УДК 517.92:517.53

Н. И. Нагнибида

О преобразованиях обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с аналитическими коэффициентами

Обозначим через A_R, $0 < R \leqslant \infty$, пространство всех однозначных и аналитических в круге $|z| < R$ функций с топологией компактной сходимости. Пусть, далее, $p \in \mathbb{N}$, $a_k(z)$ и $b_k(z)$, $k = 1, 2, \ldots, p$ — произвольные фиксированные функции из A_R, D и E — соответственно операторы обычного дифференцирования и тождественного преобразования, а

$$L = D^p + a_1(z) D^{p-1} + \ldots + a_{p-1}(z) D + a_p(z) E \tag{1}$$

и

$$L_1 = D^p + b_1(z) D^{p-1} + \ldots + b_{p-1}(z) D + b_p(z) E.$$

Как известно [1], тогда существует такой изоморфизм T_0 пространства A_R на себя, что $LT_0 = T_0L_1$ или же $L = T_0L_1T_0^{-1}$ и который сохраняет начальные данные Коши в точке $z = 0$:

$$(T_0f)^{(\nu)}(0) = f^{(\nu)}(0), \quad \nu = 0, 1, \ldots, p-1 \ (\forall f \in A_R). \tag{2}$$

Заметим, что условиями (2) изоморфизм T_0 определяется единственным образом.

В частности, в качестве оператора L_1 можно взять, например, простейший оператор D^p, и поэтому для произвольного обыкновенного линейного дифференциального оператора L вида (1) всегда существует (и притом единственный) изоморфизм T_0 пространства A_R на себя такой, что

$$L = T_0 D^p T_0^{-1} \tag{3}$$

и выполняются условия (2).

Пусть теперь T — произвольный другой оператор преобразования D^p в L, т. е. также $L = TD^pT^{-1}$. Тогда $TD^pT^{-1} = T_0D^pT_0^{-1}$ и $T_0^{-1}TD^p = D^pT_0^{-1}T$. Следовательно, оператор $S = T_0^{-1}T$ является некоторым изоморфизмом пространства A_R на себя, коммутирующим в нем с оператором D^p. Другими словами, формула

$$T = T_0 S, \tag{4}$$

где S пробегает полную группу изоморфизмов пространства A_R, перестановочных с D^p, определяет все операторы преобразования D^p в L.

Поэтому напомним [2] утверждение, являющееся уточнением известного результата Дельсарта—Лионса из [3].

Теорема A. *Для того чтобы линейный оператор S был изоморфизмом пространства A_R, $0 < R < \infty$, перестановочным с оператором D^p, $p \in \mathbb{N}$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$S(\exp(\lambda z)) = \sum_{j=0}^{p-1} M_j(\lambda) \exp(\lambda \omega^j z), \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad \omega = \exp \frac{2\pi i}{p}, \tag{5}$$

где

$$M_j(\lambda) = a_{p-1}^{(j)}/\lambda^{p-1} + \ldots + a_1^{(j)}/\lambda + M_j^*(\lambda), \quad j = 0, 1, \ldots, p-1, \tag{6}$$

и выполнялись следующие условия:

1) $\sum\limits_{j=0}^{p-1} a_k^{(j)} \omega^{lj} = 0, \ 0 \leqslant l < k \leqslant p-1;$

2) $M_j^*(\lambda)$, $j = 0, 1, \ldots, p-1$, — *целые функции класса* $[1, 0]$;

3) $$\Delta(\lambda) = \det \| M_{k-j}(\lambda\omega^j) \|_{k,j=0}^{p-1} \equiv \mathrm{const} \neq 0 \tag{7}$$

(здесь при $k < j$ $M_{k-j}(\lambda\omega^j) = M_{p+k-j}(\lambda\omega^j)$).

В случае $R = \infty$ условие 2 этой теоремы следует заменить условием 2′) $M_j^*(\lambda)$ — целые функции экспоненциального типа.

