УДК 517.9:519.46

Л. Ф. Баранник, В. И. Лагно

Однопараметрические подгруппы обобщенной группы Пуанкаре $P(2, n)$ и их инварианты

Широкие классы точных решений многомерных нелинейных уравнений эффективно находятся с помощью предложенного в [1] анзатца $u(x) = f(x)\varphi(\omega) + g(x)$, где $\varphi(\omega)$ — неизвестная функция от полной системы инвариантов $\omega_1(x), \ldots, \omega_n(x)$ однопараметрической подгруппы группы симметрии данного уравнения. Проблема нахождения точных решений дифференциальных уравнений стимулирует исследования инвариантов групп преобразований. Инварианты всех подгруп группы $P(1, 3)$ найдены в [2], а инварианты некоторых классов подгрупп обобщенной группы Пуанкаре $P(1, n)$ конструктивно описаны в [3].

В настоящей работе проведена классификация однопараметрических подгрупп группы Пуанкаре $P(2, n)$ относительно $P(2, n)$-сопряженности и построены полные системы инвариантов для этих подгрупп.

1. Пусть R — поле вещественных чисел; $\langle Y_1, \ldots, Y_s\rangle$ — векторное пространство или алгебра Ли над R с образующими $Y_1, \ldots, Y_s$; R^m — арифметическое m-мерное векторное пространство над R; $M(2, n)$ — $(2+n)$-мерное псевдоевклидово пространство со скалярным произведением $(X, Y) = x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3 - \ldots - x_{n+2}y_{n+2}$; $O(2, n)$ — группа линейных преобразований $M(2, n)$, сохраняющих (X, X) для каждого $X \in M(2, n)$. Будем предполагать, что $O(2, n)$ реализована в виде группы вещественных матриц порядка $n+2$.

Группой Пуанкаре $P(2,n)$ называется мультипликативная группа матриц $\begin{pmatrix}\Delta & Y\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, где $\Delta \in O(2,n)$, $Y \in R^{n+2}$.

Через AG обозначим алгебру Ли группы Ли G. Пусть E_{ik} — матрица порядка $n+3$, имеющая единицу на пересечении i-ой строки и k-го столбца, и нули на всех остальных местах ($i, k = 1, \ldots, n+3$). Базис алгебры $AP(2,n)$ образуют матрицы $J_{12} = E_{12} - E_{21}$; $J_{ab} = E_{ba} - E_{ab}$, $a < b$; $J_{ia} = -E_{ia} - E_{ai}$; $P_j = E_{j,n+3}$, $a, b = 3, \ldots, n+2$, $i = 1, 2$, $j = 1, \ldots, n+2$. Базисные элементы удовлетворяют таким коммутационным соотношениям: $[J_{\alpha\beta}, J_{\gamma\delta}] = g_{\alpha\delta}J_{\beta\gamma} + g_{\beta\gamma}J_{\alpha\delta} - g_{\alpha\gamma}J_{\beta\delta} - g_{\beta\delta}J_{\alpha\gamma}$; $[P_\alpha, J_{\beta\gamma}] = g_{\alpha\beta}P_\gamma - g_{\alpha\gamma}P_\beta$; $[P_\alpha, P_\beta] = 0$, где $g_{11} = g_{22} = -g_{33} = \ldots = -g_{n+2,n+2} = 1$, $g_{\alpha\beta} = 0$ при $\alpha \neq \beta$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, \ldots, n+2$. Генераторы поворотов $J_{\alpha\beta}$ порождают алгебру $AO(2,n)$, а генераторы трансляций P_α — коммутативный идеал N, причем $AP(2,n) = N \niplus AO(2,n)$.

