УДК 519.46

Л. И. Вайнерман

Об абстрактной формуле Планшереля и формуле обращения

1. В работах по гармоническому анализу операторов обобщенного сдвига (о. о. с.) обычно рассматривается ситуация, когда эти операторы ограничены (см., например, [1—3]). В частности, в работе [4] предложена методика получения формулы Планшереля и формулы обращения для ограниченных о. о. с., основанная на теории алгебр фон Неймана (W^*-алгебр) и теории гильбертовых алгебр [5, 6] Однако в приложениях часто возникают неограниченные о. о. с.— особенно это касается о. о. с., связанных с дифференциальными операторами. Поэтому в настоящей работе изучаются именно неограниченные о. о. с. В пп. 2,3 предложен способ получения формулы Планшереля и формулы обращения для таких о. о. с. Он основан на использовании свойств одного специального класса $*$-алгебр неограниченных операторов в гильбертовом пространстве (EW^+-алгебр) и связанных с ними неограниченных гильбертовых алгебр (н. г. а.) [7].

В п. 4 построено коммутативное семейство самосопряженных о. о. с., связанных с гамильтоновой системой двух дифференциальных уравнений на полуоси (к таким системам, в частности, относится система Дирака) [8]. Для этого разработана модификация метода, с помощью которого в [9] строились о. о. с., связанные с задачей Штурма—Лиувилля как эволюционное семейство операторов для волнового уравнения (см. п. 5 настоящей работы, а также [1, 10, 3, 4]). Полученные в качестве приложений абстрактных результатов п 3 формула Планшереля и формула обращения для этого семейства о о. с совпадают соответственно с равенством Парсеваля и формулой обращения для указанной гамильтоновой системы. Аналогичные результаты получены в п. 5 для о. о. с., связанных с задачей Штурма—Лиувилля

Следует отметить одну общую особенность о. о. с., рассматриваемых в пп 4,5 — они переводят в себя некоторое линейное пространство финитных гладких функций; за счет этого с ними удается связать коммутативную н. г. а.

2 Пусть D — предгильбертово пространство со скалярным произведением $(.,.)$, H — его пополнение Если D снабжено такой структурой $*$-алгебры с умножением $\{a, b\} \to ab$ и инволюцией $a \to a^+$, что: 1) $(a, b) = (b^+, a^+)$, $(ab, c) = (b, a^+c)$ $\forall a, b, c \in D$; 2) множество D_0^2 линейных комбинаций всевозможных произведений элементов из $D_0 = \{a \in D \mid$ оператор $L(a) : b \to ab$ непрерывен в $H\}$ плотно в D, то говорят, что D является

н. г. а. над гильбертовой алгеброй D_0. Обозначим через $L(D_0)$ левую W^*-алгебру гильбертовой алгебры D_0, а через φ — канонический след на ней [5, 6].

С н. г. а. тесно связан некоторый класс *-алгебр неограниченных операторов в H, определяемых следующим образом. Снабдим множество $\mathcal{L}(D)$ всех линейных операторов, переводящих D в себя, локально выпуклой топологией, порожденной полунормами вида $A \to |(Aa, b)| \; \forall a, b \in D$. Назовем ее D-слабой топологией. Подалгебра $\mathfrak{A}$ в $\mathcal{L}(D)$ с единицей I и инволюцией $A \to A^+$ называется EW^+-алгеброй на D, если:

1) $(A^+a, b) = (a, Ab)$, $(I + A^+A)^{-1}$ существует и принадлежит множеству $\mathfrak{A}_b$ всех ограниченных операторов из $\mathfrak{A}$ (здесь $A \in \mathfrak{A}$, $a, b \in D$);

2) множество $\overline{\mathfrak{A}}_b$ всех замыканий операторов из $\overline{\mathfrak{A}}_b$ образует W^*-алгебру.

