УДК 517.5

А. К. Кушпель

Оценки поперечников классов сверток в пространствах C и L

Пусть X — банахово пространство с единичным шаром B и $\mathfrak{N}$ — некоторое центральносимметричное, компактное подмножество из X, $\mathfrak{N} \subset X$. Величину $d_n(\mathfrak{N}, X) = \inf_{L_n \subset X} \sup_{v \in \mathfrak{N}} \inf_{\xi \in L_n} \| v - \xi \|_X = \inf_{L_n \subset X} \inf_{\varepsilon > 0} \{\mathfrak{N} \subset L_n + \varepsilon B\}$, где последний раз нижняя грань берется по всем подпространствам $L_n \subset X$ размерности не выше n, называют поперечником по Колмогорову [1]. Рассмотрим также следующие характеристики множества $\mathfrak{N}$: $b_n(\mathfrak{N}, X) = \sup_{L_{n+1} \subset X} \sup_{\varepsilon > 0} \{\varepsilon B \cap L_{n+1} \subset \mathfrak{N}\}$, $\lambda_n(\mathfrak{N}, X) = \inf_{L_n \subset X} \inf_{A \in \mathscr{L}(X, L_n)} \sup_{v \in \mathfrak{N}} \| v - Av \|_X$, где $\mathscr{L}(X, L_n)$ — пространство непрерывных линейных операторов, действующих из X в L_n. Величины $b_n(\mathfrak{N}, X)$ и $\lambda_n(\mathfrak{N}, X)$, следуя В. М. Тихомирову [2], называют соответственно бернштейновскими и линейными поперечниками.

Задача вычисления поперечников $d_n(\mathfrak{N}, X)$ обычно распадается на две части. Сначала фиксируется некоторое подпространство $L_n \subset X$ ($\dim L_n = n$) и вычисляется величина $E(L_n, \mathfrak{N}, X) = \sup_{v \in \mathfrak{N}} \inf_{\xi \in L_n} \| v - \xi \|_X$. Ясно, что $E(L_n, \mathfrak{N}, X) \geqslant d_n(\mathfrak{N}, X)$. Затем для поперечника $d_n(\mathfrak{N}, X)$ получают оценку снизу. Решение первой части этой задачи во многих случаях известно и поэтому основная трудность заключается в получении оценок снизу.

В настоящей работе будут получены оценки снизу (в ряде важных частных случаев точные) для поперечников $b_n(\mathfrak{N}, X)$, которые в силу неравенства $b_n(\mathfrak{N}, X) \leqslant d_n(\mathfrak{N}, X)$ (см. [2]. с. 220) являются оценками снизу и для поперечников $d_n(\mathfrak{N}, X)$. В качестве X будем рассматривать либо пространство непрерывных 2π-периодических функций $C_{2\pi}$, либо пространство 2π-периодических суммируемых функций L с обычной нормой: $\| f \|_L = \int\limits_{-\pi}^{\pi} | f(\tau) | d\tau$. Роль множеств $\mathfrak{N}$ будут играть классы сверток, т. е. множества функций f, представимых в виде $f(\cdot) = \pi^{-1} \int\limits_{-\pi}^{\pi} K(\cdot - \tau) \varphi(\tau) d\tau + C \overset{\mathrm{df}}{=} (K * \varphi)(\cdot) + C$, $C \in \mathbb{R}$, где $K(\cdot)$—некоторая фиксированная 2π-периодическая суммируемая функция, а $\mathbb{R}$ — множество действительных чисел. В случае, когда $\varphi \in U_\infty \overset{\mathrm{df}}{=} \{\varphi : \| \varphi \|_\infty = \operatorname{ess\,sup} |\varphi(\cdot)| \leqslant 1\}$, будем писать $f \in K * U_\infty$; если же $\varphi \in U_1 \overset{\mathrm{df}}{=} \{\varphi : \varphi \in L, \| \varphi \|_L \leqslant 1\}$, то $f \in K * U_1$. Отметим, что классы $K * U_p$, $p = 1, \infty$, являются частным случаем классов $L^{\psi}_{\beta,p}$, введенных в [3]. Обозначим через $K_1(\cdot)$ периодический интеграл от функции $K(\cdot)$, т. е. $K_1 = K * \mathcal{D}_1$, где $\mathcal{D}_1(\tau) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{-1} \sin k\tau$ — ядро Бернулли. Ясно, что если $s[K(\tau)] = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \psi(k) \cos(k\tau - \beta\pi/2)$ — ряд Фурье функции $K(\tau)$, то $s[K_1(\tau)] = \sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{-1} \psi(k) \cos(k\tau - (\beta + 1)\pi/2)$. Пусть $\Delta_{2n} = \{0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_{2n} = 2\pi\}$, $x_k = k\pi/n$ —разбиение $[0, 2\pi)$ и $S^{K_1}_{2n}$— пространство sk_1-сплайнов на разбиении Δ_{2n} [4], т. е. множество функций, представимых в виде

