УДК 517.982

А. М. Гомилко

Непрерывные отображения в шкалах банаховых пространств

В [1, с. 232] приведены десять задач, решение каждой из которых «дало бы определенный вклад в теорию бесконечных групп преобразований». В настоящей работе дается ответ на вопрос, сформулированный Л. В. Овсянниковым в задаче № 2 и относящийся к возможности специальной топологизации шкал банаховых пространств.

Следуя [1], дадим следующие два определения.

Определение 1. *Пусть каждому вещественному $\rho > 0$ поставлено в соответствие вещественное банахово пространство E_ρ, причем при $\rho_0 < \rho$ пространство E_ρ содержится в E_{ρ_0} как векторное подпространство и*

$$\|x\|_{\rho_0} \leqslant \|x\|_\rho \quad \forall x \in E_\rho, \tag{1}$$

где $\|\cdot\|_\rho$ — норма в E_ρ. Векторное пространство $E = \bigcup\limits_{0<\rho} E_\rho$ называется шкалой банаховых пространств. Шкала банаховых пространств E называется K-шкалой, если для любых $\rho_0 < \rho$ вложение $E_\rho \to E_{\rho_0}$ вполне непрерывно.

Определение 2. *Последовательность $\{x_n\}_1^\infty \subset E$ называется s-сходящейся к $x_0 \in E$, если $\exists \rho_0 > 0$, что $\{x_n\}_0^\infty \subset E_{\rho_0}$ и $\|x_n - x_0\|_{\rho_0} \to 0$, $n \to \infty$. Отображение f шкалы банаховых пространств E в шкалу банаховых пространств F называется s-непрерывным, если $\forall x_0 \in E$ и для любой последовательности $\{x_n\}_1^\infty$, которая s-сходится к x_0 в E, последовательность $\{f(x_n)\}_1^\infty$ является s-сходящейся к $f(x_0)$ в F.*

Замечание. В современной математике, в частности в теории интерполяции в банаховых пространствах [2], используются отличные от приведенного выше определения шкал банаховых пространств. Определение 1 дано с целью не отклоняться, по возможности, от терминологии, принятой в [1].

Вопрос Л. В. Овсянникова из [1] формулируется следующим образом: можно ли в шкалах банаховых пространств (в частности, в K-шкалах), ввести топологии так, чтобы каждое отображение одной шкалы в другую, непрерывное по этим топологиям, было непрерывно в смысле определения 2 и обратно? В случае K-шкал положительный ответ на этот вопрос следует из результатов классической работы [3]. Для этого в каждой K-шкале достаточно ввести топологию индуктивного предела $\lim\limits_{\rho\to 0} \operatorname{ind} E_\rho$ в категории локально выпуклых пространств. В общем случае, как показано в настоящей работе, ответ на вопрос Л. В. Овсянникова отрицателен, если постановку вопроса дополнить естественным условием, что в каждой шкале банаховых пространств, состоящей из одного банахова пространства, уже введена топология этого банахова пространства (это дополнительное условие считаем далее выполненным).

1. Введем некоторые обозначения. Если E, F — шкалы банаховых пространств, то через $C_s(E, F)$ обозначаем множество s-непрерывных отображений из E в F. Если X, Y — топологические пространства, то $C(X, Y)$ — множество непрерывных отображений из X в Y. Вместо $C_s(E, E)$ и $C(X, X)$ будем писать $C_s(E)$ и $C(X)$ соответственно. Для шкалы банаховых пространств $E = \bigcup\limits_{0<\rho} E_\rho$ через $\tau = \tau(E)$ (через $\tau_0 = \tau_0(E)$) обозначаем топологию индуктивного предела $\operatorname{ind}\lim\limits_{\rho\to 0} E_\rho$ в категории топологических пространств (соответственно, в категории локально выпуклых пространств).

Напомним, что топология τ (топология τ_0) является, по определению, сильнейшей из топологий на E (сильнейшей из локально выпуклых топологий на E), в которых все отображения естественного вложения $e_\rho : E_\rho \to E$ непрерывны. При этом для того, чтобы отображение $f : (E, \tau) \to X$ (линейное отображение $g : (E, \tau_0) \to Y$) было непрерывно, где X — топологическое пространство (соответственно, Y — локально выпуклое пространство), необходимо и достаточно, чтобы было непрерывно отображение $f \circ e_\rho : E_\rho \to X$ (соответственно, линейное отображение $g \circ e_\rho : E_\rho \to Y$) для любого $\rho > 0$.

