УДК 517.9

Я. С. Барис, О. Б. Лыкова

Об асимптотических разложениях инвариантных многообразий. III

1. В теории нелинейных дифференциальных уравнений важное значение имеют приближенные методы, как аналитические, так и численные. Среди аналитических методов, применяемых для решения прикладных задач, наиболее эффективными являются асимптотические методы [1—8]. В работах [9, 10] для построения приближенных инвариантных многообразий (ИМ) [11, 12] был развит метод асимптотических разложений по малому параметру.

В ряде случаев для систем дифференциальных уравнений целесообразно строить приближенные инвариантные многообразия в виде разложений по координатам. Этому вопросу и посвящена настоящая работа.

Рассмотрим автономную систему дифференциальных уравнений

$$dx/dt = Ax + f(x, y), \qquad dy/dt = By + g(x, y), \tag{1}$$

правые части которой определены и непрерывны на множестве

$$R_x^m \times V, \tag{2}$$

где V — некоторая область пространства R_y^n, содержащая точку $y = 0$; A, B — постоянные $m \times m$, $n \times n$ матрицы.

Для системы (1) построим приближенное ИМ

$$\tilde{M} = \{(x, y) : y = \Phi(x), \quad x \in R_x^m\}, \tag{3}$$

установим условия существования локального ИМ [5, 13 — 15]

$$\mathfrak{M}_л = \{(x, y) : y = \varphi(x), \quad x \in U_r\}, \tag{4}$$

где U_r — шар радиуса r в R_x^m с центром в нуле, и получим оценку погрешности соответствующего (4) приближенного локального ИМ.

2. Задачу построения приближенного ИМ системы (1) будем решать при следующих предположениях.

1°. Вектор-функции $f(x, y)$, $g(x, y)$ допускают асимптотические разложения вида [15, 16]

$$f(x, y) = f_2(x, y) + \ldots + f_k(x, y) + o(\|(x, y)\|^k),$$

$$g(x, y) = g_2(x, y) + \ldots + g_k(x, y) + o(\|(x, y)\|^k),$$

$\|(x, y)\| \to 0$, где f_i, g_i — формы i-й степени с векторными коэффициентами.

2°. Собственные значения $\lambda_q(A)$ матрицы A и собственные значения $\lambda_j(B)$ матрицы B подчинены условию $p_1\lambda_1(A) + p_2\lambda_2(A) + \ldots + p_m\lambda_m(A) \neq \neq \lambda_j(B)$, $j = 1, \ldots, n$, где $p_1, \ldots, p_m$ — целые неотрицательные числа, связанные соотношением $p_1 + p_2 + \ldots + p_m = i$, $i = 1, \ldots, k$.

Известно, что, если вектор-функция $\Phi(x)$ является решением уравнения

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}[Ax + f(x, \Phi)] = B\Phi + h(x, \Phi) + b(x), \tag{5}$$

то многообразие (3) является приближенным ИМ с невязкой $(0, b)$ системы (1).

Будем искать решение уравнения (5) в виде

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^{k} \Phi_i(x), \tag{6}$$

где $\Phi_i(x) = \operatorname{colon}[\Phi_{i1}(x), \ldots, \Phi_{in}(x)]$, а $\Phi_{ij}(x)$ — формы i-й степени при каждом $j = 1, \ldots, n$.

Подставляя разложение (6) в уравнение (5), получаем

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{\partial \Phi_i}{\partial x}\left[Ax + f\left(x, \sum_{i=1}^{k} \Phi_i\right)\right] = \sum_{i=1}^{k} B\Phi_i + g\left(x, \sum_{i=1}^{k} \Phi_i\right) + b(x).$$

Приравнивая здесь формы одинаковой степени в левой и правой частях, находим

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial x} Ax = B\Phi_i + u_i(x), \quad i = 1, \ldots, k, \tag{7}$$

где форма u_i не зависит от формы Φ_j при $j \geqslant i$, $i = 1, \ldots, k$.

Приравнивая оставшиеся члены, получаем выражение для невязки

$$b(x) = R_k\left[\frac{\partial \Phi}{\partial x} f(x, \Phi) - g(x, \Phi)\right], \tag{8}$$

в которой $R_k(g) = g(x) - \sum_{i=1}^{k} g_i(x)$ ($g_i(x)$ — форма i-й степени в разложении функции g).