В дальнейшем будем использовать такие обозначения: $O[k, l]$ — подгруппа группы $O(2,n)$, сохраняющая $g_{kk}x_k^2 + \ldots + g_{ll}x_l^2$ и x_i, $k < l$, $i = 1, \ldots, k-1$, $l+1, \ldots, n+2$; $AH[1,2] = \langle J_{12}\rangle$, $AH[3, 2d] = AH[3, 2d+$

$+1] = \langle J_{34}, \ldots, J_{2d-1,2d}\rangle$ $(2 \leqslant d \leqslant [n/2])$; $AH[3,3] = 0$, $G_a = J_{1a} - J_{a,n+2}$, $a = 2, 3, \ldots, n+1$; $H_b = J_{2b} - J_{b,n+1}$, $b = 3, \ldots, n$; $M = G_2 + G_{n+1}$; $V = \langle G_2, \ldots, G_{n+1}\rangle$; $\mathfrak{M} = \langle M, G_3, \ldots, G_n, H_3, \ldots, H_n\rangle$; $\mathbf{D} = -J_{1,n+2} + J_{2,n+1}$; $S = 1/2(J_{12} + J_{n+1,n+2} - J_{1,n+1} - J_{2,n+2})$; $T = 1/2(J_{12} + J_{n+1,n+2} + J_{1,n+1} + J_{2,n+2})$; $Z = J_{1,n+2} + J_{2,n+1}$.

В [4] установлено, что нормализатор изотропного пространства $\langle P_1 + P_{n+2}, P_2 + P_{n+1}\rangle$ в алгебре $AO(2,n)$ совпадает с алгеброй $A\,\mathrm{Opt}(1, n-1) = \mathfrak{M} \mathbin{\supset\!\!\!\!+} (AO[3,n)] \oplus \langle \mathbf{D}, S, T, Z\rangle)$. Нормализатор одномерного изотропного пространства $\langle P_1 + P_{n+2}\rangle$ совпадает с алгеброй $A\tilde{P}(1, n-1) = V \mathbin{\supset\!\!\!\!+} (AO[2, n+1] \oplus \langle J_{1,n+2}\rangle)$.

Лемма. *Ненулевые подалгебры алгебры $\langle \mathbf{D}, S, T\rangle$ исчерпываются относительно сопряженности, определяемой группой внутренних автоморфизмов алгебры $\langle \mathbf{D}, S, T\rangle$, алгебрами $\langle \mathbf{D}\rangle$, $\langle T\rangle$, $\langle S+T\rangle$, $\langle \mathbf{D}, T\rangle$, $\langle \mathbf{D}, S, T\rangle$.*

Теорема 1. *Если n — четное число и $n \geqslant 4$, то алгебра $AO(2,n)$ обладает относительно $O(2,n)$-сопряженности тремя максимальными разрешимыми подалгебрами $AH[1,2] \oplus AH[3, n+2]$; $\mathfrak{M} \mathbin{\supset\!\!\!\!+} (AH[3,n] \oplus \langle \mathbf{D}, T, Z\rangle)$; $\mathfrak{M} \mathbin{\supset\!\!\!\!+} (AH[3,n] \oplus \langle S+T, Z\rangle)$. Их размерности равны соответственно $(n+2)/2$, $(5n-2)/2$, $(5n-4)/2$.*

Если n — нечетное число и $n \geqslant 3$, то алгебра $AO(2,n)$ обладает относительно $O(2,n)$-сопряженности четырьмя максимальными разрешимыми подалгебрами $V \mathbin{\supset\!\!\!\!+} (AH[3, n+1] \oplus \langle J_{1,n+2}\rangle)$; $AH[1,2] \oplus AH[3, n+1]$; $\mathfrak{M} \mathbin{\supset\!\!\!\!+} (AH[3,n] \oplus \langle \mathbf{D}, T, Z\rangle)$; $\mathfrak{M} \mathbin{\supset\!\!\!\!+} (AH[3,n] \oplus \langle S+T, Z\rangle)$. Их размерности равны соответственно $(n+1)/2$, $(3n+1)/2$, $(5n-3)/2$, $(5n-5)/2$.