Теорема 1. *Пусть E, F — K-шкалы банаховых пространств. Тогда имеет место равенство $C_s(E, F) = C((E, \tau_0), (F, \tau_0))$.*

Доказательство. В силу определения 2 и отмеченного выше свойства топологии $\tau = \tau(E)$ отображение $f : E \to F$ принадлежит $C((E, \tau), (F, \tau))$ тогда и только тогда, когда оно переводит s-сходящиеся последовательности из E в сходящиеся последовательности в пространстве (F, τ). В работе [3] показано, что для K-шкалы топологии τ и τ_0 совпадают и сходимость последовательности в топологии τ_0 эквивалентна ее s-сходимости. Так как E и F — K-шкалы, то отсюда получаем $C((E, \tau), (F, \tau)) = C((E, \tau_0), (F, \tau_0)) = C_s(E, F)$.

Таким образом, для любых двух K-шкал E, F множество s-непрерывных отображений из E в F совпадает с множеством непрерывных отображений локально выпуклого пространства (E, τ_0) в локально выпуклое пространство (F, τ_0) — это дает положительный ответ на вопрос из [1] в случае K-шкал.

2. Как отмечалось при доказательстве теоремы 1, если шкала банаховых пространств E является K-шкалой, то s-сходимость последовательностей в E совпадает со сходимостью в топологии $\tau(E)$. В общем случае шкалы банаховых пространств множество последовательностей, сходящихся в топологии $\tau(E)$, вообще говоря, шире, чем множество s-сходящихся последовательностей. Некоторые свойства топологии $\tau(E)$ и сходящихся в ней последовательностей приведены в следующей ниже лемме 1. Прежде чем сформулировать лемму, напомним [4, с. 94], что топологическое пространство X называется секвенциальным пространством, если оно обладает свойством: множество $A \subset X$ замкнуто тогда и только тогда, когда вместе со всякой последовательностью оно содержит все ее пределы.

Лемма 1. *Пусть E — шкала банаховых пространств. Тогда пространство (E, τ) является секвенциальным топологическим T_1-пространством, в котором любая последовательность имеет не более одного предела. При этом последовательность сходится к x_0 в (E, τ) тогда и только тогда, когда каждая ее подпоследовательность содержит s-сходящуюся к x_0 в E подпоследовательность. Если $x_n \to x_0$, $n \to \infty$, в пространстве (E, τ), то существует такое $\rho_0 > 0$, что $\{x_n\}_0^\infty \subset E_{\rho_0}$, $\sup\limits_n \| x_n \|_{\rho_0} < \infty$.*

Доказательство. Наличие определения s-сходящихся в E последовательностей позволяет ввести на множестве E структуру (L)-пространства [5]. Структура (L)-пространства дает возможность определить секвенциальное топологическое пространство с носителем E и топологией t : множество $A \subset E$ замкнуто в (E, t) тогда и только тогда, когда вместе со всякой s-сходящейся последовательностью множество A содержит и ее предел. При этом [5, 6] t-сходящиеся последовательности допускают следующее описание: последовательность $\{x_n\}_1^\infty$ сходится к x_0 в пространстве (E, t) тогда и только тогда, когда любая ее подпоследовательность $\{x_{n_{k_r}}\}_{r=1}^\infty$ содержит s-сходящуюся к x_0 в E подпоследовательность $\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty$. Таким образом, для доказательства первых двух утверждений леммы достаточно показать, что топологии t и τ совпадают.