Определения различных объектов, связанных со следами на EW^+-алгебрах [7], мало отличаются от определений аналогичных объектов, связанных со следами на W^*-алгебрах [5, 6]. Как показано в [7], для каждой н. г. а. D над D_0 существует такая минимальная EW^+-алгебра $\mathfrak{A}$, что $\overline{\mathfrak{A}}_b = L(D_0)$ и множество $\overline{\mathfrak{A}}$ замыканий всех операторов из $\mathfrak{A}$ содержит множество замыканий всех операторов вида $L(a)(a \in D)$. Назовем ее левой EW^+-алгеброй н. г. а. D и обозначим через $EL(D)$. Скалярное произведение в D порождает на $EL(D)$ точный нормальный полуконечный след $\tilde{\varphi}$ (канонический след) такой, что $EL(D)\ (\mathfrak{N}_{\tilde{\varphi}})_b \subseteq \mathfrak{N}_{\tilde{\varphi}}$ (здесь $\mathfrak{N}_{\tilde{\varphi}} = \{A \in EL(D) \mid \tilde{\varphi}(A^+A) < \infty\}$, $(\mathfrak{N}_{\tilde{\varphi}})_b = \mathfrak{N}_{\tilde{\varphi}} \cap EL(D)_b$) и

$$(a, b) = \tilde{\varphi}(L^+(b)\, L(a)), \quad a, b \in D. \tag{1}$$

Из (1) следует, что отображение $a \to L(a)$ можно продолжить до унитарного оператора, действующего из H в $L_2(\tilde{\varphi})$, где $L_2(\tilde{\varphi})$ — гильбертово пространство, построенное на $EL(D)$ по следу $\tilde{\varphi}$ с помощью конструкции Гельфанда—Наймарка—Сигала. Если H сепарабельно, то, используя центральное разложение W^*-алгебры $L(D_0)$ [5, 6], можно разложить H в прямой интеграл $H = \int_Z^{\oplus} H_\lambda d\rho(\lambda)$ гильбертовых пространств H_λ, а D_0 — в прямой интеграл гильбертовых алгебр и преобразовать (1) к виду

$$(a, b) = \int_Z \tilde{\varphi}_\lambda (L_\lambda^+(b)\, L_\lambda(a))\, d\rho(\lambda), \tag{2}$$

где Z — квазиспектр центра $L(D_0)$, $\tilde{\varphi}_\lambda$ и $L_\lambda(\cdot)$ — компоненты соответственно следа $\tilde{\varphi}$ и оператора $L(\cdot)$ при центральном разложении.

Отображение $D \ni a \to \tilde{a}(\lambda) = L_\lambda(a)$ назовем обобщенным преобразованием Фурье для н. г. а. D, меру ρ, определяемую с точностью до эквивалентности мер,— мерой Планшереля, а формулу (2) — формулой Планшереля. Так как $L(D_0)$ имеет циклический вектор [5], то если D коммутативно, можно считать $Z = R$; поскольку при этом $L_\lambda(\cdot)$ — скаляры, то формула (2) примет вид

$$(a, b) = \int_R \tilde{a}(\lambda)\, \overline{\tilde{b}(\lambda)}\, d\rho(\lambda), \quad a, b \in D, \tag{3}$$

и мера ρ определена однозначно.

3. Пусть Q — сепарабельное локально компактное топологическое пространство, $\mu = \{\mu_{ij}\}_{i,j=1}^N$ — положительная борелевская матричная мера на Q, $H = L_2(Q, \mu)$ — гильбертово пространство функций со значениями $\mathbb{C}^N$ и со скалярным произведением $(a, b) = \int_Q \sum_{i,j=1}^N d\mu_{ij}(x)\, a_i(x)\, \overline{b_j(x)}$ (N — натуральное число). Пусть D — плотный в H линеал, а $L(x) = \{L_i(x)\}_{i=1}^N$ — набор функций со значениями в $\mathcal{L}(D)$, таких, что $L_i^*(x) \in \mathcal{L}(D)$, $L_i(x) f(s) \in D \; \forall$ $\forall$ фиксированого s и $f \in D$ и удовлетворяющих условиям:

1) $[L_i^t(r)]^* \{L_j(t) f(s)\} = L_i^s(r) \{L_j(t) f(s)\}$ $(i, j = 1, \ldots, N;\; s, t, r \in Q,$ $f \in D$, верхний индекс показывает, по какому переменному действует оператор);

2) $\forall a \in D$ интеграл $L(a) = \sum\limits_{i,j=1}^{N} \int\limits_Q d\mu_{ij}(x)\, a_i(x)\, L_j^*(x)$ сходится в D-слабой топологии и принадлежит $\mathcal{L}(D)$ (сходимость $A_n \in \mathcal{L}(D)$ к $A \in \mathcal{L}(D)$ в D-слабой топологии означает, что $(A_n f, g) \to (Af, g)$ $\forall f, g \in D$);

3) I является точкой прикосновения множества операторов $L(D_0)$ (где $D_0 = \{a \in D \mid L(a)$ — непрерывен в $H\}$ в D_0-слабой топологии.

