alpha]}$.

2. Пусть $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ означает точку на поверхности Γ, $y(\omega)$ — соответствующую точку в R^3; $\gamma_0 > 0$ — такое число, что поверхности $\{y : y = y(\omega) + 4\vec{n}(\omega)\gamma\}$ для $0 \leqslant \gamma \leqslant \gamma_0$ не имеют самопересечений и не пересекаются с $\Gamma^\pm$; $\rho(\omega, \tau) \in \tilde{H}^{2+\alpha, \frac{2+\alpha}{2}}(\Gamma_T)$ — такая функция, что $\rho(\omega, 0) = 0$, $|\rho(\omega, \tau)| \leqslant \gamma_0$. Выполним замену переменных [6] $(y, \tau) = e_\rho(x, t)$, где

$$e_\rho(x,t) = \begin{cases} (x + \vec{n}(\omega(x))\,\rho(\omega(x), t)\,\chi_0(\lambda(x)), t), & \operatorname{dist}(x, \Gamma) \leqslant 4\gamma_0, \\ (x, t), & \operatorname{dist}(x, \Gamma) > 4\gamma_0 \end{cases} \tag{8}$$

$\omega(x)$ — проекция точки x на поверхность Γ, $\lambda(x) = \operatorname{dist}(x, \Gamma)$, $\chi_0(\lambda)$ — функция класса c^∞ такая, что $\chi_0(\lambda) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant \lambda \leqslant \gamma_0, \\ 0{,}4 & \gamma_0 \leqslant \lambda,\ |\chi_0'(\lambda)| \leqslant \dfrac{1}{2\gamma_0} \end{cases}$. Легко проверить, что $e_\rho(x, t)$ взаимно однозначно отображает поверхность Γ_T в поверхность

$$\Gamma_{\rho,T} = \{(y, \tau) : y = y(\omega) + \vec{n}(\omega)\,\rho(\omega, \tau)\}, \tag{9}$$

а области $Q_T^{\pm}$ — в области $Q_{\rho,T}^{\pm}$, заключенные между плоскостями $\{\tau=0\}$, $\{\tau=T\}$ и поверхностями $\Gamma_{\rho,T}$ и $\Gamma_T^{\pm}$ соответственно.

Предположим, что неизвестная граница в задаче (1)—(5) может быть задана формулой (9) с некоторой $\rho(\omega, \tau)$, и выполним в этой задаче замену (8). Тогда равенства (1)—(5) примут вид

$$\nabla_\rho^2 p^{\pm}(x,t) = 0, \quad x \in \Omega^{\pm},$$

$$[p^+(x,t) - p^-(x,t)]|_{x\in\Gamma} = 0,$$

$$\rho_t(\omega, t) + s(\omega, \rho, \rho_{\omega_1}, \rho_{\omega_2})\, c^{\pm} \frac{\partial p^{\pm}}{\partial \vec{n}}\Big|_{\Gamma} = 0, \tag{10}$$

$$p^{\pm}|_{\Gamma^{\pm}} = q^{\pm}(x,t),$$

$$p^{\pm}(x,0) = p_0^{\pm}(x), \quad x \in \Omega^{\pm}, \quad \rho(\omega, 0) = 0,$$

где $\nabla_\rho = E_\rho^{*-1}(x,t)\nabla$, $E_\rho(x,t)$ — матрица Якоби отображения e_ρ по переменной x, $c^{\pm} = \dfrac{k}{m\mu^{\pm}} = \mathrm{const} > 0$, $s(\omega, \rho, \rho_{\omega_1}, \rho_{\omega_2})$ — некоторая известная гладкая функция своих аргументов [6], причем

$$s(\omega, 0, 0, 0) = 1, \quad \partial s/\partial\rho_{\omega_i}(\omega, 0, 0, 0) = 0. \tag{11}$$

Введем функцию $\sigma(\omega, t)$ такую, что $\sigma(\omega, 0) = 0$, $\sigma_t(\omega, 0) = \rho^{(1)}(\omega) = -c^{\pm}\dfrac{\partial W^{\pm}}{\partial \vec{n}}\Big|_{\Gamma}$, т. е. $\rho^{(1)}(\omega) = \rho_t(\omega, 0)$. Способ построения такой функции описан в [7] и в силу предположений о достаточной гладкости начальных условий определяет функцию $\sigma(\omega, t) \in \tilde{H}^{2+\alpha_1, \frac{2+\alpha_1}{2}}(\Gamma_T)$, $\alpha_1 > \alpha$.