В связи с этим утверждением и с целью упрощения формулировок в дальнейшем через $\mathcal{K}_R(\lambda)$ будем обозначать множество всех вектор-функций $\{M_0(\lambda), M_1(\lambda), \ldots, M_{p-1}(\lambda)\}$, компоненты которых представимы в виде (6) и удовлетворяют условиям 1—3 теоремы A. Таким образом, между множеством всех изоморфизмов пространства A_R, $0 < R \leqslant \infty$, коммутирующих в нем с D^p, $p \in \mathbb{N}$, и множеством $\mathcal{K}_R(\lambda)$ устанавливается взаимно-однозначное соответствие, реализуемое соотношением (5).

С помощью теоремы A в работе [2] была доказана следующая теорема.

Теорема B. *Если линейному непрерывному в пространстве A_R оператору M соответствует матрица $\| m_{j,k} \|_{j,k=0}^{\infty}$, причем $m_{j,k} = 0$ при $\min(j, k) \geqslant p$, то для существования такого изоморфизма T_1 пространства A_R на себя, для которого $L = T_1 D^p T_1^{-1}$ и*

$$(T_1 f)^{(\nu)}(0) = (Mf)^{(\nu)}(0), \quad \nu = 0, 1, \ldots, p-1, \tag{8}$$

необходимо и достаточно, чтобы $\det \| m_{j,k} \|_{j,k=0}^{p-1} \neq 0$.

Отметим, что условиями (8) оператор T_1 также определяется единственным образом, а в случае $m_{j,k} = \delta_{j,k}$, $j, k = 0, 1, \ldots, p-1$, где $\delta_{j,k}$ — символ Кронекера, условия (8) превращаются в условия (2). В общем случае правые части соотношений (8) являются линейными комбинациями величин $f(0), f'(0), \ldots, f^{p-1}(0)$.

Поэтому вполне естественным представляется вопрос об обобщении и этого утверждения с целью получения результата, приводящего, скажем, к условиям, аналогичным тем, которые определяют краевые задачи для дифференциальных уравнений. Изучение этого вопроса (в случае пространства A_R) и является целью настоящей работы.

Итак, рассмотрим следующую общую задачу. Пусть заданы две линейно независимые системы $\{\Gamma_\nu\}_{\nu=0}^{p-1}$ и $\{\Lambda_\nu\}_{\nu=0}^{p-1}$ линейных непрерывных в A_R функционалов (всюду в дальнейшем они будут применяться к функциям из A_R вида $\psi(z, \lambda)$, где ψ зависят от переменной z, а λ является некоторым параметром). Требуется найти условия, при которых существует такой изоморфизм T пространства A_R на себя, для которого $L = TD^pT^{-1}$ и

$$\Gamma_\nu(Tf) = \Lambda_\nu(f), \quad \nu = 0, \ldots, p-1, \tag{9}$$

для любой функции f из A_R.

Заметим, что поскольку фигурирующие здесь искомый оператор T, а также функционалы Γ_ν и Λ_ν линейны и непрерывны, то соотношения (9) выполняются для любой функции f из A_R тогда и только тогда, когда они выполняются на элементах некоторой полной в пространстве A_R системы. В качестве полной в любом из пространств A_R, $0 < R \leqslant \infty$, системы используем здесь систему $\{\exp(\lambda z)\}_{\lambda \in \mathbb{C}}$.

Итак, если воспользоваться еще представлением (4), то рассматриваемая задача сводится к нахождению необходимых и достаточных условий, при выполнении которых существует такой коммутирующий с D^p изоморфизм S пространства A_R на себя, для которого

$$\Gamma_\nu (T_0 S \exp (\lambda z)) = \Lambda_\nu (\exp (\lambda z)), \quad \nu = 0, 1, \dots, p-1; \quad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{10}$$

В свою очередь (см. теорему A), система (10) равносильна системе

$$\Gamma_\nu \left[\sum_{j=0}^{p-1} M_j (\lambda)\, T_0 (\exp (\lambda \omega^j z)) \right] = \Lambda_\nu (\exp (\lambda z)), \quad \nu = 0, 1, \dots, p-1; \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

или же системе

$$\sum_{j=0}^{p-1} M_j (\lambda)\, \Gamma_\nu [\varphi (z, \lambda \omega^j)] = \Lambda_\nu (\exp (\lambda z)), \quad \nu = 0, 1, \dots, p-1; \quad \lambda \in \mathbb{C}, \tag{11}$$