При выполнении условий 2 согласно теореме И. Г. Малкина [16, с. 119] существует одна и только одна форма $\Phi_i(x)$, представляющая собой решение уравнения (7). При этом форму Φ_i можно найти методом неопределенных коэффициентов.

В результате можем сформулировать следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть относительно системы* (1) *выполняются условия* 1°, 2°. *Тогда существует единственное приближенное ИМ вида* (3) *с невязкой* $(0, b)$ *системы* (1), *в котором функция* $\Phi(x)$ *представима в виде асимптотического разложения* (6).

При этом функция $b(x)$ *определяется формулой* (8), *а форму* Φ_i *в разложении* (6) *можно найти методом неопределенных коэффициентов из уравнения* (7) *при каждом* $i = 1, \ldots, k$.

3. Укажем некоторые частные случаи. Легко видеть, что условие 2° выполняется в каждом из следующих трех случаев: а) $\operatorname{Re}\lambda q(A) = 0$, $\operatorname{Re}\lambda_j(B) \neq 0$; б) $\operatorname{Re}\lambda q(A) \leqslant 0$, $\operatorname{Re}\lambda_j(B) > 0$; в) $\operatorname{Re}\lambda q(A) \geqslant 0$, $\operatorname{Re}\lambda_j(B) < 0$.

Приближенные ИМ в указанных случаях называются центральным приближенным ИМ (случай а)), центр-устойчивым приближенным ИМ (случай б)), центр-неустойчивым приближенным ИМ (случай в)) [17]. В этих случаях уравнение $\partial y/\partial t = By$ является э-дитохомичным и, следовательно, имеет функцию Грина

$$G(t) = \begin{cases} e^{Bt}P, & t < 0, \\ e^{Bt}(P - E), & t > 0, \end{cases} \tag{9}$$

где E — единичная матрица, P — проектор, который в случае б) равен нулевой матрице, а в случае в) — единичной матрице. Форму $\Phi_i(x)$ можно найти, учитывая, что ее график является инвариантным многообразием системы

$$dx/dt = Ax, \quad dy/dt = By + u_i(x). \tag{10}$$

В случае а) имеем

$$\Phi_i(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t - s) u_i(\mathrm{e}^{A(s-t)}x) ds,$$

или, полагая $s - t = \sigma$,

$$\Phi_i(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(-\sigma) u_i(e^{A\sigma}x) d\sigma. \tag{11}$$

В случае б)

$$\Phi_i(x) = -\int_{0}^{\infty} e^{-B\sigma} u_i(e^{A\sigma}x) d\sigma. \tag{11'}$$

в случае в)

$$\Phi_i(x) = \int_{-\infty}^{0} e^{-B\sigma} u_i(e^{A\sigma}x) d\sigma. \tag{11''}$$

Определив таким образом вектор-функции $\Phi_i(x)$, мы тем самым найдем для системы (1) вектор-функцию $\Phi(x)$, задающую приближенное ИМ с невязкой $(0, b)$.

4. Перейдем теперь к вопросу обоснования развитого способа построения приближенного ИМ системы (1), которое можно свести к доказательству существования точного ИМ и к получению оценки погрешности построенного приближенного ИМ.

Однако во многих случаях мы не можем, применяя принцип сжимающих отображений (на котором основан наш метод доказательства существования ИМ), установить существование ИМ системы (1), например в случае полиномиальных правых частей, а может установить существование лишь локального ИМ этой системы. Однако, поскольку локальные ИМ мы рассматриваем для $\| x \| < r$, а исходная система задана для $x \in R_x^m$, воспользуемся известной процедурой продолжения функций [18]. С этой целью возьмем некоторое положительное число r и обозначим

$$U_r = \{x \in R_x^m, \quad \| x \| < r\}. \tag{12}$$

Рассмотрим теперь систему дифференциальных уравнений

$$dx/dt = Ax + \hat{f}(x,y), \quad dy/dt = By + \hat{g}(x, y), \tag{13}$$

где

$$\hat{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & x \in U_r, \quad y \in V, \\ f\left(\dfrac{x}{\| x \|} r, y\right), & x \in R_x^m \setminus U_r, \; y \in V, \end{cases}$$

$$\hat{g}(x, y) = \begin{cases} g(x, y), & x \in U_r, \quad y \in V, \\ g\left(\dfrac{x}{\| x \|} r, y\right), & x \in R_x^m \setminus U_r, \; y \in V. \end{cases}$$

Систему (13) будем называть вспомогательной по отношению к системе (1).