Кроме того, рассмотрим функцию $W^{\pm}(x,t)$ такую, что $W^{\pm}(x,0) = p_0^{\pm}(x)$, $x \in \bar{\Omega}^{\pm}$, $W^{\pm}|_{\Gamma_T^{\pm}} = q^{\pm}(x,t)$. Способ построения функций $W^{\pm}(x,t)$ тот же, что и для функции $\sigma(\omega, t)$, причем $W^{\pm}(x,t) \in H^{4+\alpha_1, \frac{4+\alpha_1}{2}}(\bar{Q}_T^{\pm}) \subset H^{4+\alpha, \frac{4+\alpha}{2}}(\bar{Q}_T^{\pm})$, $\alpha_1 > \alpha$.

Следуя [8], представляем соотношения (10) в виде

$$\nabla^2(\delta p^{\pm} - \langle\nabla W^{\pm}, \delta e_{\delta\rho}\rangle) = F^{\pm}(\delta p^{\pm}, \delta p), \quad x \in \Omega^{\pm},$$

$$\left(\delta p^+ - \frac{\partial W}{\partial \vec{n}}\delta\rho\right) - \left(\delta p^- - \frac{\partial W^-}{\partial \vec{n}}\delta\rho\right) + \left(\frac{\partial W^+}{\partial \vec{n}} - \frac{\partial W^-}{\partial \vec{n}}\right)\delta\rho = 0, \ x \in \Gamma, \tag{12}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\delta\rho + c^{\pm}\frac{\partial}{\partial \vec{n}}\left(\delta p^{\pm} - \frac{\partial W^{\pm}}{\partial \vec{n}}\delta\rho\right) = f^{\pm}(\delta p^{\pm}, \delta\rho), \quad x \in \Gamma, \quad \delta p^{\pm}|_{\Gamma_T^{\pm}} = 0,$$

$$\delta p^{\pm} \equiv p^{\pm} - W^{\pm} \in \underset{0}{H}^{2+\alpha, \alpha/2}(\bar{Q}_T^{\pm}), \quad \delta\rho \equiv \rho - \sigma \in \underset{0}{\tilde{H}}^{2+\alpha, \frac{2+\alpha}{2}}(\Gamma_T),$$

где $\delta e_\varphi(x,t) = \begin{cases} \partial x/\partial\lambda(\omega, \lambda)\,\chi_0(\lambda)\,\varphi(\omega, t), & |\lambda| \leqslant 4\gamma_0, \\ 0, & |\lambda| > 4\gamma_0. \end{cases}$

Для функций $F^{\pm}$, $f^{\pm}$ справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть* $k_i = (\delta p_i^+, \delta p_i^-, \delta\rho_i)$, $i = 1, 2 \in \mathscr{K}_T$. *Тогда справедливы неравенства*

$$|F^{\pm}(\delta p_1^{\pm}, \delta\rho_1) - F^{\pm}(\delta p_2^{\pm}, \delta\rho_2)|_{Q_T^{\pm}}^{(\alpha)} \leqslant c\left(T^{\frac{\alpha_1-\alpha}{2}} + \varepsilon(r)\right)\|k_1 - k_2\|_{\mathscr{K}_T}, \tag{13}$$

$$|f^{\pm}(\delta p_1^{\pm}, \delta\rho_1) - f^{\pm}(\delta p_2^{\pm}, \delta\rho_2)|_{\Gamma_T}^{(1+\alpha)} \leqslant c\left(T^{\frac{\alpha_1-\alpha}{2}} + \varepsilon(r)\right)\| k_1 - k_2 | \mathcal{K}_T,$$

$$|F^{\pm}(0, 0)|_{Q_T^{\pm}}^{(\alpha)} + |f^{\pm}(0, 0)|_{\Gamma_T}^{(1+\alpha)} \leqslant cT^{\frac{\alpha_1-\alpha}{2}},$$

где $\varepsilon(r) \to 0$ *при* $r \to 0$, $r = \max\limits_i \| k_i \|$.