Максимальные разрешимые подалгебры алгебры $AO(2,2)$ исчерпываются относительно $O(2,2)$-сопряженности такими алгебрами: $\langle J_{12}, J_{34}\rangle$, $\langle \mathbf{D}, T, Z\rangle$, $\langle S+T, Z\rangle$. Во всех случаях записанные алгебры попарно не сопряжены.

Доказательство. Пусть $n \geqslant 3$, L — максимальная разрешимая подалгебра алгебры $AO(2,n)$. Если все неприводимые L-инвариантные подпространства пространства $M(2,n)$ невырождены, то $L = AH[1,2] \oplus AH[3, n+2]$. Если в $M(2,n)$ существует изотропное L-инвариантное подпространство, то L сопряжена подалгебре алгебры $A\tilde{P}(1, n-1)$ или алгебры $A\,\mathrm{Opt}(1, n-1)$

Известно, что при четном n алгебра $AO[2, n+1]$ обладает только одной максимальной разрешимой подалгеброй $B = \langle H_3, \ldots, H_n\rangle \mathbin{\supset\!\!\!\!+} (AH[3,n] \oplus \langle J_{2,n+1}\rangle)$, а при нечетном n кроме этой подалгебры в $AO[2, n+1]$ существует еще одна максимальная разрешимая подалгебра $AH[3, n+1]$. Так как $[G_2, P_2 + P_{n+1}] = P_1 + P_{n+2}$, $[G_{n+1}, P_2 + P_{n+1}] = -(P_1 + P_{n+2})$, то G_2, G_{n+1} содержатся в $A\,\mathrm{Opt}(1, n-1)$, а значит, $V \mathbin{\supset\!\!\!\!+} (B \oplus \langle J_{1,n+2}\rangle)$ является подалгеброй алгебры $A\,\mathrm{Opt}(1, n-1)$. Алгебра $V \mathbin{\supset\!\!\!\!+} (AH[3, n+1] \oplus \langle J_{1,n+2}\rangle)$ (n — нечетное число) является максимальной разрешимой подалгеброй алгебры $AO(2,n)$.

Из леммы и того факта, что ортогональная алгебра обладает только одной максимальной разрешимой подалгеброй, совпадающей с ее подалгеброй Картана, вытекает, что максимальные разрешимые подалгебры алгебры $A\,\mathrm{Opt}(1, n-1)$ исчерпываются алгебрами $\mathfrak{M} \mathbin{\supset\!\!\!\!+} (AH[3,n] \oplus \langle \mathbf{D}, T, Z\rangle)$, $\mathfrak{M} \mathbin{\supset\!\!\!\!+} (AH[3,n] \oplus \langle S+T, Z\rangle)$. Поскольку эти алгебры имеют разные размерности, то они не сопряжены. Теорема доказана.

2. Теорема 2. *Пусть α, β, $\lambda \in R$ и $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $0 < \lambda < 1$; $t = 1, \ldots, [(n-2)/2]$; $s = 1, \ldots, [(n-3)/2]$; $X_l = \alpha_1 J_{34} + \alpha_2 J_{56} + \ldots + \alpha_l J_{2l+1,2l+2}$, где $\alpha_1 = 1$, $0 < \alpha_2 \leqslant \ldots \leqslant \alpha_l \leqslant 1$ при $l > 1$. Одномерные подалгебры алгебры $AO(2,n)$ исчерпываются относительно $O(2,n)$-сопряженности такими алгебрами: $F_1 = \langle \mathbf{D}\rangle$; $F_2 = \langle T\rangle$; $F_i = \langle M + (-1)^{i-1} 2T\rangle$, $i = 3, 4$; $F_5 = \langle \mathbf{D} + \lambda Z\rangle$; $F_6 = \langle \mathbf{D} + Z\rangle$; $F_7 = \langle T + Z\rangle$; $F_8 = \langle S + T + \alpha Z\rangle$; $F_9 = \langle S + T\rangle$; $F_i = \langle S + T + (-1)^i M\rangle$, $i = 10, 11$; $F_{12} = \langle G_3 + H_4\rangle$; $F_{13} = \langle G_3 + T\rangle$; $F_{14} = \langle 2G_3 + \mathbf{D} + Z\rangle$; $F_{15} = \langle X_l\rangle$, $l = 1, \ldots, [n/2]$; $F_{16} = \langle X_l + G_{2l+3}\rangle$ ($l = t$ при нечетном n; $l = s$ при четном n); $F_{17} = \langle X_s + G_{2s+3} + H_{2s+4}\rangle$, $2s + 4 \leqslant n$; $F_{18} = \langle X_s + G_{2s+3} + T\rangle$; $F_{19} = \langle X_s + \alpha(G_{2s+3} + \mathbf{D} +$*