$$sk_1(\cdot) = c_0 + \sum_{k=1}^{2n} c_k K_1(\cdot - x_k), \quad \sum_{k=1}^{2n} c_k = 0, \quad c_k \in \mathbb{R}, \quad 0 \leqslant k \leqslant 2n. \tag{1}$$

Всюду ниже будем предполагать, что функция $K(\cdot)$ удовлетворяет условию A_n, т. е. при $|\beta| \neq 2p$, $p \in N$ либо $\sum\limits_{m=0}^{\infty} (2mn + j)^{-1} \psi(2mn + j) - \sum\limits_{m=1}^{\infty} (2mn - j)^{-1} \psi(2mn - j) \neq 0$, либо $\sum\limits_{m=0}^{\infty} (2mn + j)^{-1} \psi(2mn + j) + \sum\limits_{m=1}^{\infty} (2mn - j)^{-1} \psi(2mn - j) \neq 0$, а при $|\beta| = 2p$ $\sum\limits_{m=0}^{\infty} (-1)^m (2mn + j)^{-1} \times \psi(2mn + j) - \sum\limits_{m=1}^{\infty} (-1)^m (2mn - j)^{-1} \psi(2mn - j) \neq 0$ и при всех $k \in N$ $\psi(k) \neq 0$.

Приведенные выше условия в силу соотношений (1.31)—(1.34) работы [4] гарантируют существование и единственность интерполяционного sk_1-сплайна, т. е. функции, представимой в виде (1) и удовлетворяющей условиям $sk_1(y_k) = f(y_k)$, $1 \leqslant k \leqslant 2n$, $y_k = y + k\pi/n$, где $f \in C_{2\pi}$ — произвольная непрерывная 2π-периодическая функция. Отметим, что условию A_n при всех $n \in N$ удовлетворяет, в частности, произвольная суммируемая функция $K(\cdot)$ с монотонно убывающими коэффициентами $\psi(k)$. Рассмотрим тригонометрический полином по переменной t:

$$P_n(y, t) = 2n^{-1} \Big(2 \sum_{j=1}^{n-1} c_j(y) (\rho_j(y) \sin jt + \sigma_j(y) \cos jt) + c_n(y) \rho_n(y) \sin nt\Big),$$

где

$$\rho_j(y) = \operatorname{Re}\lambda_j(y), \quad \sigma_j(y) = \operatorname{Im}\lambda_j(y), \quad \lambda_j(y) = n^{-1}\sum_{k=1}^{2n} \exp(ijx_k) K_1(y - x_k),$$

$$c_j(y) = |\lambda_j(y)|^{-2}\left(\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m(2mn+j)^{-1} - \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m(2mn-j)^{-1}\right),$$

$$y = \begin{cases} 0, & \beta \neq 2p; \\ \pi/2n, & \beta = 2p, \quad p \in N. \end{cases}$$

Положим $t_k = (x_{k-1} + x_k)/2$, $e_n = \left(\sum_{k=1}^{2n} |P_n(y, t_k)|\right)^{-1}$. Следующее утверждение позволяет для произвольной суммируемой функции $K(\cdot) \in A_n$ записать оценки снизу для соответствующих поперечников.