Заметим, что функции $\hat{f}$, $\hat{g}$ наследуют такие свойства функций f, g на $U_r \times V$, как непрерывность, ограниченность (той же константой) и липшицевость (с теми же константами) [18].

Сужение инвариантного многообразия системы (13) на U_r является локальным ИМ системы (1).

Введем теперь функцию

$$\hat{b}(x) = \begin{cases} b(x), & x \in U_r, \\ b\left(\dfrac{x}{\| x \|} r\right), & x \in R_x^m \setminus U_r \end{cases}$$

и рассмотрим систему

$$dx/dt = Ax + \hat{f}(x, y), \; dy/dt = By + \hat{g}(x, y) + \hat{b}(x). \tag{14}$$

Сужение инвариантного многообразия системы (14) на U_r является локальным приближенным ИМ с невязкой $(0, b)$ системы (1).

Установим условия существования инвариантных многообразий систем (13) и (14). Обозначим постоянные $K > 1$, $\chi \geqslant 0$ такие, что $\| e^{At} \| \leqslant \leqslant K e^{\chi |t|}$.

Имеет место следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть относительно систем* (13), (14) *выполняются условия:*

3°. *Вектор-функции* $\hat{f}$, $\hat{g}$, $\hat{b}$ *непрерывны, ограничены и удовлетворяют условиям*

$$\| \hat{f}(\bar{x}, \bar{y}) - \hat{f}(x, y) \| \leqslant l_1 \| \bar{x} - x \| + l_2 \| \bar{y} - y \|,$$

$$\| \hat{g}(\bar{x}, \bar{y}) - \hat{g}(x, y) \| \leqslant L_1 \| \bar{x} - x \| + L_2 \| \bar{y} - y \|,$$

$$\| \hat{g}(x, y) + \hat{b}(\bar{x}) - \hat{g}(x, y) - \hat{b}(x) \| \leqslant L_1 \| \bar{x} - x \| + L_2 \| \bar{y} - y \|,$$

$$\| \hat{g}(x, y) \| \leqslant N_0, \; \| \hat{g}(x, y) + \hat{b}(x) \| \leqslant N_0,$$

где $L_1 \geqslant 0$, $L_2 \geqslant 0$, $l_1 > 0$, $l_2 > 0$, $N_0 \geqslant 0$.

4°. *Существует функция Грина* $G(t - s)$ *уравнения* $dy/dt = By$ *и постоянная* $\gamma > 0$ *такие, что*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \| G(t - s) \| e^{\Delta | t - s |} ds < \gamma,$$

где $\Delta = \chi + K(l_1 + l_2 \eta)$.

5°. *Имеют место неравенства* $N_0\gamma_0 \leqslant \rho$, $(L_1 + L_2\eta)\gamma K \leqslant \eta$, $L_2 l_1 \leqslant \leqslant L_1 l_2 \left(\gamma_0 \geqslant \int\limits_{-\infty}^{\infty} \| G(t-s) \| ds\right)$.

Тогда система (13) *имеет инвариантное многообразие* $M = \{(x, y) : y = \tilde{\varphi}(x),\ \tilde{\varphi} \in C_\rho(\eta)\}$ *и приближенное ИМ* $\tilde{M} = \{x, y) : y = \tilde{\Phi}(x),\ \tilde{\Phi} \in C_\rho(\eta)\}$ *с невязкой* $(0, \hat{b}(x))$, *которое является инвариантным многообразием системы* (14).

Доказательство. Достаточно доказать, что система (13) имеет ИМ M. Для некоторой вектор-функции $\tilde{\varphi}(x) \in C_\rho(\eta)$ рассмотрим задачу Коши

$$dx/dt = Ax + \hat{f}(x, \tilde{\varphi}(x)),\ x|_{t=\tau} = \zeta. \tag{15}$$

Решение этой задачи обозначим $x_t = \Psi(t - \tau, \zeta | \tilde{\varphi})$. Аналогично определим решение $\bar{x}_t = \Psi(t - \tau, \bar{\zeta} | \bar{\tilde{\varphi}})$ задачи Коши $dx/dt = Ax + \hat{f}(x, \bar{\varphi}(x))$, $x|_{t=\tau} = \bar{\zeta}$. Имеем

$$\bar{x}_t - x_t = e^{A(t-\tau)}(\bar{\zeta} - \zeta) + \int\limits_{\tau}^{t} e^{A(t-s)}[\hat{f}(\bar{x}_s, \bar{\tilde{\varphi}}(\bar{x}_s)) - \hat{f}(x_s, \tilde{\varphi}(x_s))]ds.$$