Операторы $L(x)$ назовем при этом левыми о. о. с. в пространстве вектор-функций. Очевидно, условия 1 и 3 являются обобщениями соответственно аксиом ассоциативности и единицы для левых о. о. с. [1]. В дальнейшем будем дополнительно предполагать, что Q снабжено инволютивным гомеоморфизмом $x \mapsto \check{x}$ таким, что $\mu(S) = \mu(\check{S})$ $\forall$ борелевского $S \subset Q$, D инвариантно относительно покоординатного комплексного сопряжения и отображения $a(x) \mapsto a^+(x) = \{\overline{a_i(\check{x})}\}_{i=1}^N$, $L_i(\check{x}) = L_i^+(x) = L_i^*(x) \in D$.

Из условий 1—3 следует, что свертка $a^*b = L(a)\, b$ и инволюция $+$ задают на D структуру *-алгебры, определяющую в H н. г. а. над D_0 — будем говорить, что эта н. г. а. ассоциирована с о. о. с. $L(x)$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Для н. г. а. D, ассоциированной с о. о. с. $L(x)$, существует такая положительная борелевская мера ρ на квазиспектре Z центра W^*-алгебры $L(D_0)$, что для обобщенного преобразования Фурье $a \to \tilde{a}(\lambda) = L_\lambda(a)$ справедлива формула Планшереля* (2), *а также формула обращения*

$$a_i(x) = \int\limits_Z \tilde{\varphi}_\lambda((\widetilde{L_i}(x)\, a)(\lambda))\, d\rho(\lambda), \quad i = 1, \ldots, N, \quad a \in D, \tag{4}$$

где $L_\lambda(\cdot)$ и φ_λ — соответственно компоненты оператора $L(\cdot)$ и канонического следа на $EL(D)$ при центральном разложении $L(D_0)$. Мера ρ определяется однозначно с точностью до эквивалентности мер.

Первая часть теоремы вытекает из результатов п. 2 и определения н. г. а., ассоциированной с о. о. с. Если $a \in D^2$ — множеству линейных комбинаций всевозможных произведений элементов из D, то левая, а значит, и правая часть равенства (1) суть D-слабо непрерывные антилинейные формы по b. Учитывая, что интеграл $L(b^+) = \sum\limits_{i,j=1}^{N} \int\limits_Q d\mu_{ij}(x)\, \overline{b_i(x)}\, L_j(\check{x})$ сходится D-слабо, имеем $\sum\limits_{i,j=1}^{N} \int\limits_Q d\mu_{ij}(x)\, a_i(x)\, \overline{b_j(x)} = \sum\limits_{i,j=1}^{N} \int\limits_Q d\mu_{ij}(x)\, \overline{b_j(x)} \times$ $\times\, \tilde{\varphi}(L_i(x)\, L(a))$, откуда $a_i(x) = \tilde{\varphi}(L(L_i(x)\, a))$, что эквивалентно (4).

Хотя обобщенное преобразование Фурье определено лишь для $a \in D$, а формула обращения — для $a \in D^2$, однако, поскольку они устанавливают унитарный изоморфизм между H и $L_2(\tilde{\varphi})$, их можно естественным образом доопределить для всех функций $a(x)$ и $\tilde{a}(\lambda)$ из этих пространств. Если операторы $L_i(x)$ нормальны, коммутируют в смысле разложения единицы при всевозможных i и x, и φ-измеримы [7], то $L_{i,\lambda}(x)$ и $\tilde{a}(\lambda)$ — скаляры и в соответствии с замечанием в конце п. 2 формула для обобщенного преобразования Фурье и формула обращения принимают более привычный вид $\tilde{a}(\lambda) = \sum\limits_{i,j=1}^{N} \int\limits_Q d\mu_{ij}(x)\, a_i(x)\, \overline{L_{j,\lambda}(x)}$ и $a_i(x) = \int\limits_R \tilde{a}(\lambda)\, L_{i,\lambda}(x)\, d\rho(\lambda)$, а мера Планшереля ρ определена однозначно.