где $\varphi (z, \lambda) = T_0 (\exp (\lambda z))$ ($\forall \lambda \in \mathbb{C}$). Фигурирующие в соотношениях (11) функции $\varphi (z, \lambda \omega^j)$ являются (по определению и с учетом (2), (3)) собственными функциями оператора L, соответствующими собственным значениям λ^p и удовлетворяющими начальным условиям

$$\varphi^{(\nu)} (0, \lambda) = \lambda^\nu, \quad \nu = 0, 1, \dots, p-1. \tag{12}$$

Поэтому искомые условия — это условия, при которых система (11) имеет решение в классе $\mathcal{K}_R (\lambda)$.

Следовательно, справедлива следующая основная здесь теорема.

Теорема 1. *Пусть L — фиксированный обыкновенный линейный дифференциальный оператор вида* (1), *а* $\{\Gamma_\nu\}_{\nu=0}^{p-1}$ *и* $\{\Lambda_\nu\}_{\nu=0}^{p-1}$ — *линейно независимые системы линейных непрерывных в A_R функционалов. Для того чтобы существовал такой оператор T преобразования оператора D^p, $p \in \mathbb{N}$, в L (т. е. $TD^p = LT$), для которого $\Gamma_\nu (Tf) = \Lambda_\nu (f)$, $\nu = 0, 1, \dots, p-1$; $f \in A_R$, необходимо и достаточно, чтобы система уравнений*

$$\sum_{j=0}^{p-1} \Gamma_\nu [\varphi (z, \lambda \omega^j)]\, x_j (\lambda) = \Lambda_\nu (\exp (\lambda z)), \quad \nu = 0, 1, \dots, p-1; \quad \lambda \in \mathbb{C}, \tag{13}$$

где $\varphi (z, \lambda)$ — собственные функции оператора L, соответствующие собственным значениям λ^p и удовлетворяющие начальным условиям (12), *была разрешимой в классе $\mathcal{K}_R (\lambda)$.*

Заметим, что если в (13) заменить λ на $\lambda \omega^s$, $s = 0, 1, \dots, p-1$, то полученные после этого системы можно записать в виде

$$\sum_{k=0}^{p-1} \Gamma_\nu [\varphi (z, \lambda \omega^k)]\, x_{k-s} (\lambda \omega^s) = \Lambda_\nu (\exp (\lambda \omega^s z)), \quad \nu, s = 0, 1, \dots, p-1,$$

где при $k < s$ $x_{k-s} (\lambda \omega^s) = x_{p+k-s} (\lambda \omega^s)$, или в матричной форме

$$\| \Gamma_\nu [\varphi (z, \lambda \omega^k)]_{\nu, k=0}^{p-1} \|\, x_{k-s} (\lambda \omega^s) \|_{k, s=0}^{p-1} = \| \Lambda_\nu (\exp (\lambda \omega^s z)) \|_{\nu, s=0}^{p-1}.$$

Но определитель матрицы $\| x_{k-s} (\lambda \omega^s) \|_{k, s=0}^{p-1}$ совпадает, очевидно, с определителем $\Delta (\lambda)$ (см. условие (7)) и поэтому отсюда вытекает следующее необходимое условие разрешимости в классе $\mathcal{K}_R (\lambda)$ системы (13):

$$\det \| \Gamma_\nu [\varphi (z, \lambda \omega^k)] \|_{\nu, k=0}^{p-1} \equiv C \det \| \Lambda_\nu (\exp (\lambda \omega^s z)) \|_{\nu, s=0}^{p-1}, \quad C = \mathrm{const} \neq 0.$$

Остановимся на некоторых конкретных примерах, ограничиваясь (для простоты) случаем $p = 2$.