$+ Z)\rangle$; $F_{20} = \langle X_t + \alpha \mathbf{D}\rangle$; $F_{21} = \langle X_t + T\rangle$; $F_{22} = X_t + M + 2T\rangle$; $F_{23} = \langle X_t + \alpha(\mathbf{D} + Z)\rangle$; $F_{24} = \langle X_t + \alpha\mathbf{D} + \beta Z\rangle$, $\alpha > \beta$; $F_{25} = \langle X_t + \alpha(T + Z)\rangle$; $F_{26} = \langle X_t + \alpha(S + T)\rangle$; $F_{27} = \langle X_t + \alpha(S + T) + \beta Z\rangle$; $F_j = \langle X_t + \alpha(S + T + (-1)^j M)\rangle$, $j = 28, 29$; $F_{30} = \langle X_t + S + T + G_3 - H_4\rangle$, $s \geqslant 2$; $F_{31} = \langle J_{12}\rangle$; $F_{32} = \langle X_l + \alpha J_{12}\rangle$, $l = 1, \ldots, [n/2]$; $F_{33} = \langle X_{(n-1)/2} + \alpha J_{1,n+2}\rangle$ (*n — нечетное число*).

Доказательство. Одномерные подалгебры алгебры $AH[3, n]$ исчерпываются относительно $O(2, n)$-сопряженности алгебрами $\langle X_t\rangle$. Группа $O[3, n]$ является группой изометрий пространств $V = \langle G_3, \ldots, G_n\rangle$ и $W = \langle H_3, \ldots, H_n\rangle$. По теореме Витта одномерные подпространства пространства $V + W$ исчерпываются относительно $O[3, n]$-сопряженности такими пространствами: $\langle G_3 + \lambda H_3 + \mu H_4\rangle$, $\langle H_3\rangle$. Применив автоморфизмы $\exp(\theta T)$, $\exp(\pi/2(S + T))$ и $\exp(tJ_{2,n+1})$, убеждаемся, что одномерные подпространства пространства $V + W$ исчерпываются относительно $O(2, n)$-сопряженности пространствами $\langle G_3\rangle$ и $\langle G_3 + H_4\rangle$. Алгебра $\langle \mathbf{D} + \lambda M\rangle$ $\lambda \neq 0$, сопряжена алгебре $\langle T + Z\rangle$, алгебра $\langle M\rangle$ — алгебре $\langle T\rangle$, алгебра $\langle G_3\rangle$ — алгебре $\langle M - 2T\rangle$. Пусть $X = \sum_{a=b}^{c} J_{2a-1,2a} + S + T + \sum_{a=b}^{c} \alpha_a (G_{2a-1} - H_{2a})$. В силу теоремы 2 [5] существует такой $O(2, n)$-автоморфизм φ алгебры $AO(2, n)$, что $\varphi(X) = \sum_{a=b}^{c} J_{2a-1,2a} + S + T + \alpha(G_{2b-1} - H_{2b})$. Если $\alpha > 0$, то автоморфизм $\exp(\theta Z)$ позволяет обратить α в 1. Теорема доказана.