4. Рассмотрим задачу на собственные значения вида

$$\mathcal{J} y' = \lambda \mathcal{P}(x)\, y, \tag{5}$$

$$\cos\alpha\, y_2(0) + \sin\alpha\, y_1(0) = 0, \tag{6}$$

где $\mathcal{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathcal{P}(x)$ — вещественная положительно определенная матрица 2-го порядка с непрерывно дифференцируемыми по $x \in Q = [0, \infty)$ компонентами, α, $\lambda \in R$, $y(x)$ — функция со значениями в $\mathbb{C}^2$. Известно, что к виду (5), (6) сводится широкий класс задач на собственные значения для вещественных формально самосопряженных систем 2-го порядка. С помощью замены аргумента можно добиться, чтобы $\det \mathcal{P}(x) = 1$ [8]. Положим, $d\mu(x) = \hat{\mathcal{P}}(x)\, dx$ и рассмотрим в пространстве $H = L_2(Q, \mu)$ оператор L_0', заданный выражением $l[y] = \mathcal{P}^{-1}(x)\mathcal{J}y'$ на множестве D_0' финитных непрерывно дифференцируемых функций, удовлетворяющих условию (6). Он симметричен и вещественен, поэтому имеет самосопряженные вещественные расширения [11]; пусть A — одно из них. Положим $\Phi(x, \lambda) = \{\Phi_i(x, \lambda)\}_{i=1}^2 = Y(x, \lambda)\; a$, где $a = (\cos\alpha, -\sin\alpha)$, $Y(x, \lambda)$ — матричное решение уравнения (5) такое, что $Y(0, \lambda) = E$ — единичной матрице [8]. Покажем, что самосопряженные вещественные коммутирующие в смысле разложения единицы [11] операторы $L(x) = \{L_i(x)\}_{i=1}^2 = \{\Phi_i(x, A)\}_{i=1}^2$ являются о.о.с. (см. п. 3.).

Пусть D — линейная оболочка множества элементов вида Bf, где $f \in D_0'$, $B \in W^*(A)$ — W^*-алгебре всех E_λ-существенно ограниченных функций от оператора A (E_λ — его разложение единицы). Покажем, что $L_i(x) \in \mathcal{L}(D)$; для этого достаточно доказать, что $L_i(x) \in \mathcal{L}(D_0')$ Заметим, что по крайней мере для векторов вида $f = E_\Delta g$ ($g \in H$, Δ — конечный интервал из R) функция $z(x) = \{z_i(x)\}_{i=1}^2 = \{L_i(x) f\}_{i=1}^2$ со значениями в $\mathbb{C}^2 \otimes H$ удовлетворяет дифференциально-операторному уравнению $(\mathcal{J} \otimes E) z' = (\mathcal{P}(x) \otimes A) z$ и начальному условию $z(0) = a \otimes f$, что можно записать в виде смешанной задачи для системы уравнений в частных производных:

$$(\mathcal{J} \otimes \mathcal{P}(s))\, \partial u/\partial x = (\mathcal{P}(x) \otimes \mathcal{J})\, \partial u/\partial s, \tag{7}$$

$$\{u(0, s) = a \otimes f(s), \quad \cos\alpha\, u_2(x, 0) + \sin\alpha\, u_1(x, 0) = \cos\alpha\, u_4(x, 0) + \\ + \sin\alpha\, u_3(x, 0) = 0, \tag{8}$$

где $u_1(x, s) = \{L_1(x) f(s)\}_1$, $u_2(x, s) = \{L_1(x) f(s)\}_2$, $u_3(x, s) = \{L_2(x) f(s)\}_1$, $u_4 = (x, s) = \{L_2(x) f(s)\}_2$.

Таким образом, под действием операторов $L(x)$ начальные данные переводятся в решение задачи (7), (8). Поэтому свойства операторов $L(x)$ вытекают из свойств решения задачи (7), (8). Чтобы изучить эти последние, приведем матрицу $\mathcal{P}(\cdot)$ к диагональному виду с помощью ортогонального преобразования

$$U(\cdot) = \begin{pmatrix} \cos\varphi(\cdot) & \sin\varphi(\cdot) \\ -\sin\varphi(\cdot) & \cos\varphi(\cdot) \end{pmatrix}: \mathcal{P}(\cdot) = U^{-1}(\cdot)\,\Delta(\cdot)\,U(\cdot),$$

$$\Delta(\cdot) = \begin{pmatrix} \lambda(\cdot) & 0 \\ 0 & \lambda^{-1}(\cdot) \end{pmatrix}.$$