Пример 1. Рассмотрим оператор $L = D^2 - E$. Легко проверить, что в этом случае

$$\varphi (z, \lambda) = \operatorname{ch} (\sqrt{1 + \lambda^2}\, z) + \frac{\lambda}{\sqrt{1 + \lambda^2}} \operatorname{sh} (\sqrt{1 + \lambda^2}\, z) \tag{14}$$

(здесь берется, как обычно, одна из ветвей квадратного корня). Пусть, далее, $a \in \mathbb{C}$ и $|a| < R$, $0 < R \leqslant \infty$, $\Lambda_\nu = \Gamma_\nu$, $\nu = 0, 1$, а линейные и непрерывные в пространстве A_R функционалы Γ_0 и Γ_1 определены соотношениями $\Gamma_0(f) = f(a)$, $\Gamma_1(f) = f'(a)$ $(\forall f \in A_R)$. Поскольку теперь $\omega = -1$, то непосредственной проверкой легко убедиться в том, что определитель соответствующей системы (13) равен -2λ, а ее решением являются функции

$$x_0(\lambda) = -\frac{e^{a\lambda}}{2\lambda}\left[\frac{1+2\lambda^2}{\sqrt{1+\lambda^2}}\operatorname{sh}(\sqrt{1+\lambda^2}a) - 2\lambda\operatorname{ch}(\sqrt{1+\lambda^2}a)\right],$$

$$x_1(\lambda) = \frac{e^{a\lambda}}{2\lambda}\,\frac{\operatorname{sh}(\sqrt{1+\lambda^2}a)}{\sqrt{1+\lambda^2}}.$$

Проверим для них условия 1—3 теоремы А. Поскольку, очевидно, $a_1^{(0)} = -\operatorname{sh} a$, а $a_1^{(1)} = \operatorname{sh} a$, то условие 1 выполняется. Тривиальным является и условие 3, так как $\Delta(\lambda) \equiv 1$.

Что же касается условия 2 при $R < \infty$ (соответственно 2′ при $R = \infty$), то здесь следует обратить внимание на следующее. Поскольку функция $\lambda x_1(\lambda)$ является целой класса $[1, 2|a|]$, то условие 2′ выполняется всегда, а условие 2 при $R < \infty$ выполняется тогда и только тогда, когда $a = 0$.

Это означает, что при $a \neq 0$ и $R < \infty$ подобрать такой оператор преобразования D^2 в $D^2 - E$, который сохранял бы начальные данные Коши в точке a, нельзя (при $a = 0$ он, конечно, совпадает с T_0).

Пример 2. Пусть, как и раньше, $L = D^2 - E$, а соответствующие функционалы определяются соотношениями $\Lambda_0(f) = \Gamma_0(f) = f(a)$, $\Lambda_1(f) = \Gamma_1(f) = f(b)$ $(\forall f \in A_R)$, где a и b — произвольные фиксированные точки круга $|z| < R$, причем $a \neq b$. В этом случае определителем системы (13) является выражение $\frac{2\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}\operatorname{sh}\sqrt{1+\lambda^2}(b-a)$, а ее решением — функции

$$x_0(\lambda) = \frac{e^{a\lambda}[\sqrt{1+\lambda^2}\operatorname{ch}\sqrt{1+\lambda^2}b - \lambda\operatorname{sh}\sqrt{1+\lambda^2}b] - e^{b\lambda}[\sqrt{1+\lambda^2}\operatorname{ch}\sqrt{1+\lambda^2}a - \lambda\operatorname{sh}\sqrt{1+\lambda^2}a]}{2\lambda\operatorname{sh}\sqrt{1+\lambda^2}(b-a)},$$

$$x_1(\lambda) = \frac{e^{b\lambda}[\sqrt{1+\lambda^2}\operatorname{ch}\sqrt{1+\lambda^2}a + \lambda\operatorname{sh}\sqrt{1+\lambda^2}a] - e^{a\lambda}[\sqrt{1+\lambda^2}\operatorname{ch}\sqrt{1+\lambda^2}b + \lambda\operatorname{sh}\sqrt{1+\lambda^2}b]}{2\lambda\operatorname{sh}\sqrt{1+\lambda^2}(b-a)}.$$

Не вдаваясь в подробности проверок условий 1, 2 (соответственно 1, 2′) теоремы А, отметим, что в рассматриваемом случае, как можно подсчитать, $\Delta(\lambda) = \frac{\operatorname{sh}(b-a)\lambda}{\lambda\operatorname{sh}\sqrt{1+\lambda^2}(b-a)}$. Поскольку эта функция не может быть постоянной (числитель и знаменатель имеют различные нули), то условие 3 теоремы А не выполняется, а следовательно, оператора T преобразования D^2 в $D^2 - E$, для которого выполнялись бы соотношения $(Tf)(a) = f(a)$ и $(Tf)(b) = f(b)$ $(\forall f \in A_R)$ (т. е. сохранялись бы «краевые данные»), нет ни в одном из пространств A_R, $0 < R \leqslant \infty$.