Доказывается эта лемма с использованием достаточной гладкости начальных и граничных данных, гладкой зависимости матрицы $E_\rho(x, t)$ от ρ и того, что $F^{\pm}$ и $f^{\pm}$ содержат квадратичные по $\delta p^{\pm}$ и $\delta\rho$ члены, а также с использованием неравенств $|u|_{Q_T^{\pm}}^{(\alpha_1)} \leqslant cT^{\frac{\alpha_1-\alpha}{2}} |u|_{Q_T^{\pm}}^{(\alpha)}$, $|uv|_{Q_T^{\pm}}^{(\alpha)} \leqslant \leqslant c(|u|_{Q_T^{\pm}}^{(0)} |v|_{Q_T^{\pm}}^{(\alpha)} + |u|_{Q_T^{\pm}}^{(\alpha)} |v|_{Q_T^{\pm}}^{(0)})$.

3. Рассмотрим следующую линейную в области Q_T задачу, соответствующую задаче (12):

$$\nabla^2 U^{\pm}(x, t) = F^{\pm}(x, t), \quad x \in \Omega^{\pm}, \tag{14}$$

$$u^+ - u^- + A(x)\rho = \varphi(x, t), \quad x \in \Gamma, \tag{15}$$

$$\partial\rho/\partial t + c^{\pm}\partial u^{\pm}/\partial\vec{n} = f^{\pm}, \quad x \in \Gamma, \tag{16}$$

$$u^{\pm}|_{x\in\Gamma^{\pm}} = q^{\pm}(x, t), \tag{17}$$

$$u^{\pm}(x, 0) = u_0^{\pm}(x), \quad \rho(\omega, 0) = 0, \tag{18}$$

где $F^{\pm}(x, t) \in \hat{H}^{\alpha, \alpha/2}(\overline{Q}_T^{\pm})$, $\varphi(x, t) \in H^{2+\alpha, \alpha/2}(\Gamma_T)$, $f^{\pm}(x, t) \in H^{1+\alpha, \alpha/2}(\Gamma_T)$, $q^{\pm}(x, t) \in H^{2+\alpha, \alpha/2}(\Gamma_T^{\pm})$, $\nabla^2 u_0^{\pm}(x) = 0$, $\varepsilon_0 \leqslant A(x) \leqslant \varepsilon_0^{-1}$ $A(x) \in c^{2+\alpha}(\Gamma)$.

Лемма 2. *Для решения задачи* (14) — (18) *из класса* $u^{\pm} \in H^{2+\alpha, \alpha/2}(\overline{Q}_T^{\pm})$, $\rho \in \tilde{H}^{2+\alpha, \frac{2+\alpha}{2}}(\Gamma_T)$ *справедлива оценка*

$$|u^+|_{Q_T^+}^{(2+\alpha)} + |u^-|_{Q_T^-}^{(2+\alpha)} + |\rho|_{\Gamma_T}^{(2+\alpha)} \leqslant c(|F^+|_{Q_T^+}^{(\alpha)} + |F^-|_{Q_T^-}^{(\alpha)} + |\varphi|_{\Gamma_T}^{(2+\alpha)} +$$
$$+ |f^+|_{\Gamma_T}^{(1+\alpha)} + |f^-|_{\Gamma_T}^{(1+\alpha)} + |u_0^+|_{\Omega^+}^{(2+\alpha)} + |u_0^-|_{\Omega^-}^{(2+\alpha)}) \equiv c\mathfrak{M}(T). \tag{19}$$

Доказательство леммы проводится по следующей схеме. Не ограничивая общности, полагаем $u_0^{\pm}(x) \equiv 0$, $g^{\pm}(x, t) \equiv 0$, поскольку общий случай легко сводится к указанному заменой неизвестной функции.