Принимая во внимание условие 3°, можем записать

$$\|\bar{x}_t - x_t\| \leqslant Ke^{\chi(t-\tau)}\|\bar{\zeta} - \zeta\| + K\int\limits_{\tau}^{t} e^{\chi(t-s)} l_2 |||\bar{\tilde{\varphi}} - \tilde{\varphi}||| ds +$$

$$+ K(l_1 + l_2\eta)\int\limits_{\tau}^{t} e^{\chi(t-s)}\|\bar{x}_s - x_s\| ds.$$

Полученное неравенство можно представить в виде

$$u(t) \leqslant \alpha(t) + \beta\int\limits_{\tau}^{t} u(s) ds,$$

где $\beta = K(l_1 + l_2\eta)$. Пусть $l_1 + l_2 > 0$.

Согласно лемме Гронуолла—Беллмана имеем

$$u(t) \leqslant \alpha(t) e^{\beta(t-\tau)} + \int\limits_{\tau}^{t} \alpha'(s) e^{\beta(t-s)} ds.$$

Учитывая принятые обозначения, получаем неравенство

$$\|\bar{x}_t - x_t\| = K\|\bar{\zeta} - \zeta\| e^{\Delta(t-\tau)} + \int\limits_{\tau}^{t} e^{\Delta(t-s)} K l_2 |||\bar{\varphi} - \varphi||| ds.$$

Вычислив интеграл в правой части, получим следующее неравенство для $t \geqslant \tau$:

$$\|\bar{x}_t - x_t\| \leqslant Ke^{\Delta(t-\tau)}\|\bar{\zeta} - \zeta\| + \frac{Kl_2 |||\bar{\varphi} - \varphi|||}{\Delta}(e^{\Delta(t-\tau)} - 1). \tag{16}$$

Аналогичным образом такое неравенство получаем при $t < \tau$.

Определим теперь на классе $C_\rho(\eta)$ вектор-функций $\varphi(x)$ отображение S посредством следующего соотношения:

$$S\varphi(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(t-s)\hat{g}(\Psi, \varphi(\Psi)) ds,$$

$$\Psi = \Psi(s - t,\ x(\varphi),\quad \varphi \in C_\rho(\eta).$$

Покажем, что отображение $S : C_\rho(\eta) \to C_\rho(\eta)$ и является сжимающим.

Согласно условиям 3°, 5°, имеем $\| S\varphi(x)\| \leqslant N_0\gamma_0 \leqslant \rho_0$. Принимая во внимание условие 3°, находим

$$\| S\bar{\varphi}(\bar{x}) - S\varphi(x)\| \leqslant \int\limits_{-\infty}^{\infty} \|G(t-s)\| \| g(\bar{\Psi}, \bar{\varphi}(\bar{\Psi})) - g(\Psi, \varphi(\Psi))\| ds \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{-\infty}^{\infty} \|G(t-s)\| [(L_1 + L_2\eta)\|\bar{\Psi} - \Psi\| + L_2 \||\bar{\varphi} - \varphi\||]ds,$$

откуда, учитывая неравенство (16), получаем

$$\| S\bar{\varphi}(\bar{x}) - S\varphi(x)\| \leqslant \int\limits_{-\infty}^{\infty} \|G(t-s)\| (L_1 + L_2\eta)Ke^{\Delta(t-s)} \|\bar{x} - x\| ds +$$

$$+ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \|G(t-s)\| \left[\frac{(L_1 + L_2\eta)Kl_2}{\Delta}(e^{\Delta(t-s)} - 1) + L_2\right] \||\bar{\varphi} - \varphi\|| \, ds.$$

Отсюда согласно условию 4° окончательно имеем

$$\| S\bar{\varphi}(\bar{x}) - S\varphi(x)\| \leqslant (G_1 + G_2\eta)\gamma K \|\bar{x} - x\| +$$
$$+ \left[\frac{(L_1 + L_2\eta)Kl_2}{\Delta}(\gamma - \gamma_0) + L_2\gamma_0\right] \||\bar{\varphi} - \varphi\|| .$$

