УДК 517.5

А. И. Степанец, Е. И. Жукина

Обратные теоремы приближения (ψ, β)-дифференцируемых функций

В настоящей статье устанавливается связь между последовательностями наилучших приближений непрерывных 2π-периодических функций $f(x)$, $f \in C$, тригонометрическими полиномами порядка $n-1$: $E_n(f) = \inf_{n-1} \| f(x) - t_{n-1}(x) \|_C$ и свойствами их (ψ, β)-производных $f_\beta^\psi(x)$ [1].

Полученные здесь утверждения распространяют на случай обобщенного (ψ, β)-дифференцирования известные результаты С. Б. Стечкина [2], а также результатов А. А. Конюшкова [3], являющиеся аналогами результатов С. Б. Стечкина для пространств L_p.

Для формулировки основных результатов работы потребуются следующие определения.

Обозначим через $\mathfrak{M}$ множество функций $\psi(v)$, выпуклых вниз при всех $v \geqslant 1$ и удовлетворяющих условию $\lim\limits_{v \to \infty} \psi(v) = 0$.

Каждой функции $\psi \in \mathfrak{M}$ поставим в соответствие функции $\eta(t) = \eta(\varphi, t) = \psi^{-1}(\psi(t)/2)$ и $\mu(t) = \mu(\psi, t) = t/(\eta(t) - t)$ и положим $\mathfrak{M}_c = \{\psi \in \mathfrak{M} : K_1 \leqslant \mu(\psi; t) \leqslant K_2, \ K_1, \ K_2 > 0\}$, $\mathfrak{M}_\infty = \{\psi \in \mathfrak{M} : \mu(\psi, t) \uparrow \infty\}$, $\mathfrak{M}'_\infty = \{\psi : \psi \in \mathfrak{M}_\infty, \ \eta(t) - t \geqslant K_3 > 0 \ \forall t > 1\}$.

В принятых обозначениях справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* $f \in C$, $\psi \in \mathfrak{M}_c \cup \mathfrak{M}'_\infty$ *и, кроме того,* $\Delta^2(1/\psi(n)) = 1/\psi(n+1) - 2/\psi(n) + 1/\psi(n-1) \geqslant 0$. *Тогда, если ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} E_k(f) (\psi(k)(\eta(k) - k))^{-1} \tag{2}$$

сходится, то $\forall \beta \in R$ *существует непрерывная производная* $f_\beta^\psi(x)$, для *которой*

$$E_n(f_\beta^\psi) \leqslant K_1 \left\{ E_n(f)/\psi(n) + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} E_\nu(f)\,\psi(\nu)\,(\eta(\nu)-\nu))^{-1} \right\},\ n = 1, 2, \ldots \tag{3}$$

и для любого натурального k

$$\omega_k(f_\beta^\psi, n^{-1}) \leqslant K_2 \Big\{ n^{-k} \sum_{\mu=1}^{n} \nu^k E_k(f)\,(\psi(\nu)\,(\eta(\nu)-\nu))^{-1} +$$

$$+ \sum_{\nu=n+1}^{\infty} E_\nu(f)\,(\psi(\nu)\,(\eta(\nu)-\nu))^{-1} \Big\}, \tag{4}$$

K_1 *и* K_2 — *постоянные, которые могут зависеть только от функции* $\psi(\cdot)$ *и* k. $(f_\beta^\psi; \cdot)$-k-й модуль непрерывности функции $f_\beta^\psi(\cdot)$.

Заметим, что если функция $\psi \in \mathfrak{M}_0$, то найдутся положительные постоянные K_1 и K_2 такие, что $\forall t \geqslant 1$ $K_1 t \leqslant \eta(t) - t \leqslant K_2 t$. В этом случае сходимость ряда (2) равносильна сходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} E_k(f)\,(\psi(k)\,k)^{-1}, \tag{5}$$

и тогда неравенства (3) и (4) можно переписать в виде

$$E_n(f_\beta^\psi) \leqslant K_3 \left\{ E_n(f)/\psi(n) + \sum_{k=n+1}^{\infty} E_k(f)\,(\psi(k)\,k)^{-1} \right\}, \tag{6}$$

$$\omega_k(f_\beta^\psi, n^{-1}) \leqslant K_4 \left\{ n^{-k} \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k-1} E_\nu(f)\,[\psi(\nu)]^{-1} + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} E_\nu(f)\,(\psi(\nu)\,\nu)^{-1} \right\}. \tag{7}$$

Отсюда, в частности, следует, что при $\psi(k) = k^{-r}$ и $\beta = r$ утверждение теоремы 1 совпадает с упомянутым выше результатом С. Б. Стечкина.