Так же, как и при получении априорных оценок для эллиптических краевых задач [9], доказываем неравенство

$$|\rho|_{\Gamma_T}^{(2+\alpha)} + |u^+|_{Q_T^+}^{(2+\alpha)} + |u^-|_{Q_T^-}^{(2+\alpha)} \leqslant c\mathfrak{M}(T) + c(|u^+|_{Q_T^+}^{(0)} + \langle u^+\rangle_{t, Q_T^+}^{(\alpha/2)} +$$
$$+ |u^-|_{Q_T^-}^{(0)} + \langle u^-\rangle_{t, Q_T}^{(\alpha/2)} + |\rho|_{\Gamma_T}^{(0)} + \langle\rho\rangle_{t, \Gamma_T}^{(\alpha/2)}, \tag{20}$$

при этом используем неравенство $\langle\langle u\rangle\rangle^{(\alpha, \beta)} \leqslant \varepsilon\langle u_x\rangle_t^{(\beta)} + c_\varepsilon\langle u\rangle_t^{(\beta)}$, $\varepsilon > 0$, и точную оценку следующей модельной задачи:

$$\begin{gathered}\Delta u^{\pm} = F^{\pm} \text{ в } R^{\pm} = \{(x, t) : t \geqslant 0, \ \pm x_3 \geqslant 0\},\\ u^+ - u^- + A\rho(x_1, x_2, t) = \varphi \text{ на } R^0 \equiv R^{\pm} \cap \{x_3 = 0\},\\ \partial\rho/\partial t + c^{\pm}\partial u^{\pm}/\partial x_3 = f^{\pm} \text{ на } R^0,\end{gathered} \tag{21}$$

$$\rho \in \underset{0}{\tilde{H}}^{2+\alpha, \frac{2+\alpha}{2}}(R^0), \quad u^{\pm} \in \underset{0}{H}^{2+\alpha, \alpha/2}(R^{\pm}), \quad u^{\pm} \to 0, \quad |x_3| \to 0,$$

где $F^{\pm}$, φ, $f^{\pm}$ — финитные функции, принадлежащие, соответственно, классам $H^{2+\alpha,\alpha/2}(R^{\pm})$, $H^{2+\alpha,\alpha/2}(R^0)$, $H^{1+\alpha,\alpha/2}(R^0)$.

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 3. *Задача* (21) *имеет единственное решение, для которого справедлива оценка*

$$|u^+|_{R_T^+}^{(2+\alpha)}+|u^-|_{R_T^-}^{(2+\alpha)}+|\rho|_{R_T^0}^{[2+\alpha]}\leqslant c\{|F^+|_{R_T^+}^{(\alpha)}+|F^-|_{R_T^-}^{(\alpha)}+$$

$$+|f^+|_{R_T^0}^{(1+\alpha)}+|f^-|_{R_T^0}^{(1+\alpha)}+|\varphi|_{R_T^0}^{(2+\alpha)}\},\quad R_T^{\pm}=R^{\pm}\cap\{0\leqslant t\leqslant T\},$$

$$R_T^0=R^0\cap\{0\leqslant t\leqslant T\}. \tag{22}$$

Далее, из (14) — (18) вытекает, что функции $u^{\pm}(x,t)$ являются решениями задачи сопряжения $\Delta u^{\pm}(x,t)=F^{\pm}(x,t)$, $x\in\Omega^{\pm}$, $u^{\pm}|_{\Gamma^{\pm}}=0$, $u^+-u^-=\varphi-A(x)\rho$, $x\in\Gamma$, $a^+\partial u^+/\partial\vec{n}-a^-\partial u^-/\partial\vec{n}=f^+-f^-$, $x\in\Gamma$.