Из полученного неравенства при $\bar{\varphi} = \varphi$ находим

$$\| S\varphi(\bar{x}) - S\varphi(x)\| \leqslant (L_1 + L_2\eta)\gamma K \|\bar{x} - x\|; \tag{17}$$

при $\bar{x} = x$ получаем

$$\| S\bar{\varphi}(x) - S\varphi(x)\| \leqslant \left[\frac{(L_1 + L_2\eta)Kl_2}{\Delta}(\gamma - \gamma_0) + L_2\gamma_0\right] \||\bar{\varphi} - \varphi\|| . \tag{18}$$

Из неравенства (17) согласно условию 5° находим $\| S\varphi(\bar{x}) - S\varphi(x)\| \leqslant \leqslant \eta \|\bar{x} - x\|$.

Таким образом, мы показали, что $S : C_\rho(\eta) \to C_\rho(\eta)$. Остается показать, что отображение S является сжимающим. Из неравенства (18) следует, что для этого достаточно установить справедливость неравенства

$$q = \frac{(L_1 + L_2\eta)Kl_2}{\Delta}(\gamma - \gamma_0) + L_2\gamma_0 < 1.$$

Так как $\Delta = \chi + K(l_1 + l_2\eta)$, $\chi \geqslant 0$, то это неравенство выполняется, если

$$\frac{(L_1 + L_2\eta)Kl_2}{l_1 + l_2\eta}(\gamma - \gamma_0) + L_2\gamma_0 < 1. \tag{19}$$

Учитывая условие 5°, нетрудно доказать справедливость неравенств

$$L_2 - \frac{L_1 + L_2\eta}{l_1 + l_2\eta} \leqslant 0, \quad \frac{L_1 + L_2\eta}{l_1 + l_2\eta}K\gamma < 1,$$

из которых вытекает неравенство (19).

Итак, отображение $S : C_\rho(\eta) \to C_\rho(\eta)$ является сжимающим и, следовательно, имеет неподвижную точку: $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}(x)$, задающую инвариантное многообразие системы (13): $M = \{(x, y) : y = \tilde{\varphi}(x),\ x \in R_x^m,\ \tilde{\varphi} \in C_\rho(\eta)\}$.

Лемма доказана при выполнении строгих неравенств $l_1 > 0$, $l_2 > 0$.

С помощью аналогичных рассуждений можно доказать лемму и при условии, что одна или обе из постоянных l_1, l_2 равны нулю. В этих случаях доказательство существования локального ИМ проще и мы его опускаем.

5. Таким образом, мы установили условия существования инвариантного многообразия $M: y = \tilde{\varphi}(x)$ системы (13), сужение которого на U_r является локальным ИМ класса $C_\rho(\eta)$ системы (1). Обозначим его $\mathfrak{M}_л = \{(x, y): y = \varphi(x),\ x \in U_r\}$.

Кроме того, мы установили существование инвариантного многообразия $\tilde{M}: y = \tilde{\Phi}(x),\ x \in R_x^m$ системы (14), сужение которого на U_r является локальным приближенным ИМ с невязкой $(0, b)$ системы (1). Обозначим его $\tilde{\mathfrak{M}}_л: y = \Phi(x),\ x \in U_r$.

В связи с этим введем следующее определение.

Определение. *Некоторое многообразие* $\tilde{\mathfrak{M}}_л = \{(x, y): y = \Phi(x),\ x \in U_r\}$ *называется локальным приближенным ИМ с невязкой* $(0, b)$ *системы* (1), *если это многообразие является сужением на* U_r *инвариантного многообразия системы* (14).

Оценку погрешности $\tilde{M}$ устанавливает следующая лемма.

Лемма 2. *Пусть выполняются условия леммы* 1, *а функции* $\hat{\Phi}(x)$, $\hat{b}(x)$ *непрерывны и ограничены.*

Тогда справедлива следующая оценка погрешности:

$$\|\tilde{\varphi}(x) - \tilde{\Phi}(x)\| \leqslant (1 - q)^{-1} \gamma_0 \sup_x \|\hat{b}(x)\|, \tag{20}$$

где q *определяется неравенством* (19) *при* $l_1 + l_2 > 0$. *При* $l_1 = l_2 = 0$ *имеем* $q = L_2\gamma_0$.