Пример 3. Рассмотрим, наконец, оператор $L = D^2 - 4zD + (4z^2 - 2)E$ и функционалы $\Lambda_0(f) = \Gamma_0(f) = f(a)$, $\Lambda_1(f) = \Gamma_1(f) = f(-a)$ $(\forall f \in A_R,\ |a| < R)$. Легко проверить, что оператором T_0 в этом случае является оператор умножения на функцию $\exp z^2$: $(T_0 f)(z) = \exp z^2 f(z)$ $(\forall f \in A_R)$. Кроме того, $\varphi(z, \lambda) = T_0 \exp(\lambda z) = \exp(z^2 + \lambda z)$. Поскольку решением системы (13) теперь являются функции $x_0(\lambda) \equiv e^{-a^2}$ и $x_1(\lambda) \equiv 0$, то в этом частном случае условия 1—3 теоремы A очевидны и можно утверждать, что оператор T преобразования D^2 в $L = D^2 - 4zD + (4z^2 - 2)E$, сохраняющий начальные данные Коши в точках a и $-a$ («краевые условия»), существует.

Перечень подобных примеров можно, конечно, продолжить, но мы обратим внимание еще на следующее. Поскольку оператор L всегда представим в виде $L = TD^pT^{-1}$ с некоторым изоморфизмом T пространства A_R на себя, то обыкновенное линейное дифференциальное уравнение $(Lx)(z) = g(z)$ можно свести к простейшему уравнению $(D^p x_1)(z) = g_1(z)$, где $x_1(z) = (T^{-1}x)(z)$, а $g_1(z) = (T^{-1}g)(z)$. Однако если еще задавать некоторые начальные условия, определяемые с помощью линейно независимой системы функционалов Γ_ν, $\nu=0, 1, \ldots, p-1$, то (если это не обычные условия Коши) для простейшего уравнения можно получить совершенно другую задачу. А именно, в этой общей постановке вопроса решение уравнения $(Lx)(z)=g(z)$ при заданных условиях $\Gamma_\nu(x)=\gamma_\nu$, $0\leqslant\nu\leqslant p-1$; $\gamma_\nu\in\mathbb{C}$, в случае существования изомофизма $T:TD^p=LT$, для которого выполняются соотношения $\Gamma_\nu(Tf)=\Lambda_\nu(f)$ $(\forall f\in A_R)$, всегда может быть сведено к решению уравнения $(D^px_1)(z)=g_1(z)$ (здесь $g_1(z)=(T^{-1}g)(z)$) при условиях $\Lambda_\nu(x_1)=\gamma_\nu$, $\nu=0, 1, \ldots, p-1$.

Решим теперь полностью рассматриваемую задачу в случае, когда $\Gamma_\nu(f)=f^{(\nu)}(0)$, $\nu=0, 1, \ldots, p-1$; $f\in A_R$, а $\{\Lambda_\nu\}_{\nu=0}^{p-1}$ — произвольная линейно независимая система линейных непрерывных в пространстве A_R функционалов. С этой целью напомним [4], что каждый из функционалов Λ_ν полностью определяется некоторой числовой последовательностью $\{l_k^{(\nu)}\}_{k=0}^{\infty}$, удовлетворяющей условию

$$l^{(\nu)}=\overline{\lim_{k\to\infty}}\sqrt[k]{|l_k^{(\nu)}|}<R, \tag{15}$$

причем $\Lambda_\nu(f)=\sum\limits_{k=0}^{\infty} l_k^{(\nu)}\dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}$ $(\forall f\in A_R)$.