Замечание. Для каждой из выписанных подалгебр n принимает такие значения, для которых есть смысл говорить о данной подалгебре.

Запись $Y_{j,k}$: $T_1, \ldots, T_m$ означает, что $k = 1, \ldots, m$, $Y_{j,1} = T_1, \ldots, Y_{j,m} = T_m$.

Теорема 3. *Пусть* $\delta, \rho \in R$, $\delta, \rho > 0$; $Z_0 = 0$, $F_0 = \langle Z_0\rangle$; $F_j = \langle Z_j\rangle$, $j = 1, \ldots, 33$, *пробегает множество одномерных подалгебр алгебры* $AO(2, n)$, *выписанное в теореме 2. Тогда одномерные подалгебры алгебры* $AP(2, n)$ *исчерпываются относительно* $P(2, n)$*-сопряженности алгебрами* F_j *и* $F_{j,k} = \langle Z_j + Y_{j,k}\rangle$, *где* $Y_{j,k}$ *удовлетворяет следующим условиям:* $Y_{j,k} : \delta P_1$, δP_{n+2}, $P_1 + P_{n+2}$, $j = 0$, $\delta = 1$; $j = 23$; $Y_{j,1} = \delta P_3$, $j = 1, 5, 7, 8, \ldots, 11, 31$; $Y_{2,k} : P_3$, P_{n+2}; $Y_{3,k} : P_3$, P_{n+1}; $Y_{j,k} : \delta P_1$, δP_3, $P_1 - P_3$ ($j = 4$, $\delta = 1$; $j = 6$); $Y_{4,4} = P_{n+1}$; $Y_{12,k} : P_5$, P_{n+1}, P_{n+2}, $P_{n+1} + \delta P_{n+2}$; $Y_{13,k} : P_4$, P_{n+1}; $Y_{14,k} : \delta P_4$, δP_{n+2}; $Y_{15,k} : \delta P_1$, δP_{2l+3}, $P_1 + P_{2l+3}$, $l \leqslant [(n-1)/2]$; $Y_{16,k} : \delta P_2$, δP_{2l+4}, $P_2 + P_{2l+4}$, δP_{n+2}; $Y_{17,k} : \delta P_{2s+5}$, $\delta P_{n+1} + \rho P_{n+2}$, δP_{n+1}, δP_{n+2}; $Y_{18,k} : \delta P_{2s+4}$, δP_{n+1}; $Y_{19,k} : \delta P_{2s+4}$, δP_{n+2}; $Y_{j,1} = \delta P_{2s+3}$, $j = 20, 21, 24, 25, \ldots, 30$; $Y_{j,2} = \delta P_{n+2}$ ($j = 21$; $j = 32$, $2l < n$); $Y_{22,k} : \delta P_{n+2}$, δP_{n+1}; $Y_{33,1} = \delta P_2$.

3. Алгебру $AP(2, n)$ будем рассматривать как алгебру дифференциальных операторов, определенных в пространстве скалярных функций $u(x)$, где $x \in M(2, n)$. Имеем $J_{12} = x_1\partial_2 - x_2\partial_1$, $J_{ab} = x_b\partial_a - x_a\partial_b$, $J_{ia} = x_i\partial_a + x_a\partial_i$, $P_j = \partial_j$ ($\partial_j = \partial/\partial x_j$; $a, b = 3, \ldots, n + 2$; $i = 1, 2$; $j = 1, \ldots, n + 2$).

Пусть $L = \langle X\rangle$ — одномерная подалгебра алгебры $AP(2, n)$. Вещественная функция $u(x)$ называется инвариантом алгебры L, если $X(u(x)) = 0$. Известно, что существует система функционально независимых инвариантов $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ алгебры L, обладающая тем свойством, что любой инвариант алгебры L имеет вид $\Psi(f_1(x), \ldots, f_{n+1}(x)$. Любую такую систему функций будем называть полной системой инвариантов (ПСИ) алгебры L, а ее составляющие — основными инвариантами.