Доказательство. (Случай $l_1 + l_2 > 0$.) Для некоторой функции $\Phi(x) \in C_\rho(\eta)$ рассмотрим задачу Коши

$dx/dt = Ax + \hat{f}(x, \tilde{\Phi}(x)),\quad x|_{t=\tau} = \zeta$. Обозначим решение этой задачи $\tilde{x}(t) = \Psi(t - \tau, \zeta \,|\, \tilde{\Phi})$. Через $x(t) = \Psi(t - \tau, \zeta \,|\, \tilde{\varphi})$ обозначим решение задачи Коши (15). Тогда

$$x(t) - \tilde{x}(t) = \int_\tau^t e^{A(t-s)} [\hat{f}(\tilde{x}(s) - \hat{f}(x(s))] ds.$$

Отсюда, учитывая условия леммы, при $t > c$ получаем

$$\|x(t) - \tilde{x}(t)\| \leqslant \int_\tau^t e^{\chi(t-s)} (l_1 + l_2\eta) \|x(s) - \tilde{x}(s)\| ds + $$
$$+ K \int_\tau^t e^{\chi(t-s)} l_2 \|\tilde{\varphi} - \tilde{\Phi}\| ds.$$

Обозначая $\|x(t) - \tilde{x}(t)\| e^{-\chi t} = u(t)$, $K \int_t^\tau e^{-\chi s} l_2 \|\tilde{\varphi} - \tilde{\Phi}\| ds = \alpha(t)$, получаем $u(t) \leqslant K(l_1 + l_2\eta) \int_\tau^t u(s) ds + \alpha(t)$.

Из этого неравенства по лемме Гронуолла—Беллмана находим

$$u(t) \leqslant \alpha(\tau) e^{K(l_1 + l_2\eta)(t-\tau)} + \int_\tau^t \alpha'(s) e^{K(l_1 + l_2\eta)(t-s)} ds$$

или

$$\|x(t) - \tilde{x}(t)\| e^{-\chi t} \leqslant -\frac{1}{\chi} \int_\tau^t K e^{-\chi s} \|\tilde{\varphi} - \tilde{\Phi}\| l_2 e^{K(l_1 + l_2\eta)(t-s)} ds.$$

Отсюда получаем вспомогательное неравенство

$$\|x(t) - \tilde{x}(t)\| \leqslant \frac{K l_2 \|\tilde{\varphi} - \tilde{\Phi}\|}{\Delta} [e^{\Delta(t-\tau)} - 1], \tag{21}$$

где $\Delta = \chi + K(l_1 + l_2\eta)$. Аналогичным способом это неравенство получаем при $t < \tau$.

Пусть $\Psi = \Psi(s-t, x \mid \tilde{\varphi})$, $\bar{\bar{\Psi}} = \Psi(s-t, x \mid \tilde{\Phi})$. Так как

$$\tilde{\varphi} - \tilde{\Phi} = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-s)[\hat{g}(\Psi, \tilde{\varphi}(\Psi)) - \hat{g}(\bar{\bar{\Psi}}, \tilde{\Phi}(\bar{\bar{\Psi}})] + \hat{b}(\bar{\bar{\Psi}})]ds,$$

то

$$\|\tilde{\varphi} - \tilde{\Phi}\| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \|G(t-s)\| [(L_1 + L_2\eta)\|\bar{\bar{\Psi}} - \Psi\| + L_2\|\tilde{\varphi} - \tilde{\Phi}\| + |||\hat{b}|||]ds. \tag{22}$$

Учитывая неравенство (21), а также условия леммы, из (22) получаем неравенство

$$\|\tilde{\varphi} - \tilde{\Phi}\| \leqslant \frac{(L_1 + L_2\eta)Kl_2 |||\tilde{\varphi} - \tilde{\Phi}|||}{\Delta}(\gamma - \gamma_0) + \gamma_0(L_2|||\tilde{\varphi} - \tilde{\Phi}||| + |||\hat{b}|||),$$

которое можно представить в виде $\|\tilde{\varphi} - \tilde{\Phi}\| \leqslant q|||\tilde{\varphi} - \tilde{\Phi}||| + \gamma_0|||\hat{b}|||$. Разрешая это неравенство относительно $\|\tilde{\varphi} - \tilde{\Phi}\|$, получаем требуемое неравенство (20).