Так как τ — топология индуктивного предела в категории топологических пространств, то $t \leqslant \tau$ тогда и только тогда, когда $\forall \rho > 0$ естественное вложение $E_\rho \to (E, t)$ непрерывно. Непрерывность такого вложения имеет место, так как сходимость последовательности в банаховом пространстве E_ρ влечет ее s-сходимость в E, что, в свою очередь, влечет сходимость последовательности в пространстве (E, t). Далее, в силу секвенциальности пространства (E, t) вложение $(E, t) \to (E, \tau)$ непрерывно тогда и только тогда, когда t-сходимость последовательности влечет ее τ-сходимость [4, с. 94]. Пусть $x_n \not\to x_0$, $n \to \infty$, в топологии τ. Тогда найдется окрестность точки $x_0 \in U$ в (E, τ) такая, что некоторая подпоследовательность $\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ не принадлежит U. Значит, для любого $\rho > 0$ такого, что $x_0 \in E_\rho$, эта подпоследовательность не попадает в окрестность $U \cap E_\rho$ точки x_0 в банаховом пространстве E_ρ и тогда, очевидно, $x_{n_k} \not\to x_0$, $k \to \infty$, в топологии t. Таким образом, $\tau = t$ и первые два утверждения леммы доказаны.

Докажем последнее утверждение леммы. Предположим, что оно неверно. Тогда с учетом (1) найдется такая подпоследовательность $\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty$, что либо $x_{n_k} \notin E_{\rho_k}$, либо $x_{n_k} \in E_{\rho_k}$, но $\| x_{n_k} \|_{\rho_k} \geqslant k$ при $\rho_k^{-1} \geqslant k$. Значит, подпоследовательность x_{n_k} не имеет предельных точек ни в одном из банаховых пространств E_ρ и поэтому не является t-сходящейся. Тогда, по доказанному ранее, $\{x_n\}_1^\infty$ не является сходящейся последовательностью в пространстве (E, τ). Полученное противоречие и доказывает последнее утверждение леммы.

Следствие 1. *Пусть E, F — шкалы банаховых пространств. Тогда $C_s(E, F) \subset C((E, \tau), (F, \tau))$. Если сходимость последовательности в (F, τ) влечет ее s-сходимость в F, то справедливо равенство $C_s(E, F) = C((E, \tau), (F, \tau))$.*

Для дальнейшего понадобится следующая лемма.

Лемма 2. *Пусть E — шкала банаховых пространств. Пусть $y_n \to y_0$, $n \to \infty$, в пространстве (E, τ) и последовательность вещественных чисел $\{\alpha_n\}_1^\infty$ строго монотонно стремится к числу α_0. Тогда существует такое отображение $g \in C(\mathbb{R}, (E, \tau))$, что $g(\alpha_n) = y_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.*

Доказательство. Пусть, для определенности $\alpha_k < \alpha_n$ при $0 < k < n$. При $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_0)$ отображение g определяем следующим образом; если $\alpha = \alpha_n + \lambda(\alpha_{n+1} - \alpha_n)$, $\lambda \in [0, 1]$, то полагаем $g(\alpha) = y_n + 2\lambda(y_0 - y_n)$ при $\lambda \in [0, 1/2]$ и $g(\alpha) = y_0 + (2\lambda - 1)(y_{n+1} - y_0)$ при $\lambda \in [1/2, 1]$. Кроме того, полагаем $g(\alpha) = y_1$ при $\alpha \leqslant \alpha_1$ и $g(\alpha) = y_0$ при $\alpha \geqslant \alpha_0$. Тогда $g(\alpha_n) = y_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, и $g((\alpha_{n+1} + \alpha_n)/2) = y_0$ при $n = 1, 2, \ldots$. Непрерывность отображения g как отображения из $\mathbb{R}$ в пространство

(E, τ) следует из описания τ-сходящихся последовательностей, данного в лемме 1.

Определение 3. *Будем говорить, что шкала банаховых пространств E удовлетворяет условию (T), если существует непостоянная функция $f \in C_s(E, \mathbb{R})$.*

Замечание. Согласно следствию 1 $C_s(E, \mathbb{R}) = C((E, \tau), \mathbb{R})$.

Предположим теперь, что в каждой шкале банаховых пространств $E = \bigcup\limits_{0<\rho} E_\rho$ введена некоторая топология $\tau_1 = \tau_1(E)$, причем выполняются условия: во-первых, для любых двух шкал банаховых пространств E и F имеет место равенство

$$C_s(E, F) = C((E, \tau_1), (F, \tau_1)) \tag{2}$$

и, во вторых, если E состоит из одного банахова пространства, то $\tau_1(E)$ совпадает с топологией этого банахова пространства. Сделанное предположение соответствует утвердительному ответу на вопрос Л. В. Овсянникова в общем случае шкал банаховых пространств при дополнительном условии, упоминавшемся во введении к работе. Тогда из (2) следует, в частности, что

$$\begin{gathered} C_s(E_\rho, E) = C(E_\rho, (E, \tau_1)), \quad \rho > 0, \\ C_s(E, E_\rho) = C((E, \tau_1), E_\rho), \quad \rho > 0, \\ C_s(E) = C((E, \tau_1)). \end{gathered} \tag{3}$$

В этих условиях справедлива следующая лемма.