Пусть $y = y(x) = x_1 + x_{n+2}$, $\bar{y} = \bar{y}(x) = x_1 - x_{n+2}$, $z = z(x) = x_2 + x_{n+1}$, $z = z(x) = x_2 + x_{n+1}$, $h_a = h_a(x) = x_{2a-1}^2 + x_{2a}^2$, $\varphi = \varphi(x) = \arcsin[\bar{y}(\bar{y}^2 + \bar{z}^2)^{-1/2}]$, $\psi_a = \psi_a(x) = \operatorname{arctg}(x_{2a}x_{2a-1}^{-1})$, $v_1 = \bar{y}^2 + \bar{z}^2$, $v_2 = 2\bar{y}\bar{z}$, $v_3 = \bar{y}x_4 + \bar{z}x_3$, $v_4 = \bar{y}x_3 - \bar{z}x_4$, $v_5 = \bar{y}z - y\bar{z}$, $v_6 = \bar{y}y + \bar{z}z$, $v_7 = y^2 + z^2$.

Если $u_{j1} = f_1(x), \ldots, u_{js}(x) = f_s(x)$, то будем употреблять обозначение $u_{jk} : f_1, \ldots, f_s$.

Предложение 1. *ПСИ алгебры* F_j, $j = 1, \ldots, 11$, *составляют* $x_3, \ldots, x_n$ *и функции* u_{jk}, *задаваемые следующим образом:* $u_{1k} : y\bar{y}$, $z\bar{z}$, yz;

$u_{2k}: y, \bar{z}, v_6$; $u_{3k}: x_1^2 + z\bar{z}, \bar{z}, x_{n+2}$; $u_{4k}: x_1, \bar{z}, z\bar{z} - x_{n+2}^2$; $u_{5k}: y\bar{y}, z\bar{z}, y^{1+\lambda}z^{1-\lambda}$; $u_{6k}: x_1, z\bar{z}, x_{n+2}$; $u_{7k}: y\bar{z}, \ln y - zy^{-1}, v_6$; $u_{8k}: v_1 x_7, 2\lambda \operatorname{arctg}(yz^{-1}) + \ln v_7, 2\lambda \operatorname{arctg}(\bar{z}\bar{y}^{-1}) + \ln v_1$; $u_{9k}: x_1^2 + x_2^2, x_{n+1}^2 + x_{n+2}^2, \operatorname{arctg}(x_1 x_2^{-1}) + \operatorname{arctg}(x_{n+1} x_{n+2}^{-1})$; $u_{jk}: v_1, v_6, 2v_1\varphi + (-1)^j v_5, j = 10, 11'$.

Запись $F: f_1(x), \ldots, f_s(x)$ *означает, что функции* $f_1(x), \ldots, f_s(x)$ *составляют ПСИ алгебры* F.

Предложение 2. F_{12}: $\bar{y}, \bar{z}, y\bar{y} - x_3^2, z\bar{z} - x_4^2, \bar{y}x_4 - \bar{z}x_3, x_5, \ldots, x_n$; F_{13}: $y_1 = \bar{y}^2 + 2x_3\bar{z}, y_2 = 3\bar{z}^2 y + 3\bar{y}y_1 - \bar{z}^3, \bar{y}^4 + 12\bar{z}^3 z + 12 y_2\bar{y} - 6y_1\bar{y}^2, \bar{z}, x_4, \ldots, x_n$; F_{14}: $\bar{y}, y\bar{y} - x_3^2, z\bar{z}, x_3 - \bar{y}\ln z, x_4, \ldots, x_n$.