Из результатов работ [7, 9 — 11] следует

$$|u^+|_{Q_T^+}^{(1+\alpha,0)}+|u^-|_{Q_T^-}^{(1+\alpha,0)}\leqslant c\{|f^+-f^-|_{\Gamma_T}^{(1+\alpha,0)}+|F^+|_{Q_T^+}^{(\alpha,0)}+|F^-|_{Q_T^-}^{(\alpha,0)}+$$

$$+|\varphi|_{\Gamma_T}^{(2+\alpha,0)}+|\rho|_{\Gamma_T}^{(1+\alpha,0)}\}\leqslant c\mathfrak{M}(T)+cT^{1/2}|\rho|_{\Gamma_T}^{[2+\alpha]}. \tag{23}$$

Такую же оценку для $\langle u^{\pm}\rangle_{t,Q_T^{\pm}}^{(\alpha)}$ можно получить по приведенной выше схеме, рассматривая функцию $v^{\pm}(x)\equiv\dfrac{u^{\pm}(x,t)-u^{\pm}(x,\tau)}{(t-\tau)^{\alpha/2}}$ как решение соответствующей задачи сопряжения

$$\langle u^+\rangle_{t,Q_T^+}^{(\alpha/2)}+\langle u^-\rangle_{t,Q_T^-}^{(\alpha/2)}\leqslant c\mathfrak{M}(T)+T^{1/2}|\rho|_{\Gamma_T}^{[2+\alpha]}. \tag{24}$$

Из соотношений (16), (18), (19) следует

$$|u^+|_{Q_T^+}^{(2+\alpha)}+|u^-|_{Q_T^-}^{(2+\alpha)}+|\rho|_{\Gamma_T}^{[2+\alpha]}\leqslant c\mathfrak{M}(T)+cT^{1/2}|\rho|_{\Gamma_T}^{[2+\alpha]}. \tag{25}$$

Нетрудно видеть, что при $T=t_0$, $ct_0^{1/2}\leqslant 1/2$ из (25) следует оценка (19) на интервале $[0,t_0]$. Рассматривая задачу (14) — (18) на интервале времени $[t_0,T]$, видим, что (19) справедливо на $[t_0,2t_0]$ и т. д. до T.

Для доказательства разрешимости задачи (14)—(18) заметим, что, не ограничивая общности, можно считать $F^{\pm}\equiv 0$, $f^{\pm}\equiv 0$, $q^{\pm}\equiv 0$, $u_0\equiv 0$, так как общий случай сводится к указанному линейной заменой неизвестной функции. Предположим также, что $\varphi(x,t)$ бесконечно дифференцируема и финитна по t: $\operatorname{supp}\varphi\subset\{0\leqslant t\leqslant T\}$. Производя в соотношениях (14)—(18) преобразование Лапласа по t, приходим к задаче

$$\Delta\tilde{u}^{\pm}(x,p)=0, \tag{26}$$

$$\tilde{u}^{\pm}|_{\Gamma}=0, \tag{27}$$

$$a^{\pm}\partial\tilde{u}^{\pm}/\partial\vec{n}=-p\tilde{\rho},\quad x\in\Gamma, \tag{28}$$

$$\tilde{u}^+-\tilde{u}^-+A(x)\tilde{\rho}=\hat{\varphi}(x,p),\quad x\in\Gamma, \tag{29}$$

где $\tilde{u}^{\pm}(x,p)=\int\limits_0^{\infty}e^{-pt}u(x,t)\,dt$.

Пусть $G^{\pm}(x,y)$ — функции Грина для краевых задач (26) — (28). Тогда для $\tilde{u}^{\pm}(x,p)$ имеем представление $\tilde{u}^+(x,p)=p\int\limits_{\Gamma}G^+(x,y)\tilde{\rho}(y,p)\,dy$, $\tilde{u}^-(x,p)=-p\int\limits_{\Gamma}G^-(x,y)\tilde{\rho}(y,p)\,dy$.