Поскольку $\mathcal{J}$ коммутирует со всеми $U(\cdot)$ и $U'(\cdot)\,U^{-1}(\cdot) = \varphi'(\cdot)\,\mathcal{J}$, то после замены $v(x, s) = [U(x) \otimes U(s)]\, u(x, s)$ задача (7), (8) перейдет в эквивалентную задачу

$$\partial v/\partial x + (\mathcal{J}\Delta(x) \otimes \mathcal{J}\Delta(s))\;\partial v/\partial s = [(\mathcal{J} \otimes E)\,\varphi'(x) - \varphi'(s)\;(\mathcal{J}\Delta(x) \otimes \Delta^{-1}(s))]\, v, \tag{7'}$$

$$v(0, s) = b \otimes \hat{f}(s),\; \cos\beta\, v_2(x, 0) + \sin\beta\, v_1(x, 0) = \cos\beta\, v_4(x, 0) + \\ + \sin\beta\, v_3(x, 0) = 0, \tag{8'}$$

где $\hat{f}(\cdot) = U(\cdot)\, f(\cdot)$, $\beta = \alpha + \varphi(\cdot)$, $b = (\cos\beta, -\sin\beta)$.

С помощью замены $w(x, s) = \left[\begin{pmatrix} 1 & i\lambda^{-1}(x) \\ -i\lambda(x) & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & i\lambda^{-1}(s) \\ -i\lambda(s) & 1 \end{pmatrix}\right] v$ главной части системы (7), содержащей производные неизвестной функции по x и по s, может быть придана форма $\partial w/\partial x - \left[\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\right] \times$ $\times\, \partial w/\partial s$. Соответствующая однородная смешанная задача решается в явном виде; из этого явного вида следует, что $w_1(x, s) = w_1(s, x)$, $w_4(x, s) = w_4(s, x)$, $w_2(x, s) = w_3(s, x)$ и при каждом фиксированном x вектор-функции $\{w_1(x, s), w_2(x, s)\}$ и $\{w_3(x, s), w_4(x, s)\}$ принадлежат D_0'.

Вспомним, однако, что рассматриваемая система помимо главной части содержит также слагаемое вида $Q(x, s)\, w$, которое можно рассматривать как правую часть. Тем не менее стандартными рассуждениями [12] можно показать, что указанные выше свойства решения $w(x, s)$ сохраняются и в общем случае. Очевидно, эти же свойства сохранятся и для решения задач (7), (8) и (7′), (8′).

Из проведенных рассуждений вытекает, что множество D_0' инвариантно относительно действия операторов $L_i(x)$ и имеет место следующее свойство симметрии:

$$\{L_1(x) f(s)\}_1 = \{L_1(s) f(x)\}_1,\ \{L_1(x) f(s)\}_2 = \{L_2(s) f(x)\}_1,$$
$$\{L_2(x) f(s)\}_2 = \{L_2(s) f(x)\}_2. \tag{9}$$

Условие ассоциативности 1 п. 3 для рассматриваемых операторов выполнено в силу того, что обе части соответствующего равенства при любых фиксированых s, j являются решениями смешанной задачи вида (7), (8), а для решений такой задачи имеет место теорема единственности [12]. D-слабая сходимость интеграла $L(a)$ для $a \in D_0'$ очевидна; если же $a = Ba'$ (где $B \in W^*(A)$, $a' \in D_0'$), то с учетом установленных выше соотношений симметрии имеем $L(a) = L(a')\, \bar{B}^*$ (черта означает инволюцию в пространстве операторов, действующих в H, порожденную комплексным сопряжением в H), откуда вытекает D-слабая сходимость интеграла $L(a)$ и его принадлежность $\mathcal{L}(D)$, т. е. справедливость условия 2 п. 3.