Найдем условия существования такого оператора T преобразования D^p в L, для которого $\Gamma_\nu(Tf)=\Lambda_\nu(f)$ $(\forall f\in A_R;\ \nu=0, 1, \ldots, p-1)$ или же (что, конечно, равносильно) определим условия, при выполнении которых существует такой коммутирующий с D^p изоморфизм S пространства A_R, $0<R\leqslant\infty$, на себя, что (см. (2), (4)) $(Sf)^{(\nu)}(0)=\Lambda_\nu(f)$ $(\forall f\in A_R;$ $0\leqslant\nu\leqslant p-1)$. Эта же задача, как указывалось раньше, эквивалентна задаче об условиях существования в классе $\mathcal{K}_R(\lambda)$ решения системы $\sum\limits_{j=0}^{p-1}(e^{\lambda\omega^j z})^{(\nu)}|_{z=0}x_j(\lambda)=\Lambda_\nu(e^{\lambda z})$, $\lambda\in\mathbb{C}$; $0\leqslant\nu\leqslant p-1$, т. е. системы

$$\sum_{j=0}^{p-1}\lambda^\nu\omega^{\nu j}x_j(\lambda)=\psi_\nu(\lambda),\quad \nu=0, 1, \ldots, p-1, \tag{16}$$

где $\psi_\nu(\lambda)=\Lambda_\nu(e^{\lambda z})=\sum\limits_{k=0}^{\infty} l_k^{(\nu)}\dfrac{\lambda^k}{k!}\left(=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\psi_{k,\nu}\lambda^k\right)$.

Поскольку обратной к $\|\omega^{\nu j}\|_{\nu,j=0}^{p-1}$ является, как легко проверить, матрица $\left\|\dfrac{1}{p}\omega^{-\nu j}\right\|_{\nu,j=0}^{p-1}$, то система (16) всегда имеет решение и

$$x_j(\lambda)=\frac{1}{p}\sum_{s=0}^{p-1}\omega^{-js}\lambda^{-s}\psi_s(\lambda),\quad j=0, 1, \ldots, p-1. \tag{17}$$

Следовательно, остается лишь найти условия принадлежности векторфункции $\{x_0(\lambda), x_1(\lambda), \ldots, x_{p-1}(\lambda)\}$, каждая компонента которой определяется формулами (17), классу $\mathcal{K}_R(\lambda)$. Сделать это можно проще всего так.

Сперва заметим, что при $p\geqslant 2$ (случай $p=1$ тривиален)

$$x_j(\lambda)=\frac{1}{p}\sum_{s=0}^{p-1}\omega^{-js}\lambda^{-s}\Big(\sum_{k=0}^{s-1}\psi_{k,s}\lambda^k+\sum_{k=s}^{\infty}\psi_{k,s}\lambda^k\Big)=$$

$$=x_j^*(\lambda)+\frac{1}{p}\sum_{s=0}^{p-2}\sum_{k=0}^{s}\psi_{k,s+1}\omega^{-j(s+1)}\lambda^{k-s-1}=x_j^*(\lambda)+\frac{1}{p}\sum_{s=0}^{p-2}\times$$

$$\times\Big(\sum_{m=0}^{s}\psi_{s-m,s+1}\omega^{-j(s+1)}\lambda^{-m-1}\Big)=x_j^*(\lambda)+\frac{1}{p}\sum_{m=0}^{p-2}\Big(\sum_{s=m}^{p-2}\psi_{s-m,s+1}\omega^{-j(s+1)}\Big)\lambda^{-m-1}.$$

Это означает, что функции $x_j(\lambda)$ представимы в виде (6), причем соответствующие коэффициенты $a_m^{(j)}$ определяются соотношениями $a_{m+1}^{(j)} = \frac{1}{p}\sum_{s=m}^{p-2}\psi_{s-m,s+1}\omega^{-j(s+1)}$, $m = 0, 1, \ldots, p-2$. Поэтому при $0 \leqslant l < k \leqslant p-1$

$$\sum_{j=0}^{p-1} a_k^{(j)}\omega^{lj} = \sum_{j=0}^{p-1}\frac{1}{p}\sum_{s=k-1}^{p-2}\psi_{s-k+1,s+1}\omega^{-j(s+1)}\omega^{lj} =$$

$$= \frac{1}{p}\sum_{s=k-1}^{p-2}\psi_{s-k+1,s+1}\sum_{j=0}^{p-1}(\omega^{l-s-1})^j = 0$$

и соответствующее условие 1 всегда выполняется.