Пользуясь этими представлениями и соотношением (29), получаем для $\tilde{\rho}(x, p)$ интегральное уравнение

$$p \int_{\Gamma} A^{-1}(x)\,[G^{+}(x, y) + G^{-}(x, y)]\,\tilde{\rho}(y, p)\,dy + \tilde{\rho}(x, p) = \tilde{\varphi}(x, p), \qquad (30)$$

причем в силу неравенств $|G^{\pm}(x, y)| \leqslant c\,|x - y|^{-1}$, $\varepsilon_0 \leqslant A(x) \leqslant \varepsilon_0^{-1}$, интегральный оператор pK в уравнении (30) вполне непрерывен из $c(\Gamma)$ в $c(\Gamma)$.

Лемма 4. *Все собственные значения оператора K вещественны и отрицательны.*

Доказательство. Предположим, что p — собственное значение оператора K, т. е. выполняется равенство (29) при $\tilde{\varphi}(x, p) \equiv 0$. Как известно, в этом случае $\rho(x, p) \in c^{\infty}(\Gamma)$, соответствующие функции $\tilde{u}^{\pm}(x, p) \in c^{\infty}(\overline{\Omega}^{\pm})$. Умножая соотношения (26) на $\tilde{u}^{\pm}(x, p)$ и $\tilde{u}^{-}(x, p)$ соответственно и интегрируя по частям, получаем $\int\limits_{\Omega^{\pm}} |\nabla \tilde{u}^{\pm}|^2 dx = \pm p \dfrac{1}{a^{\pm}} \times \int\limits_{\Gamma} \tilde{\rho}\,\tilde{u}^{\pm} dx.$

Умножая эти соотношения на $a^{\pm}$ и складывая, находим

$$\int\limits_{\Omega^{+}\cup\Omega^{-}} a^{\pm}\,|\nabla \tilde{u}^{\pm}|^2\,dx = p \int\limits_{\Gamma} \tilde{\rho}(x, p)\,(\tilde{u}^{+} - \tilde{u}^{-})\,dx.$$

Пользуясь соотношением (29), получаем

$$\int\limits_{\Omega^{+}\cup\Omega^{-}} a^{\pm}\,|\nabla \tilde{u}^{\pm}|^2\,dx = p \int\limits_{\Gamma} \tilde{\rho}\,(\tilde{u}^{+} - \tilde{u}^{-})\,dx = -p \int\limits_{\Gamma} \tilde{\rho}^2(x, p)\,A(x)\,dx,$$

откуда легко следует справедливость леммы.

Из приведенной леммы вытекает, что при $\mathrm{Re}\,p \geqslant 0$ уравнение (29) имеет единственное решение, причем $\tilde{\rho}(x, p) = (I + pK)^{-1}\,\tilde{\varphi}(x, p)$.

Нетрудно видеть, что в силу известных свойств резольвенты и преобразования Лапласа в последнем равенстве можно осуществить обратное преобразование, что дает функцию $\rho(x, t)$, причем если множество функций $\varphi(x, t)$, для которых это преобразование возможно плотно в c^{∞}, и принадлежит классу c^{∞}, то $\rho(x, t)$, а следовательно, и $u^{\pm}(x, t)$ также принадлежат этому же классу. Из изложенного выше следует доказательство леммы.

Теорема 1. *Линейная задача* (14)—(18) *имеет единственное решение, для которого справедлива оценка* (19).

Доказательство этого утверждения проведено с помощью сглаживания данных задачи и предельного перехода с учетом априорной оценки (19).