Введем еще следующие обозначения. Пусть $f \in C$ и $\bar\eta(n) = \bar\eta(f, n) = \min\{k : E_k(f) \leqslant E_n(f)/2\}$. Тогда через C^* обозначим подмножество функций $f \in C$, для которых при любом $n \in N$

$$E_n(f) \leqslant K E_{\bar\eta(n)}(f) \tag{8}$$

и

$$\bar\eta(k) - k \leqslant K_1(\bar\eta(k') - k')\ \ \forall k, k' \in [n, \bar\eta(n)]. \tag{9}$$

Легко проверить, что к C^* принадлежат, например, функции, у которых $E_n(f) = Kn^{-r}$ при любом $r > 0$ и такие, что $E_n(f) = Ke^{-n^r}$ при $r \in (0, 1]$, а функции, у которых последовательность наилучших приближений убывает быстрее чем e^{-n^r}, $r > 1$, и медленнее чем $\ln^{-1} n$, множеству C^* не принадлежат.

Обозначим еще через Ψ_1 множество функций $\psi(n)$, $n \in N$, для которых $\Delta(1/\psi(n)) = 1/\psi(n+1) - 1/\psi(n) \geqslant 0$, $\Delta^2(1/\psi(n)) = 1/\psi(n+1) - 2/\psi(n) + 1/\psi(n-1) \geqslant 0$.

Для функций $f(x)$ из множества C^* справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть* $f \in C^*$. *Тогда, если для некоторой функции* $\psi(\cdot)$, *принадлежащей множеству* Ψ_1, *ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} E_k(f)\,(\psi(k)\,(\eta(k)-k))^{-1} \tag{10}$$

сходится, то функция $f(x)$ *имеет непрерывную* (ψ, β)*-производную* $f_\beta^\psi(x)$

при любом $\beta \in R$, *причем*

$$E_n(f_\beta^\psi) \leqslant K_1 \sum_{\nu=\bar{\eta}(n)}^{\infty} E_\nu(f)(\psi(\nu)(\bar{\eta}(\nu)-\nu))^{-1} \tag{11}$$

и

$$\omega_k(f_\beta^\psi, n^{-1}) \leqslant K_2 \Big\{ n^{-k} \sum_{\nu=1}^{n} \nu^k E_{\bar{\eta}(\nu)}(f)(\psi(\bar{\eta}(\nu)(\bar{\eta}(\bar{\eta}(\nu)) - \bar{\eta}(\nu))^{-1} +$$

$$+ \sum_{\nu=\bar{\eta}(n)}^{\infty} E_\nu(f)(\psi(\nu)(\bar{\eta}(\nu)-\nu))^{-1} \Big\}. \tag{12}$$

В дальнейшем нам потребуется следующий аналог известного утверждения С. Н. Бернштейна для норм производных тригонометрических полиномов

Лемма. *Пусть* $\{t_n(x)\}$ — *последовательность тригонометрических полиномов, а функция* $\psi(\cdot)$ *принадлежит множеству* Ψ_1. *Тогда для любого натурального* n

$$\| (t_n(x))_\beta^\psi \| \leqslant (2/\psi(n)) \| t_n(x) \|. \tag{13}$$

Если $\psi(k) = k^{-1}$ и $\beta = 1$, то это неравенство вытекает из неравенства С. Н. Бернштейна, при $\psi(k) = k^{-1}$, $\beta = r$, $r \in N$, неравенство (13) является следствием известного утверждения С. Б. Стечкина [2].