Проведенные рассуждения показывают также, что для $a = Ba'$, где $a' \in D_0'$, B — финитная E_λ-существенно ограниченная функция от оператора A, оператор $L(a)$ непрерывен в H. Кроме того, если $a_n = E(\Delta_n)\, a_n'$, где левые и правые границы интервалов Δ_n стремятся соответственно к $-\infty$ и к $+\infty$ при $n \to \infty$, а компонентами вектор-функций $a_n' \in D_0'$ являются δ_0-образные последовательности, то нетрудно подсчитать, что $L(a_n) \to$ $\to (\mathcal{P}(0)\, a, f(0))\, I$, т. е. выполнено условие 3 п. 3. Положим $\check{x} \equiv x$ для $x \in Q$. Поскольку в силу вещественности оператора A D инвариантно относительно покоординатного комплексного сопряжения, выполнены все условия п. 3. Поэтому из общих результатов этого пункта, вытекает

Т е о р е м а 2. *Оператору A соответствует единственная положительная борелевская мера ρ (спектральная мера) на R такая, что для обобщенного преобразования Фурье* $a(x) \mapsto \tilde{a}(\lambda) = \int_0^\infty \sum_{i,j=1}^{2} \mathcal{P}_{ij}(x)\, a_i(x)\, \Phi_j(x, \lambda)\, dx$ *имеют место формула Планшереля* (3) *и формула обращения* $a_i(x) =$ $= \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_i(x, \lambda)\, \tilde{a}(\lambda)\, d\rho(\lambda)$.

5. Пусть

$$\begin{cases} l[y] = -y'' + q(x)\, y = \lambda y, \\ y'(0) = hy(0) \end{cases} \tag{10}$$

— задача на собственные значения для дифференциального выражения Штурма—Лиувилля, где $x \in Q = [0, \infty)$, λ, $h \in R$, $q(x)$ — вещественная локально интегрируемая функция. Обозначим через A минимальный оператор в пространстве $H = L_2(0, \infty)$, порожденный выражением $l[y]$ на множестве D_0' финитных функций, имеющих абсолютно непрерывную производную и удовлетворяющих краевому условию из (10). Не ограничивая общности, можно считать, что A — существенно самосопряжен; в противном случае все его самосопряженные расширения имеют чисто дискретный спектр [11] и доказательство равенства Парсеваля и формулы обращения труда не составляет. Пусть $\varphi(x, \lambda)$ — такое решение задачи (10), что $\varphi(0, \lambda) = 1$.

Рассмотрим семейство, самосопряженных, вещественных вообще говоря, неограниченных операторов $L(x) = \varphi(x, A)$, коммутирующих в смысле разложения единицы. Пусть M — линейная оболочка элементов вида $f = E_\Delta g$, где $g \in H$, E_λ — разложение единицы оператора A, Δ — конечный интервал вещественной оси. Для $f \in M$ функция $L(x) f = z(x)$ удовлетворяет дифференциально-операторной задаче Коши

$$l[z] = -z'' + q(x) z = Az, \quad z(0) = f, \quad z'(0) = hf, \tag{11}$$

которую можно переписать в виде смешанной задачи для уравнения в частных производных (обозначив $z(x)$ через $u(x, s)$, f — через $f(s)$):

$$-\partial^2 u/\partial x^2 + q(x) u(x, s) = -\partial^2 u/\partial s^2 + q(s) u(x, s), \tag{12}$$

$$u(0, s) = f(s), \quad \partial u/\partial x(0, s) = hf(s), \quad \partial u/\partial s(x, 0) = hu(x, 0). \tag{13}$$

Известно [1], что решение этой задачи можно представить в виде

$$u(x, s) = \frac{1}{2}[f(x+s) + f(|x-s|)] + \int\limits_{|x-s|}^{x+s} w(x, s, \xi) f(\xi) d\xi = L(x) f(s), \tag{14}$$

где w — функция Римана задачи (12), (13). Из этой формулы, задающей закон действия операторов $L(x)$, и из свойств функции Римана вытекает, что множество D_0' инвариантно относительно действия о. о. с. Более того, относительно о. о. с. инвариантно и множество $D = \left\{\sum\limits_i A_i f_i \mid f_i \in D_0', \ A_i \in \in W^*(A)\right\}$, где $W^*(A)$ — W^*-алгебра всех E_λ-существенно ограниченных функций от оператора A. Из вещественности оператора A вытекает инвариантность D относительно комплексного сопряжения.

1. Для $a \in D_0'$ D-слабая сходимость интеграла $L(a)$ доказывается непосредственно. Если же $a = Ba_1$, где $a_1 \in D_0'$, $B \in W^*(A)$, то с использованием вытекающего из (14) соотношения $(L(x) a)(s) = (L(s) a)(x)$ несложно показать, что $L(a) b = L(a_1) \overline{B^*} b$ для $b \in D$ и, таким образом, этот случай сводится к предыдущему.