4. Рассмотрим оператор G, который каждому элементу $k = (\delta p^{+}, \delta p^{-}, \delta\rho) \in B_r \subset \mathscr{K}_T$ ставит в соответствие элемент $\tilde{k} = (\tilde{\delta} p^{+}, \tilde{\delta} p^{-}, \tilde{\delta}\rho)$ из того же пространства, в котором $\tilde{\delta} p^{+}, \tilde{\delta} p^{-}, \tilde{\delta}\rho$ получаются как решение задачи (12) с заданными $\delta p^{+}, \delta p^{-}, \delta\rho$ в правых частях соотношений (12), B_r — шар радиуса r с центром в нуле. Из леммы 1 и теоремы 1 следует, что оператор G обладает свойствами ($k_1, k_2 \in \mathscr{K}_T$)

$$\begin{gathered} \| G(k_1) - G(k_2) \|_{\mathscr{K}_T} \leqslant c\,(T^{\frac{\alpha_1 - \alpha}{2}} + \varepsilon(r))\,\| k_1 - k_2 \|_{\mathscr{K}_T}, \\ \| G(0) \|_{\mathscr{K}_T} \leqslant c T^{\frac{\alpha_1 - \alpha}{2}}. \end{gathered} \qquad (31)$$

Из (31) видно, что, выбирая r и T достаточно малыми, можно добиться выполнения неравенств $\| G(k_1) - G(k_2) \|_{\mathscr{K}_T} \leqslant 1/2 \| k_1 - k_2 \|_{\mathscr{K}_T}$, $\| G(0) \| \leqslant 1/2r$.

А это означает, что оператор G переводит шар B_r в себя и является сжимающим. Единственная неподвижная точка этого оператора в B_r является, очевидно, решением задачи (12) и, следовательно, задачи (1)—(5). Таким образом, имеет место следующий основной результат.

Теорема 2. *При сделанных в п. 1 предположениях существует* $T_0 = T_0(\Gamma^{\pm}, \Gamma, \alpha_1, \alpha, \varepsilon_0, |p_0^{\pm}|_{\Omega^{\pm}}^{(4+\alpha)})$ *такое, что при* $0 < T \leqslant T_0$ *задача* (1) — (5) *имеет гладкое решение, причем свободная граница* $\Gamma_{\rho,T}$ *принадлежит классу* $\tilde{H}^{2+\alpha, \frac{2+\alpha}{2}}$, *а* $p^{\pm} \in H^{2+\alpha, \alpha/2}(\bar{Q}^{\pm}_{\rho,T})$.

1. *Muskat M.* The flow of homogeneous fluids through porous media.— New York : Mebrane-Hill, 1937.— 436 p.
2. *Веригин Н. Н.* Об одном классе гидромеханических задач для областей с подвижными границами // Динамика жидкости со свобод. границами.— Новосибирск, 1980.— С. 23—33.
3. *Данилюк И. И.* Нестационарная фильтрация дисперсной системы двух баротропных сред // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1985.— N 1.— С. 14—18.
4. *Данилюк И. И.* О совместной нестационарной фильтрации газа и дисперсной системы баротропных сред // Там же.— № 11.— С. 9—13.
5. *Мейрманов А. М.* Задача о продвижении поверхности контактного разрыва при фильтрации несмешивающихся сжимаемых жидкостей // Сиб. мат. журн.— 1982.— **23**, № 1.— С. 85—103.
6. *Hanzawa Ei-Icsh.* Classical Solutions of the Stefan problem // Tohoky Math. J.— 1981.— **33**.— P. 297—335.
7. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.— М. : Наука, 1967.— 736 с.
8. *Дегтярев С. П.* О классической разрешимости многомерной конвективной задачи Стефана.— Донецк, 1985.— 10 с.— Деп. в Укр. НИИНТИ, № 1648-85.
9. *Ладыженская О. П., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа.— М. : Наука, 1973.— 476 с.
10. *Ладыженская О. А., Ривкинд В. Я., Уральцева Н. Н.* О классической разрешимости задач дифракции для уравнений эллиптического и параболического типов // Тр. Мат. ин-та АН СССР.— 1966.— **92**.— С. 116—146.
11. *Олейник О. А.* Краевые задачи для линейных уравнений эллиптического и параболического типа с разрывными коэффициентами // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1961.— **25**.— С. 9—20.

Ин-т прикл. математики и механики АН УССР,
Донецк

Получено 28.05.87