Заметим далее, исходя из представлений (16) и (17), что условие 2 (или 2′) для функций $x_j^*(\lambda)$ равносильно теперь такому же условию для целых функций $\psi_\nu(\lambda)$.

Остается найти некий эквивалент условия 3. Для его получения заменим в представлениях (17) λ на $\lambda\omega^k$, $k = 0, 1, \ldots, p-1$: $x_j(\lambda\omega^k) = \frac{1}{p}\sum_{s=0}^{p-1}\omega^{-(j+k)s}\lambda^{-s}\psi_s(\lambda\omega^k)$. Отсюда, считая, что при $j < k$ $x_{j-k}(\lambda\omega^k) = x_{p+j-k}(\lambda\omega^k)$, $x_{j-k}(\lambda\omega^k) = \frac{1}{p}\sum_{s=0}^{p-1}\omega^{-js}\lambda^{-s}\psi_s(\lambda\omega^k)$, и поэтому матрица $\| x_{j-k}(\lambda\omega^k)\|_{k,j=0}^{p-1}$ является, очевидно, произведением матриц $\|\lambda^{-s}\psi_s \times (\lambda\omega^k)\|_{k,s=0}^{p-1}$ и $\left\| \frac{1}{p}\omega^{-sj}\right\|_{s,j=0}^{p-1}$. Следовательно,

$$\Delta(\lambda) = \det \| x_{j-k}(\lambda\omega^k)\|_{k,j=0}^{p-1} = \det\|\lambda^{-s}\psi_s(\lambda\omega^k)\|_{k,s=0}^{p-1}\det\left\|\frac{1}{p}\omega^{-sj}\right\|_{s,j=0}^{p-1} =$$

$$= C_1 \det\|\psi_s(\lambda\omega^k)\|_{k,s=0}^{p-1}\lambda^{-\frac{p(p-1)}{2}}, \quad C_1 = \mathrm{const}.$$

Из полученного соотношения следует, что условие 3 равносильно соотношению

$$\Delta_1(\lambda) = \det\|\psi_s(\lambda\omega^k)\|_{s,k=0}^{p-1} \equiv C\lambda^{\frac{p(p-1)}{2}}, \quad C = \mathrm{const} \neq 0; \quad \lambda \in \mathbb{C}. \qquad (18)$$

Этим доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть L — фиксированный обыкновенный линейный дифференциальный оператор вида* (1), *а* $\{\Lambda\}_{\nu=0}^{p-1}$ — *заданная линейно независимая система линейных непрерывных в пространстве A_R, $0 < R \leqslant \infty$, функционалов. Для того чтобы существовал такой оператор T преобразования D^p в L, для которого $(Tf)^{(\nu)}(0) = \Lambda_\nu(f)$ $(\forall f \in A_R;\ \nu = 0, 1, \ldots, p-1)$, необходимо и достаточно, чтобы функции* $\psi_\nu(\lambda) = \Lambda_\nu(e^{\lambda z}) = \sum_{k=0}^{\infty} l_k^{(\nu)}\frac{\lambda^k}{k!}$, $0 \leqslant \nu \leqslant p-1$, *были целыми класса* $[1, 0]$ *при* $R < \infty$ *или функциями экспоненциального типа при* $R = \infty$ *и выполнялось условие* (18).

Заметим, что функции $\psi_\nu(\lambda)$ принадлежат классу $[1, 0]$ (являются функциями экспоненциального типа) в том и только том случае, когда (см. (15)) $l^{(\nu)} = 0$ (соответственно $l^{(\nu)} < +\infty$) при всех $\nu : 0 \leqslant \nu \leqslant p-1$.

Отметим также, что условия разрешимости соответствующих задач полностью определяются функционалами Λ_ν и не зависят от исходного оператора L.