Доказательство леммы проводится по известной схеме. Имеем $(t_n(x))_\beta^\psi = (t_n(x))_0^\psi \cos(\beta\pi/2) + (\tilde{t}_n(x))_0^\psi \sin(\beta\pi/2)$, где $(\tilde{t}_n(x))_0^\psi \sum_{k=1}^{\infty} \psi^{-1}(k)(b_k \cos kx - a_k \sin kx)$. Положим $M_n = \sup_{\|t_n\| \leqslant 1} \| (t_n(x))_0^\psi \|$, $\tilde{M}_n = \sup_{\|t_n\| \leqslant 1} \| (\tilde{t}_n(x))_0^\psi \|$. В силу утверждений Сеге и Фейера [4] в рассматриваемом случае будем иметь $M_n = \tilde{M}_n = \psi^{-1}(n)$. Поэтому $\| (t_n(x))_\beta^\psi \| \leqslant \| (t_n(x))_0^\psi \| + \| (\tilde{t}_n(x))_0^\psi \| \leqslant 2/\psi(n) \| t_n(x) \|$. Неравенство (13) неулучшаемо по порядку, поскольку для $t_n^*(x) = \cos nx$ $(t_n^*(x))_0^\psi = (\psi(n))^{-1} \cos nx$ и $\| (t_n^*(x))_0^\psi \| = (\psi(n))^{-1} \| t_n^*(x) \|$.

Доказательство теоремы 1. Покажем сначала, что в условиях теоремы функция $f(x)$ $\forall \beta \in R$ обладает непрерывной (ψ, β)-производной, т. е. существует непрерывная функция $\varphi(x)$ такова, что ее ряд Фурье $S[\varphi]$ имеет вид

$$S[\varphi] = \sum_{k=1}^{\infty} (\psi(k))^{-1} (a_k \cos(kx + \beta\pi/2) + b_k \sin(kx + \beta\pi/2)), \tag{14}$$

где $a_k = a_k(f)$ и $b_k = b_k(f)$, $k = 1, 2, \ldots,$ — коэффициенты Фурье функции $f(x)$.

Пусть $t_n(x)$ — тригонометрический полином наилучшего приближения функции $f(x)$ порядка n. Тогда в каждой точке x $f(x)$ можно представить в виде

$$f(x) = t_{n_0}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (t_{n_k}(x) - t_{n_{k-1}}(x)), \tag{15}$$

где $n_0 = n$, $n_1 = [\eta(n)] + 1, \ldots, n_k = [\eta(n_{k-1})] + 1, \ldots, [\alpha]$ — целая часть числа α и ряд сходится равномерно.

Покажем, что в качестве $\varphi(x)$ в (14) можно взять функцию $s(x)$, определяемую соотношением

$$S(x) = (t_{n_0}(x))_\beta^\psi + \sum_{k=1}^{\infty} (t_{n_k}(x) - t_{n_{k-1}}(x))_\beta^\psi. \tag{16}$$

Для этого в начале убедимся, что ряд (16) сходится равномерно. Положим $U_n(x) = t_{n_k}(x) - t_{n_{k-1}}(x)$ и применим доказанную лемму, учитывая при этом, что порядок полинома $U_k(x)$ равен n_k. Получим

$$\|(U_k(x))^{\psi}_{\beta}\| \leqslant 2/\psi(n_k)\|U_k(x)\| \leqslant 2/\psi(n_k)[\|t_{n_k}(x)-f(x)\| +$$
$$+\|t_{n_{k-1}}(x)-f(x)\|] \leqslant 4E_{n_{k-1}+1}(f)(\psi(n_k))^{-1}.$$

Поэтому

$$\sum_{k=1}^{\infty}\|(U_k(x))^{\psi}_{\beta}\| \leqslant K_1\sum_{k=1}^{\infty}E_{n_{k-1}+1}(f)(\psi(n_k))^{-1} \leqslant K_1\Big\{E_{n+1}(f)(\psi(n_1))^{-1} +$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}E_{n_k+1}(f)(\psi(n_k))^{-1}\Big\}.$$