Предложение 3. *ПСИ алгебры* $\langle X_m \rangle$ *от переменных* $x_3, \ldots, x_{2m+2}$, *составляют функции* $h_a, \alpha_i\psi_2 - \psi_{i+1}, a = 2, \ldots, m+1; i = 2, \ldots, m$.

Предложение 4. *Пусть* $F_j = \langle X_s + Y_j \rangle, j = 16, \ldots, 29$. *ПСИ алгебры* F_j *составляют основные инварианты алгебры* $\langle x_s \rangle$ *от переменных* $x_3, \ldots, x_{2s+2}$, *основные инварианты алгебры* $\langle y_j \rangle$ *от переменных* $x_1, x_2, x_{2s+3}, \ldots, x_{n+2}$ *и функция* u_j, *где* $u_{16} = \bar{y}\psi_2 + x_{2l+3}$; $u_{17} = \bar{y}\psi_2 + x_{2s+3}$; $u_{18} = \bar{z}\psi_2 - \bar{y}$; $u_{19} = \alpha\bar{y}\psi_2 + x_{2l+3}$; $u_{20} = \ln\bar{y} + \alpha\psi_2$; $u_{21} = y\psi_2 + \bar{z}$; $u_{21} = x_1 - 2\bar{z}\psi_2$; $u_{23} = \ln\bar{z} - 2\alpha\psi_2$; $u_{24} = \ln\bar{y} - (\beta - \alpha)\psi_2$; $u_{25} = \ln\bar{z} - \alpha\psi_2$; $u_{26} = \psi_1 + \alpha\psi_2$; $u_{27} = \ln v_1 - 2\beta\psi_2$; $u_j + v_5 + (-1)^j 2\alpha v_1\psi_2, j = 28, 29$.

Предложение 5. *ПСИ алгебры* F_{30} *составляют функции* $v_1, v_3, v_5 + v_3 \arcsin v_2 v_1^{-1}, v_1 v_6 - v_4^2, v_1 \arcsin(v_2 v_1^{-1}) - 2v_4, h_a, \alpha_i \arcsin(v_2 v_1^{-1}) + 2\psi_{i+1}, x_{2s+3}, \ldots, x_n, a = 3, \ldots, s+1; i = 2, \ldots, s$; *алгебры* F_{31} — *функции* $h_1, x_3, \ldots, x_{n+2}$; *алгебры* F_{32} — *функции* $h_a, \alpha_i\psi_1 + \alpha\psi_{i+1}, x_{2l+3}, \ldots, x_{n+2}, a = 1, \ldots, l+1; i = 1, \ldots, l$, *а алгебры* F_{33} — *такие функции:* $y\bar{y}, x_2, h_a, \alpha_i\psi_2 - \psi_{i+1}, \ln\bar{y} - \alpha\psi_2$ $(a = 2, \ldots, n+1)/2; i = 2, \ldots, (n-1)/2$.