Лемма 2 доказана. В случае $l_1 = l_2 = 0$ доказательство аналогично.

6. Итак, в лемме 1 доказано существование инвариантного многообразия M системы (13), сужение которого на U_r является локальным ИМ $\mathfrak{M}_л$ системы (1). В лемме 2 установлена оценка погрешности приближенного ИМ с невязкой $(0, b)$ $\tilde{M}$ системы (13), сужение которого на U_r является локальным приближенным ИМ $\tilde{\mathfrak{M}}_л$ с невязкой $(0, b)$ исходной системы (1).

Остается оценить погрешность $\tilde{\mathfrak{M}}_л$, т. е. оценить разность $\varphi(x) - \Phi(x)$ при $x \in U_r$. Так как при $x \in U_r$ имеем $\varphi(x) = \tilde{\varphi}(x)$, $\Phi(x) = \tilde{\Phi}(x)$, $b = \hat{b}$, то $\varphi(x) - \Phi(x) = \tilde{\varphi}(x) - \tilde{\Phi}(x)$, $x \in U_r$. Отсюда и из оценки (20) получаем для $x \in U_r$:

$$\|\varphi(x) - \Phi(x)\| \leqslant (1-q)^{-1}\gamma_0 \sup_x \|b(x)\|, \tag{23}$$

где q определено в (19), а $b(x)$ — формулой (8).

В результате можем сформулировать следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть относительно системы* (1) *выполняются условия* 1°—5°. *Тогда система* (1) *имеет локальное ИМ* $\mathfrak{M}_л$ *и локальное приближенное ИМ с невязкой* $(0, b)$ $\tilde{\mathfrak{M}}_л$. *При этом оценка погрешности* $\tilde{\mathfrak{M}}_л$ *определяется неравенством* (23).

1. *Пуанкаре А.* Новые методы небесной механики: Избр. тр.: В 3-х т.— М. : Наука, 1972.— Т. 1.— 400 с.
2. *Боголюбов Н. Н.* О некоторых статистических методах в математической физике. — Львов: Изд-во АН УССР, 1945.— 137 с.
3. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.— М. : Физматгиз, 1963.— 407 с.
4. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Самойленко А. М.* Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике.— Киев : Наук. думка, 1969.— 245 с.
5. *Митропольский Ю. А., Лыкова О. Б.* Интегральные многообразия в нелинейной механике.— М. : Наука, 1973.— 512 с.
6. *Найфэ А.* Введение в методы возмущений.— М. : Мир, 1984.— 535 с.
7. *Бурбаки Н.* Функции действительного переменного.— М. : Наука, 1965.— 424 с.
8. *Вазов В.* Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений.— М. : Мир, 1968.— 464 с.
9. *Барис Я. С., Лыкова О. Б.* Об асимптотических разложениях инвариантных многообразий. I // Укр. мат. журн.— 1987.— **39**, № 4.— С. 411—418.
10. *Барис Я. С., Лыкова О. Б.* Об асимптотических разложениях инвариантных многообразий. II // Там же.— 1988.— **40**, № 4.— С. 412—420.
11. *Барис Я. С., Лыкова О. Б.* Приближенные интегральные многообразия систем дифферен-

циальных уравнений.— Киев, 1979.— 19 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 79.8).
12. *Барис Я. С., Лыкова О. Б.* О приближенных интегральных многообразиях систем нелинейных дифференциальных уравнений.— Киев, 1980.— 31 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 80.5).
13. *Лыкова О. Б.* О поведении решений системы дифференциальных уравнений в окрестности изолированного статического решения // Докл. АН СССР.— 1957.— **15**, № 3.— С. 447—449.
14. *Лыкова О. Б.* К теории локальных интегральных многообразий // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1980.— № 3.— С. 19—28.
15. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения.— М. : Наука, 1950.— 383 с.
16. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения.— М. : Гостехиздат, 1952.— 432 с.
17. *Kelley Al.* The stable, center-stable, center, center-unstable, unstable manifolds // J. Math. Anal. Appl.— 1967.— **18**, N 2.— P. 336—344.
18. *Теория* показателей Ляпунова / Б. Ф. Былов, Р. Э. Виноград, Д. М. Гробман, В. В. Немыцкий.— М. : Наука, 1966.— 576 с.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 28.12.87