Лемма 3. *Пусть шкала банаховых пространств E удовлетворяет условию (T) и для некоторой топологии τ_1 на E выполняются равенства* (3). *Тогда сходимость последовательности в пространстве* (E, τ) *влечет ее s-сходимость в E и $C_s(E) = C(E, \tau)$.*

Доказательство. Пусть $y_n \to y_0$, $n \to \infty$, в (E, τ). Из первого равенства в (3) следует, что $\tau_1 \leqslant \tau$, кроме того, $C_s(E) = C((E, \tau_1))$, поэтому, чтобы доказать s-сходимость последовательности $\{y_n\}_1^\infty$ к y_0, достаточно доказать существование такого отображения $\varphi \in C((E, \tau_1), (E, \tau))$, что $\varphi(x_n) = y_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, для некоторой последовательности $\{x_n\}_1^\infty$, которая s-сходится к x_0 в E. Пусть $f \in C_s(E, \mathbb{R})$ — непостоянное отображение и $f(x) \neq f(0)$, где $x \in E_{\rho_0}$ при некотором $\rho_0 > 0$.

Так как отображение $f_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, задаваемое равенством $f_0(\lambda) = f(\lambda x)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, принадлежит $C(\mathbb{R})$, то найдется такая последовательность чисел λ_n, что $\lambda_n \to \lambda_0$, $n \to \infty$, и последовательность $f(\lambda_n x)$ строго монотонно стремится к $f(\lambda_0 x)$ при $n \to \infty$. Тогда по лемме 2 существует такое отображение $g \in C(\mathbb{R}, (E, \tau))$, что $g(f(\lambda_n x)) = y_n$, $n = 0, 1, \ldots$. Таким образом, для s-сходящейся последовательности $x_n = \lambda_n x$ и отображения $\varphi = g \circ f : E \to E$ имеем $\varphi(x_n) = y_n$, $n = 0, 1, \ldots$. Значит, для завершения доказательства леммы (с учетом следствия 1) осталось показать, что отображение φ принадлежит $C((E, \tau_1), (E, \tau))$, для чего достаточно установить, что $f \in C((E, \tau_1), \mathbb{R})$. Но из условия $f \in C_s(E, \mathbb{R})$ следует, что отображение $f_x : z \to f(z)x$, $z \in E$, принадлежит $C_s(E, E_{\rho_0})$. Тогда согласно (3) получаем $f_x \in C((E, \tau_1), E_{\rho_0})$, откуда заключаем, что $f \in C((E, \tau_1), \mathbb{R})$, Лемма доказана.

Следствие 2. *Если шкала банаховых пространств E удовлетворяет условию (T), то равенство $C_s(E) = C((E, \tau))$ имеет место тогда и только тогда, когда сходимость последовательности в пространстве (E, τ) влечет ее s-сходимость в E.*

Согласно лемме 3 для получения отрицательного ответа на сформулированный в начале работы вопрос Л. В. Овсянникова из [1] в общем случае достаточно построить пример шкалы банаховых пространств E, удовлетворяющей условию (T) и такой, что в E найдется последовательность, которая сходится в пространстве (E, τ), но не является s-сходящейся в E. Пример такой шкалы банаховых пространств дает следующая

Теорема 2. *Пусть B_1, B_2 — вещественные банаховы пространства, причем пространство B_1 содержится в B_2 как векторное подпространство и $\|x\|_{B_2} \leqslant \|x\|_{B_1}$ $\forall x \in B_1$ ($\|\cdot\|_{B_j}$ — норма в B_j). Пусть вложение $p : B_1 \to B_2$*