Оценим сумму последнего ряда. Для этого предположим сначала, что $\eta(n_{k-1})-n_{k-1}\geqslant 1$, $k\in N$. В этом случае справедливы оценки

$$1\leqslant(\eta(n_{k-1})-n_{k-1})([\eta_{k-1})]-n_{k-1})^{-1}<2,\ (\psi(n_k))^{-1}\leqslant 4(\psi(n_k))^{-1},\quad k\in N. \tag{17}$$

Кроме этого для функций $\psi(\cdot)$ из $\mathfrak{M}_c\cup\mathfrak{M}_\infty$ выполняется неравенство [5].

$$K_3\leqslant(\eta(k)-k)(\eta(k')-k')\leqslant K_2\quad\forall k,\ k'\in[n,\ \eta(n)]. \tag{18}$$

Следовательно, учитывая (17) и (18), получаем

$$E_{n_k+1}(f)/\psi(n_{k+1})\leqslant K_4E_{n_k+1}(f)(\psi(n_k))^{-1}([\eta(n_{k-1})]-n_{k-1})([\eta(n_{k-1})]-$$
$$-n_{k-1})^{-1}\leqslant 2K_4(\psi(n_{k-1}))^{-1}E_{n_k+1}(f)([\eta(n_{k-1})]-n_{k-1})(\eta(n_{k-1})-n_{k-1})^{-1}\leqslant$$
$$\leqslant K_5\sum_{\nu=n_{k-1}}^{[\eta(n_{k-1})]}E_{\nu+1}(f)(\psi(\nu)(\eta(\nu)-\nu))^{-1}. \tag{19}$$

Если же для некоторых k $\eta(n_{k-1})-n_{k-1}<1$, то в силу того, что в рассматриваемом случае $\eta(t)-t\geqslant K\ \ \forall t\geqslant 1$, также имеем

$$E_{n_k+1}(f)(\psi(n_{k+1}))^{-1}\leqslant K_1E_{n_k+1}(f)(\psi(n_{k-1}))^{-1}\leqslant K_1E_{n_k+1}(f)(\psi(n_{k-1})\times$$
$$\times(\eta(n_{k-1})-n_{k-1}))^{-1}\leqslant K_1\sum_{\nu=n_{k-1}}^{[\eta(n_{k-1})]}E_{\nu+1}(f)(\psi(\nu)(\eta(\nu)-\nu))^{-1}.$$

Поэтому, учитывая (19), находим

$$\sum_{k=1}^{\infty}E_{n_k+1}(f)(\psi(n_{k+1}))^{-1}\leqslant K\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\nu=n_{k-1}}^{[\eta(n_{k-1})]}E_{\nu+1}(f)(\psi(\nu)(\eta(\nu)-\nu))^{-1}=$$
$$=K\sum_{\nu=n}^{\infty}E_{\nu+1}(f)(\psi(\nu)(\eta(\nu)-\nu))^{-1}.$$

И, стало быть, с учетом второго соотношения из (17) имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty}\|(U_k(x))^{\psi}_{\beta}\|\leqslant K\Big\{E_{n+1}(f)\psi^{-1}(n_1)+\sum_{\nu=n}^{\infty}E_{\nu+1}(f)(\psi(\nu)(\eta(\nu)-\nu))^{-1}\Big\}\leqslant$$
$$\leqslant K_1\Big\{E_{n+1}(f)\psi^{-1}(n)+\sum_{\nu=n+1}^{\infty}E_{\nu}(f)(\psi(\nu)(\eta(\nu)-\nu))^{-1}\Big\}. \tag{20}$$

Таким образом, в силу условия теоремы ряд в (15) действительно сходится равномерно и, значит, функция $s(x)$ непрерывна.

Вычисляя коэффициенты Фурье функции $s(x)$ и приводя ряд (14) к каноническому виду, отыскивая при этом значения $a_k(\varphi)$ и $b_k(\varphi)$ с учетом формулы (15), убеждаемся, что ряд Фурье функции $s(x)$ совпадает с рядом (14). Таким образом, функция $f(x)$ действительно обладает непрерывной (ψ, β)-производной при любом $\beta \in R$, т. е. $f \in C^{\psi}_{\beta}C$, причем в каждой точке x справедливо равенство

$$f^{\psi}_{\beta}(x) = (t_n(x))^{\psi}_{\beta} + \sum_{k=1}^{\infty} (U_k(x))^{\psi}_{\beta}, \tag{21}$$

в котором ряд сходится равномерно.