Теорема. *Пусть* $K(\cdot) \in A_n$. *Тогда*

$$d_{2n}(K*U_\infty, C_{2\pi}) \geqslant b_{2n-1}(K*U_\infty, C_{2\pi}) \geqslant e_n,$$

$$d_{2n-1}(K*U_1, L_1) \geqslant b_{2n-1}(K*U_1, L_1) \geqslant e_n.$$

Прежде чем перейти к доказательству теоремы, сделаем некоторые замечания.

В работе [4] показано, что в случае, когда $K \in C_{y,2n}$, т. е. $\operatorname{sign} P_n(y, t_k) = (-1)^k \varepsilon e_k$, где e_k равно либо 0, либо 1, а ε принимает значение ± 1 и не зависит от k, имеет место равенство

$$e_n = \left(\sum_{k=1}^{2n} |P_n(y, t_k)|\right)^{-1} = |f_n(y)|,$$

где $f_n(y) = \pi^{-1}\int_{-\pi}^{\pi} K(y - \tau) \operatorname{sign}\sin n\tau d\tau$.

Выбирая y, $0 \leqslant y \leqslant \pi/n$, так, что $|f_n(y)| = \|f_n\|_\infty$, получаем оценку $d_{2n}(K*U_\infty, C_{2\pi}) \geqslant \|f_n\|_\infty$, которая является точной во многих важных частных случаях. (Например в случае, когда $K(\cdot)$ — ядро Бернулли $\mathcal{D}_r(\cdot)$, $r \in N$, либо произвольная знакорегулярная функция [4]).

Доказательство теоремы. Построим специальное подпространство $KP_{2n} \subset C_{2\pi}$, $\dim KP_{2n} = 2n$. Пусть $\Delta_j = [(j-1)\pi/n, j\pi/n)$, $1 \leqslant j \leqslant 2n$, а χ_j — характеристическая функция Δ_j, т. е.

$$\chi_j(t) = \begin{cases} 1, & t \in \Delta_j, \\ 0, & t \in [0, 2\pi) \setminus \Delta_j. \end{cases}$$

Обозначим через $\nu_j(t)$ 2π-периодическое продолжение функции $\chi_j(t)$. Легко видеть, что множество функций вида

$$\xi_{2n}(\cdot) = \sum_{j=1}^{2n} c_j \nu_j(\cdot), \quad c_j \in R, \tag{2}$$

образует линейное пространство размерности $2n$, которое обозначим через P_{2n}^0. Пусть $P_{2n,0}^0$ — множество функций $\xi \in P_{2n}^0$, для которых

$$\sum_{j=1}^{2n} c_j = 0. \tag{3}$$

Рассмотрим множество функций $f(t) \ni KP_{2n} \overset{\mathrm{df}}{=} (K*P_{2n,0}^0) \cup R$. В работе [4] показано, что $\dim KP_{2n} = 2n$. Функции $f \in KP_{2n}$ представимы в виде $f(\cdot) = (K*\xi_{2n})(\cdot)$, где коэффициенты c_j в представлении (2) для функции ξ_{2n} удовлетворяют условию (3).

Пусть K^{-1} — обобщенная 2π-периодическая функция [5] с рядом Фурье $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(\psi(k))^{-1}\cos(kt-\beta\pi/2)$. Отметим, что свертка с обобщенной функцией K^{-1} эквивалентна операции (ψ,β) дифференцирования, рассмотренной [3]. Нетрудно проверить, что $s[K^{-1}*f(t)]=s[\xi_{2n}(t)]$. Таким образом, на пространстве KP_{2n} задан линейный оператор K^{-1}, действующий по формуле $e=K*\xi_{2n}\to\xi_{2n}$. Найдем норму оператора K^{-1}, т. е. минимальную константу C в неравенстве