Из доказанной теоремы 2, в частности, вытекает, что если положить $\Lambda_\nu(f) = f(a_\nu)$, $0 \leqslant \nu \leqslant p-1$, где a_ν — попарно различные (иначе система функционалов не будет линейно независимой) точки круга $|z| < R$, то рассматриваемая здесь задача никогда не имеет решения. Действительно, в этом случае $\psi_\nu(\lambda) = e^{a_\nu \lambda}$, а соответствующий (см. (18)) определитель $\Delta_1(\lambda)$ — некоторый квазиполином [5], который, конечно, совпадать с функцией $C\lambda^{\frac{p(p-1)}{2}}$, $C \neq 0$, не может.

Замечание. В рассматриваемом случае появляется возможность перехода к некоторым смешанным начальным данным Коши в точке $z = 0$. Например, если $p = 2$, а комплексные числа α, β, γ и δ таковы, что $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$, то в качестве функционалов Λ_ν, $\nu = 0, 1$, можно взять $\Lambda_0 : \Lambda_0(f) = \alpha f(0) + \beta f'(0) + k\beta f''(0)$ и $\Lambda_1 : \Lambda_1(f) = \gamma f(0) + \delta f'(0) + k\delta f''(0)$, $k \in \mathbb{C}$. Все условия теоремы 2 в этом (и других) частном случае легко проверяются.

Что же касается аналогичных задач для преобразований интегральных операторов, то здесь дело обстоит несколько иначе. Для примера рассмотрим операторы $\mathcal{J}^p$ $\left(\text{здесь } (\mathcal{J}f)(z) = \int\limits_0^z f(\zeta)\,d\zeta,\ f \in A_R\right)$ и непрерывный [6] оператор вольтеррового типа $W = \mathcal{J}^p + \sum\limits_{k=p+1}^{\infty} a_k(z)\,\mathcal{J}^k$, $a_k(z) \in A_R$. Известно [7], что и в этом случае существует такое преобразование T_0 оператора $\mathcal{J}^p$ в W, для которого выполняются условия (2), а все другие изоморфизмы $T : T\mathcal{J}^p = WT$ также получаются по формуле $T = T_0 S$, где S пробегает множество всех линейных и непрерывно обратимых операторов, перестановочных с $\mathcal{J}^p$. Учитывая вид изоморфизмов S [8], теперь легко проверить, что для существования такого преобразования T оператора $\mathcal{J}^p$ в W, для которого $(Tf)^{(\nu)}(0) = \Lambda_\nu(f)$, $\nu = 0, 1, \ldots, p-1$, необходимо и достаточно, чтобы $\Lambda_\nu(f) = \sum\limits_{k=0}^{p-1} c_{k,\nu} f^{(k)}(0)$ $(\forall f \in A_R)$ и выполнялось условие $\det \| c_{k,\nu} \|_{k,\nu=0}^{p-1} \neq 0$ (ср. с замечанием).

1. *Фаге М. К.* Операторно-аналітичні функції однієї незалежної змінної.— Львів: Вид-во Львів. ун-ту, 1959.— 174 с.
2. *Нагнибида Н. И.* Об изоморфизмах аналитических пространств, перестановочных с оператором дифференцирования // Мат. сб.— 1967.— **72**, № 2.— С. 250—260.
3. *Delsartes J., Lions J. L.* Transmutations d'opérateurs differentieles dans le domaine complexe // Comment. Math. Helv.— 1957.— **32**, N 2.— P. 113—128.
4. *Маркушевич А. И.* О базисе в пространстве аналитических функций // Мат. сб.— 1945.— **17**, № 2.— С. 211—252.
5. *Леонтьев А. Ф.* Ряды экспонент.— М. : Наука, 1977.— 536 с.
6. *Линчук С. С.* О применимости дифференциальных и интегральных операторов бесконечного порядка.— Черновцы, 1982.— 25 с.— Деп. в ВИНИТИ, № 1799-82.
7. *Нагнибида Н. И.* К вопросу о приведении операторов Вольтерра в аналитических пространствах к простейшему виду // Мат. заметки.— 1975.— **17**, № 4.— С. 625—630.
8. *Нагнибида Н. И.* Изоморфизмы пространства аналитических функций в круге, перестановочные со степенью оператора интегрирования // Теория функций, функцион. анализ и их прил.— 1968.— Вып. 6.— С. 184—188.

Черновиц. ун-т

Получено 23.12.86