Из (21) и (20) имеем

$$E_{n+1}(f^{\psi}_{\beta}) \leqslant \| f^{\psi}_{\beta}(x) - (t_n(x))^{\psi}_{\beta} \| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \| (U_k(x))^{\psi}_{\beta} \| \leqslant$$

$$\leqslant K_1 \left\{ E_{n+1}(f)(\psi(n+1))^{-1} + \sum_{\nu=n+2}^{\infty} E_{\nu}(f)(\psi(\nu)(\eta(\nu) - \nu))^{-1} \right\}. \tag{22}$$

Отсюда получаем соотношение (3) при любом $n \geqslant 2$. Неравенство (3) имеет место и для $n = 1$.

Действительно, пусть $t_1(x) = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x$ — полином наилучшего приближения первого порядка функции $f(x)$. Тогда, учитывая, что $a_1 \leqslant 4E_1(f)$ и $b_1 \leqslant 4E_1(f)$, в силу неравенства (22) будем иметь

$$E_1(f^{\psi}_{\beta}) \leqslant \| f^{\psi}_{\beta}(x) \| \leqslant \| (t_1(x))^{\psi}_{\beta} \| + \| f^{\psi}_{\beta}(x) - (t_1(x))^{\psi}_{\beta} \| \leqslant$$

$$\leqslant K_1 \left\{ (\psi(1))^{-1} E_1(f) + \sum_{\nu=2}^{\infty} E_{\nu}(f)(\psi(\nu)(\eta(\nu) - \nu))^{-1} \right\}.$$

Этим неравенство (3) доказано для всех $n \in N$.

Чтобы доказать соотношение (4), воспользуемся результатом, полученным С. Б. Стечкиным [2]: для любых натуральных n и k и для любой функции $\varphi \in C$ справедливо неравенство $\omega_k(\varphi; n^{-1}) \leqslant K n^{-k} \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k-1} E_{\nu}(\varphi)$. Записывая это неравенство для $f^{\psi}_{\beta}(x)$ и оценивая величины $E_{\nu}(f^{\psi}_{\beta})$ согласно формуле (3), находим

$$\omega_k(f^{\psi}_{\beta}, n^{-1}) \leqslant K n^{-k} \Big(\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k-1} E_{\nu}(f)(\psi(\nu))^{-1} +$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k-1} \sum_{m=\nu+1}^{\infty} E_m(f)(\psi(m)(\eta(m) - m))^{-1} \Big).$$

Отсюда, воспользовавшись тождеством $\sum_{\nu=1}^{n} b_{\nu} \sum_{m=\nu}^{n} a_m = \sum_{m=1}^{n} a_m \sum_{\nu=1}^{m} b_{\nu}$, получим неравенство (4). Теорема 1 доказана.

В теореме 1 предполагается, что в случае, когда $\psi \in \mathfrak{M}_{\infty}$, $\forall t \geqslant 1$ должно выполняться неравенство $\eta(\psi, t) - t \geqslant K > 0$. (Если $\psi \in \mathfrak{M}_c$, то это условие выполняется автоматически.)

Условие $\eta(\psi, t) - t \geqslant K > 0$ можно заменить предположением, что для функций $\psi(\cdot)$ существует число T_0 такое, что при $t < T_0$ $\eta(\psi, t) - t < 1$ и при $t \geqslant T_0$ $\eta(\psi, t) - t \geqslant 1$. Разумеется, число 1 в этих неравенствах можно заменить любой константой.

В этом случае рассуждения, с помощью которых была установлена теорема 1, приводят к следующему утверждению.