2. Как показано в [1], имеет место соотношение $L_s(r)(L(s) f)(x) = L_x(s)(L(r) f)(x)$ — ассоциативность о. о. с. (индекс внизу показывает, по какой переменной действует оператор). Учитывая также коммутируемость о. о. с. на D, их самосопряженность и изученные выше свойства, можно убедиться, что соотношение ассоциативности о. о. с. принимает вид $L(L(a) b) c = L(a) L(b) c$ или $(a*b)*c = a*(b*c)$, где $a, b, c \in D$.

3. Из изложенного в 1 вытекает, что в веденное выше множество M содержится в множестве D_0 таких элементов $a \in D$, для которых оператор $L(a)$ непрерывен. Кроме того, если $a_n = E(\Delta_n) f_n$, где границы интервала Δ_n стремятся соответственно к $-\infty$ и $+\infty$ при $n \to \infty$, а f_n — δ_0-образная последовательность функций из D_0', то, как нетрудно видеть, $L(a_n) \to \to \varphi(0, A) = I$.

Проведенные рассуждения показывают, что с оператором A можно связать н. г. а. D, ассоциированную с коммутативными о. о. с. $L(x)$. Отсюда и из результатов п. 3 вытекает, что оператору A соответствует единственная положительная борелевская мера ρ (спектральная мера) на R такая, что для обобщенного преобразования Фурье $a(x) \mapsto \tilde{a}(\lambda) = \int\limits_0^\infty a(x) \varphi(x, \lambda) dx$ имеет место формула (3) и формула обращения $a(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \tilde{a}(\lambda) \varphi(x, \lambda) d\rho(\lambda)$.

Отметим, что приведенное утверждение допускает обобщение на случай, когда уравнение (10) заменяется несколько более общим уравнением вида $(p(x) y')' + q(x) y = \lambda r(x) y$ (где $p(x)$ и $r(x)$ — непрерывные положительные функции на $[0, \infty)$). Кроме того, с помощью подстановки задаче (10) можно придать вид (5), (6), однако с вырожденной матрицей $\mathcal{P}(x)$; поэтому к ней непосредственно неприменима теорема 2.

1. *Левитан Б. М.* Теория операторов обобщенного сдвига.— М. : Наука, 1973.— 312 с.
2. *Березанский Ю. М., Калюжный А. А.* Гиперкомплексные системы с локально-компактным базисом.— Киев, 1982.— 58 с.— Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 82.40). (Англ. пер.: Selecta Math. Sovictica.— 1985.— 4, № 2.— P. 151—200).
3. *Вайнерман Л. И.* Двойственность алгебр с инволюцией и операторы обобщенного сдвига // Итоги науки и техники. Мат. анализ / ВИНИТИ.— 1986.— **24**.— С. 165—205.
4. *Вайнерман Л. И., Литвинов Г. Л.* Формула Планшереля и формула обращения для операторов обобщенного сдвига // Докл. АН СССР.— 1981.— **251**, № 4.— С. 792—795.
5. *Dixmier J.* Les algebres d'operateurs dans l'espace hilbertien.—Paris: Gauthier — Villars, 1969.— 367 p.
6. *Наймарк М. А.* Нормированные кольца.— М. : Наука, 1968.— 664 с.
7. *Inoue A.* On a class of unbounded operator algebras. I // Pacif. J. Math.—I.— 1976.— **65**, N 1.— P. 77—95; II. 1976.— **66**, N 2.— P. 411—431; III. — 1977. — **69**, N 1. — P. 105—115.
8. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения.— М. : Наука, 1967.— 508 с.
9. *Повзнер А. Я.* Об уравнениях типа Штурма—Лиувилля на полуоси // Докл. АН СССР.— 1944.— **43**, № 9.— С. 387—391.
10. *Березанский Ю. М.* О гиперкомплексных системах, построенных по уравнению Штурма—Лиувилля на полуоси // Там же.— 1953.— **91**, № 6.— С. 1245—1248.
11. *Ахиезер Н. И., Глазман И. М.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве.— М. : Наука, 1966.— 543 с.
12. *Берс Л., Джон Ф., Шехтер М.* Уравнения с частными производными. — М. : Мир, 1966.— 351 с.

Киев ун-т

Получено 30.03.87