$$\operatorname{ess\,sup}|K^{-1}f|\leqslant C\|f\|_C. \tag{4}$$

Поскольку в неравенстве (4) фигурирует равномерная метрика, то в пространстве KP_{2n} естественно выбрать базис, образуемый фундаментальными сплайнами $\overline{sk}_1(y,t-x_x)$, $x_k=k\pi/n$, $0\leqslant k\leqslant 2n$, т. е. функциями, представимыми в виде $K_*\xi_{2n}$ и удовлетворяющими условиям

$$\overline{sk}_1(y,y_k)=\delta_{0,k}=\begin{cases}1, & k=0,\\ 0, & 1\leqslant k\leqslant 2n-1,\end{cases}$$

где $y_k=x_k+y$, а y — первая точка экстремума стандартной функции $f_n(\cdot)$. Из леммы 1.8 работы [4] следует, что в условиях теоремы для любой непрерывной 2π-периодической функции $g(\cdot)$ существует единственный интерполяционный sk_1-сплайн, т. е. найдется единственный набор коэффициентов $c_k=c_k(g)$, $0\leqslant k\leqslant 2n$, в представлении (1) такой, что $sk_1(f,y_k)\overset{\mathrm{df}}{=}sk_1(y_k)=f(y_k)$. Из определений следует, что $KP_{2n}=S_{2n}^{K_1}$. Стало быть, $\forall f\in KP_{2n}$ справедливо единственное представление

$$f(t)=\sum_{k=1}^{2n}f(y_k)\,\overline{sk}_1(y,t-x_k). \tag{5}$$

Подействуем оператором K^{-1} на произвольную функцию $f\in KP_{2n}$. При $t\in(x_p,x_{p+1})$, $0\leqslant p\leqslant 2n$, из равенста (5) находим

$$|K^{-1}f(t)|\leqslant\max_{1\leqslant k\leqslant 2n}|f(y_k)|\sum_{k=1}^{2k}|K^{-1}\overline{sk}_1(y,t-x_k)|. \tag{6}$$

Для завершения доказательства теоремы достаточно показать, что при $t\in(x_p,x_{p+1})$ $\sum\limits_{k=1}^{2n}|K^{-1}\overline{sk}(y,t-x_k)|=e_n^{-1}$. Из леммы 1.6 работы [4] следует справедливость следующего представления для фундаментального sk_1-сплайна:

$$sk_1(y,t)=(2n)^{-1}+(2n)^{-1}\sum_{j=1}^{n-1}|\lambda_j(y)|^{-2}(\rho_j(t)\rho_j(y)+\sigma_j(t)\sigma_j(y)).$$

Отсюда в силу линейности оператора K^{-1} следует

$$K^{-1}sk_1(y,t)=(2n)^{-1}\sum_{j=1}^{2n-1}|\lambda_j(y)|^{-2}(\rho_j(y)(K^{-1}\rho_j)(t)+\sigma_j(y)(K^{-1}\sigma_j(t)). \tag{7}$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что при $1\leqslant j\leqslant 2n-1$

$$(K^{-1}\rho_j(t))=n^{-1}K^{-1}*\Big(\sum_{\nu=1}^{2n}\cos jx_\nu K_1(t-x_\nu)\Big)=n^{-1}\sum_{\nu=1}^{\nu}\cos jx_\nu K^{-1}*(K*\mathcal{D}_1)\times$$

$$\times(t-x_\nu)=n^{-1}\sum_{\nu=1}^{2n}\cos jx_\nu\mathcal{D}_1(t-x_\nu)=\sum_{m=1}^{\infty}(2mn+j)^{-1}\sin(2mn+j)t+$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty}(2mn-j)^{-1}\sin(2mn-j)t,$$

$$(K^{-1}\sigma_j)(t) = n^{-1}\sum_{\nu=1}^{2n}\sin jx_\nu \mathcal{D}_1(t-x_\nu) = \sum_{m=0}^{\infty}(2mn+j)^{-1}\cos(2mn+j)t -$$

$$-\sum_{m=1}^{\infty}(2mn-j)^{-1}\cos(2mn-j)t.$$

Для дальнейшего потребуется следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть* $0\leqslant x_0<x_1<\ldots<x_{2n-1}<x_{2n}=2\pi$, $x_k=k\pi/n$ — *разбиение* $[0,2\pi)$. *Тогда, если* $\sum_{\nu=0}^{2n-1}c_\nu=0$, *то функция* $\mu(t) = \sum_{\nu=0}^{2n}c_\nu\mathcal{D}_1(t-x_\nu)$ *кусочно постоянна на интервалах* (x_{k-1},x_k), $k\in N$.