не является гомеоморфизмом B_1 *на* $p(B_1) \subset B_2$. *Положим банаховы пространства*

$$E_{1/n} = \mathop{\oplus}_{k=1}^{n-1} B_2 \oplus l_1(B_1), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

$$E_\rho = \begin{cases} E_{1/(n+1)}, & \rho \in \left[\dfrac{1}{n+1}, \dfrac{1}{n}\right), \quad n = 1, 2, \ldots, \\ E_1, & \rho \geqslant 1 \end{cases}$$

и рассмотрим соответствующую шкалу банаховых пространств $E = \bigcup\limits_{0<\rho} E_\rho$. *Тогда в* E *существует такая последовательность* $\{x_n\}_1^\infty$, *что* $x_n \to 0$, $n \to \infty$, *в* (E, τ), *но* $\{x_n\}_1^\infty$ *не является* s-*сходящейся к* 0 *в* E. *Кроме того,* E *удовлетворяет условию* (T).

Доказательство. Норма в $E_{1/n}$ определяется следующим образом [7, с. 56]: если $y = (y_1, \ldots, y_k, \ldots) \in E_{1/n}$, то

$$\| y \|_{1/n} = \sum_{k=1}^{n-1} \| y_k \|_{B_2} + \sum_{k=n}^{\infty} \| y_k \|_{B_1}. \tag{4}$$

По условию теоремы найдется последовательность $\{z_k\}_1^\infty \subset B_1$ такая, что

$$\| z_k \|_{B_1} = 1, \quad k = 1, 2, \ldots, \| z_k \|_{B_2} \to 0, \quad k \to \infty. \tag{5}$$

Положим при $k, n = 1, 2, \ldots$:

$$x_{n,k} = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{n-1}, z_k/n, 0, \ldots) \in E_1 \tag{6}$$

(отлична от нуля лишь n-я координата $x_{n,k}$). Тогда по (4) — (6) при фиксированном n

$$\| x_{n,k} \|_\rho = 1/n, \quad n \geqslant [1/\rho], \tag{7}$$

$$\| x_{n,k} \|_\rho \to 0, \; k \to \infty, \quad n \leqslant [1/\rho - 1]. \tag{8}$$

Перенумеруем счетное множество (6) и полученную последовательность обозначим через $\{x_k\}_1^\infty$. Покажем, что $\{x_k\}_1^\infty$ есть искомая последовательность из утверждения теоремы. Из (7) следует, что $\forall \rho > 0$ последовательность $\{x_{n_0,k}\}_{k=1}^\infty$, где $n_0 \geqslant 1/\rho$, не стремится к 0 в пространстве E_ρ, поэтому $\{x_k\}_1^\infty$ не является s-сходящейся к 0 в E. Далее, для любого $j = 1, 2, \ldots$ множество $\{x_k : \| x_k \|_1 \geqslant 1/j\}$ состоит из конечного числа последовательностей $\{x_{n,k}\}_{k=1}^\infty$, $n = 1, \ldots, j$, каждая из которых, согласно (8), сходится к 0 в пространстве E_{ρ_1} при $\rho_1 < (j+1)^{-1}$. Отсюда нетрудно заключить, что $x_k \to 0$, $k \to \infty$, в пространстве (E, τ). Для любого $\rho > 0$ пространство E_ρ непрерывно вложено в банахово пространство $l_1(B_2)$, откуда следует, что E удовлетворяет условию (T). Теорема доказана.

1. *Овсянников Л. В.* Аналитические группы.— Новосибирск: Новосиб. ун-т, 1972.— 238 с.
2. *Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов.— М.: Наука, 1978.— 400 с.
3. *Себаштьян э Сильва Ж.* О некоторых классах локально выпуклых пространств, важных в приложениях // Математика: Сб. пер.— 1957.— **1**, № 1.— С. 60—77.
4. *Энгелькинг Р.* Общая топология.— М. : Мир, 1986.— 752 с.
5. *Урысон П. С.* О (L)-пространствах Фреше // Тр. по топологии и другим областям математики.— М.; Л. : Гостехиздат, 1951.— Т. 2.— С. 801—806.
6. *Kisyński J.* Convergence du type L // Colloquium Mathematicum.— 1960.— **7**, N 2.— P. 205—211.
7. *Дэй М. М.* Нормированные линейные пространства.— М. : Изд-во иностр. лит.— 1961.— 236 с.

Ин-т гидромеханики АН УССР, Киев

Получено 23.01.87