Теорема 1′. *Пусть $f \in C$, $\psi \in \mathfrak{M}_c \cup \mathfrak{W}_{\infty}$, $\Delta^2((\psi(n))^{-1}) \geqslant 0$ и, кроме того, найдется число $T_0 \geqslant 1$ такое, что при $t < T_0$ $\eta(\psi, t) - t < 1$ и при $t \geqslant T_0$ $\eta(\psi, t) - t \geqslant 1$.*

Тогда, если ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} E_k(f)(\psi(k)\alpha(k))^{-1},\ \alpha(k)=\alpha(\psi,k)=\max(1;\eta(k)-k)) \tag{23}$$

сходится, то $\forall\beta\in R$ *существует непрерывная производная* $f_\beta^\psi(x)$ *такая, что* $\forall n<T_0$

$$E_n(f_\beta^\psi)\leqslant K_1\left\{\sum_{k=n+1}^{[T_0]+1} E_k(f)\psi^{-1}(k)+\sum_{\nu=[T_0]+2}^{\infty} E_\nu(f)(\psi(\nu)(\eta(\nu)-\nu))^{-1}\right\}$$

и

$$\omega_k(f_\beta^\psi,n^{-1})\leqslant K_2\Big\{n^{-k}\sum_{\nu=1}^{[T_0]+1}\nu^k E_\nu(f)(\psi(\nu))^{-1}+\sum_{\nu=[T_0]+2}^{\infty}E_\nu(f)\times$$

$$\times(\psi(\nu)(\eta(\nu)-\nu))^{-1}\quad\forall k\in N,$$

а для $n\geqslant T_0$

$$E_n(f_\beta^\psi)\leqslant K_3\left\{E_n(f)(\psi(n))^{-1}+\sum_{\nu=n+1}^{\infty}E_\nu(f)(\psi(\nu)(\eta(\nu)-\nu))^{-1}\right\}$$

и

$$\omega_k(f_\beta^\psi,n^{-1})\leqslant K_2(T_0)\Big\{n^{-k}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^k E_\nu(f)(\psi(\nu)(\eta(\nu)-\nu))^{-1}+$$

$$+\sum_{\nu=n+1}^{\infty}E_\nu(f)(\psi(\nu))(\eta(\nu)-\nu))^{-1}\quad\forall k\in N.$$

В случае, когда неравенство $\eta(\psi,\ t)-t<1$ выполняется $\forall t\geqslant 1$, утверждение теоремы 1 остается в силе, если формально положить $T_0=\infty$. При этом в условии (23) следует положить $\alpha(k)\equiv 1$.

Доказательство теоремы 2 проводится по той же схеме, что и доказательство теоремы 1. Только на этот раз в аналоге равенства (15) вместо $\eta(\psi,\cdot)$ следует взять функцию $\eta(f,\cdot)$.

Отметим также, что теоремы 1, 1′ и 2 справедливы и для $\psi(n)=n^{-\alpha}$, $0<\alpha<1$. В этом случае $t^{-\alpha}\in\mathfrak{M}_c$ и выполняется неравенство (13), которое вытекает из утверждения Г. Т. Соколова [6].

По схеме доказательства теоремы 1 устанавливаются и аналогичные результаты в пространстве L_p.

Теорема 3. *Пусть* $f\in L_p$, $1<p<\infty$, $\psi\in\mathfrak{M}_c\cup\mathfrak{M}'_\infty$ *и* $\sum_{k=1}^{\infty}E_k(f)_p\times$ $\times(\psi(k)(\eta(k-k))^{-1}<\infty$, *где* $E_k(f_p$ — *наилучшее приближение в пространстве* L_p *функции* $f(x)$ *тригонометрическими полиномами порядка* $k-1$: $E_k(f)_p=\inf\limits_{t_{k-1}}\|f(x)\|-t_{k-1}(x)\|_p$.