Предложение 6. *Пусть* $F_{j,k} = \langle Z_j + Y_{j,k} \rangle$, *где* $Z_j \neq 0$ *и* $[Z_j, Y_{j,k}] = 0$ (*см. теорему 3*). *ПСИ алгебры* $F_{j,k}$ *составляют основные инварианты алгебры* $F_j = \langle Z_j \rangle$ *от переменных* x_a, *не аннулируемых* Z_j, *основные инварианты алгебры* $\langle Y_{j,k} \rangle$ *от остальных переменных и функция* $u_{j,k}$, *определяемая следующим образом:* $u_{1,1} = x_3 + \delta \ln\bar{y}$; $u_{2,1} = \bar{y} + 2x_3\bar{z}$; $u_{3,1} = x_1 + \bar{z}x_3$; $u_{4,1} = x_1\bar{z} - x_{n+2}$; $u_{4,2} = x_3\bar{z} - x_{n+2}$; $u_{4,3} = (x_1 - x_3)\bar{z} - x_{n+2}$; $u_{5,1} = \delta \ln y - (\lambda - 1)x_3$; $u_{6,1} = x_1 + \delta \ln\bar{z}$; $u_{6,2} = x_3 + \delta\ln\bar{z}$; $u_{6,3} = x_1 - x_3 + 2\ln\bar{z}$; $u_{7,1} = x_3 + \delta\ln\bar{z}$; $u_{8,1} = \delta\ln v_1 + 2\lambda x_3$; $u_{9,1} = \delta \operatorname{arctg}(x_{n+1}, x_{n+2}^{-1}) - x_3$; $u_{j,1} = \delta v_5 + 2v_1 x_3, j = 10, 11$; $u_{12,1} = x_4 - x_5\bar{z}$; $u_{13,1} = \bar{y} + \bar{z}x_4$; $u_{14,1} = 2x_4 - \delta\ln\bar{z}$; $u_{15,1} = x_1 + \delta\psi_2$; $u_{15,2} = x_{2s+3} + \delta\psi_2$; $u_{15,3} = x_1 + x_{2s+3}$; $u_{16,1} = x_2\bar{y} - \delta x_{2l+3}$; $u_{16,2} = x_{2l+4}\bar{y} - \delta x_{2l+3}$; $u_{16,3} = \bar{y}(x_2 + x_{2l+4}) - 2x_{2l+3}$; $u_{17,1} = \delta\psi_2 + x_{2s+5}$; $u_{18,1} = \delta\bar{y} + zx_{2s+4}$; $u_{19,1} = \delta x_{2s+3} - \bar{y}x_{2s+4}$; $u_{20,1} = \delta\ln\bar{y} - \alpha x_{2s+3}$; $u_{21,1} = x_{2s+3}y - \delta z$; $u_{22,1} = \alpha x_1 + 2\bar{z}x_{n+2}$; $u_{23,1} = 2\alpha x_1 + \delta\ln\bar{z}$; $u_{23,2} = 2\alpha x_{n+2} + \delta\ln z$; $u_{23,3} = \alpha y + \ln\bar{z}$; $u_{24,1} = \delta\ln\bar{y} + (\beta - \alpha)x_{2s+3}$; $u_{25,1} = \delta\ln\bar{z} + x_{2s+3}$; $u_{26,1} = \delta\psi_1 - \alpha x_{2s+3}$; $u_{27,1} = \delta\ln v_1 + 2\beta x_{2s+3}$; $u_{j,1} = \delta v_5 + (-1)^{j-1} 2\alpha v_1 x_{2s+3}, j = 28, 29$; $u_{30,1} = \arcsin(v_2 v_1^{-1}) - 2x_{2s+3}$; $u_{31,1} = \delta\psi_1 - x_3$; $u_{32,1} = \delta\psi_2 + x_{n+2}$; $u_{33,1} = \delta\psi_2 + x_2$.

1. *Фущич В. И.* Симметрия в задачах математической физики // Теорет.-алгебр. исслед. в мат. физике.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1981.— С. 6—28.
2. *Grundland A. M., Harnad J., Winternitz P.* Symmetry reduction for nonlinear relativistically invariant equations // J. Math. Phys.— 1984.— 25, N 4.— P. 791—806.
3. *Баранник Л. Ф., Фущич В. И.* Инварианты подгрупп обобщенной группы Пуанкаре *P* (1, *n*).— Киев, 1986.— 40 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 86.86).
4. *Баранник Л. Ф., Лагно В. И., Фущич В. И.* Подалгебры обобщенной алгебры Пуанкаре *AP* (2, *n*).— Киев, 1985.— 50 с.— (Препринт/АН УССР. Ин-т математики; 85.89).
5. *Фущич В. И., Баранник А. Ф., Баранник Л. Ф.* Непрерывные подгруппы обобщенной группы Евклида // Укр. мат. журн.— 1986.— 38, № 1.— С. 67—72.

Полтав. пед. ин-т

Получено 26.03.87