Тогда $\forall\beta\in R$ *существует* (ψ,β)*-производная* $f_\beta^\psi(x)$, *принадлежащая пространству* L_p, *для которой*

$$E_n(f_\beta^\psi)_p\leqslant K_1\left\{E_n(f)_p(\psi(n))^{-1}+\sum_{\nu=n+1}^{\infty}E_\nu(f)_p(\psi(\nu)(\eta(\nu)-\nu))^{-1}\right\},\ n=1,2,\ldots,$$

и для любого натурального k

$$\omega_k(f_\beta^\psi,n^{-1})_p\leqslant K_2\Big\{n^{-k}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^k E_\nu(f)_p(\psi(\nu)(\eta(\nu)-\nu))^{-1}+$$

$$+\sum_{\nu=n+1}^{\infty}E_\nu(f)_p(\psi(\nu)(\eta(\nu)-\nu))^{-1},$$

где $\omega_k(f_\beta^\psi, n^{-1})_p$ — *k-й модуль непрерывности функции* $f_\beta^\psi(x)$ *в метрике* L_p (*см., например*, [7]).

По аналогии с множеством функций $C^* \subset C$ определим множество функций $L_p^* \subset L_p$, $p > 1$. Пусть $f \in L_p$ и $\bar\eta(n) = \bar\eta(f, n) = \min\{k: E_k(f)_p \leqslant \leqslant E_n(f)_p/2\}$. Тогда через L_p^* обозначим подмножество функций $f \in L_p$, для которых при любом $n \in N$ $E_n(f)_p \leqslant K E_{\bar\eta(n)}(f)_p$ и $\bar\eta(k) - k \leqslant K_1(\bar\eta(k') - k')$ $\forall\, k, k' \in [\bar n, \eta(n)]$.

В этих обозначениях имеет место следующий аналог теоремы 2.

Теорема 3'. *Пусть* $f \in L_p^*$, $1 < p < \infty$. *Тогда, если для некоторой монотонно убывающей функции* $\psi(\cdot)$ *ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} E_k(f)_p (\psi(k)(\bar\eta(k) - k))^{-1}$ *сходится, то функция* $f(x)$ *имеет* (ψ, β)-*производную принадлежащую* L_p *для любого* $\beta \in R$, *причем* $E_n(f_\beta^\psi)_p \leqslant K_2 \sum\limits_{\nu=\bar\eta(n)}^{\infty} E_\nu(f)_p (\psi(\nu)(\eta(\nu) - \nu))^{-1}$ *и для любого натурального* k

$$\omega_k(f_\beta^\psi, n^{-1})_p \leqslant K_3 \Big\{ n^{-k} \sum_{\nu=1}^{n} \nu^k E_{\bar\eta(\nu)}(f)_p (\psi(\bar\eta(\nu))(\bar\eta(\bar\eta(\nu)) - \bar\eta(\nu))^{-1} + \sum_{\nu=\bar\eta(n)}^{\infty} E_\nu(f)_p (\psi(\nu)(\bar\eta(\nu) - \nu))^{-1} \Big\}.$$

Отметим, что при $\psi(k) = k^{-r}$, $r > 0$, $\beta = 0$ утверждение теоремы совпадает с известным результатом А. А. Конюшкова [3].

1. *Степанец А. И.* Классификация периодических функций и скорость сходимости их рядов Фурье // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1986.— **50**, № 1.— С. 101—136.
2. *Стечкин С. Б.* О порядке наилучших приближений непрерывных функций // Там же.— 1951.— **15**, № 2.— С. 219—242.
3. *Конюшков А. А.* Наилучшие приближения тригонометрическими полиномами и коэффициенты Фурье // Мат. сб.— 1958.— **44**, № 1.— С. 53—84.
4. *Стечкин С. Б.* К проблеме множителей для тригонометрических полиномов // Докл. АН СССР.— 1950.— **75**, № 2.— С. 165—168.
5. *Степанец А. И., Пачулиа Н. Л.* О сильной суммируемости рядов Фурье // Вопросы суммирования рядов Фурье.—Киев, 1985.— С. 3—13.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 85.61).
6. *Соколов Г. Т.* О некоторых экстремальных свойствах тригонометрических сумм // Изв АН СССР.— 1985.— Сер. 7, **№ 6**.— С. 857—882.
7. *Тиман А. Ф.* Теория приближения функций действительного переменного.— М. : Физматгиз, 1960.— 642 с.

Ин-т математики АН УССР, Киев
Получено 17.04.87