Утверждение леммы 1 непосредственно вытекает из того факта, что функция $\mathcal{D}_1(t)$ 2π-периодична и представима в виде $\mathcal{D}_1(t)=(\pi-t)/2$ при $t\in(0,2\pi)$.

Так как $\sum_{\nu=1}^{2n}\sin jx_\nu=\sum_{\nu=1}^{2n}\cos jx_\nu=0$, $1\leqslant j\leqslant 2n-1$, то функции $(K^{-1}\rho_j)(t)$ и $(K^{-1}\sigma_j)(t)$ кусочно постоянны на разбиении Δ_{2n}. Вычисляя их значения в точках $t_k=(x_{k-1}+x_k)/2=k\pi/n-\pi/2n$, имеем

$$(K^{-1}*\rho_j)(t_k)=\sin jt_k\left(\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^k(2mn+j)^{-1}-\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m(2mn-j)^{-1}\right), \quad (8)$$

$$(K^{-1}*\sigma_j)(t_k)=-\cos jt_k\left(\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m(2mn+j)^{-1}-\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m(2mn-j)^{-1}\right). \quad (9)$$

Далее, используя представления для функций $\rho_j(\cdot)$ и $\sigma_j(\cdot)$, а также равенства (8) и (9), находим

$$\rho_j(\cdot)=\rho_{2n-j}(\cdot), \quad (10)$$

$$\sigma_j(\cdot)=-\sigma_{2n-j}(\cdot), \quad (11)$$

$$(K^{-1}\rho_j)(t_k)=(K^{-1}\rho_{2n-j})(t_k), \quad (12)$$

$$(K^{-1}\sigma_j)(t_k)=-(K^{-1}\sigma_{2n-j})(t_k). \quad (13)$$

Из равенства (8) следует

$$(K^{-1}\sigma_n)(t_k)=0,\quad 1\leqslant k\leqslant 2n. \quad (14)$$

Сопоставление соотношений (7)—(14) в принятых обозначениях доказывает справедливость равенства

$$\sum_{k=1}^{2n}|K^{-1}\overline{sk}_1(y,t-x_k)|=e_n^{-1}. \quad (15)$$

Так как функция $K^{-1}\overline{sk}_1(y,t-x_k)$ кусочно постоянна, то, полагая $f(y_k)= = \operatorname{sign}(K^{-1}\overline{sk}_1(y,t-x_k))\max\limits_{1<k<2n}|f(y_k)|$, убеждаемся в точности оценки (6).

Из определения поперечника $b_{2n-1}(K*U_\infty,C_{2\pi})$ следует неравенство $b_{2n-1}(K*U_\infty,C_{2\pi})\geqslant e_n$. Поскольку $d_{2n-1}(K*U_\infty,C_{2\pi})\geqslant b_{2n-1}(K*U_\infty,C_{2\pi})$ [2], то используя схему рассуждений В. М. Тихомирова, приведенную в работе [6], получаем оценку

$$d_{2n}(K*U_\infty,C_{2\pi})=d_{2n-1}(K*U_\infty,C_{2\pi})\geqslant b_{2n-1}(K*U_\infty,C_{2\pi})\geqslant e_n. \quad (16)$$

Метод Стейна [7] позволяет заключить, что справедливо неравенство

$$\| K^{-1} f_h(\cdot) \|_L \leqslant e_n^{-1} \| f_h(\cdot) \|_L + \varepsilon(h), \tag{17}$$

где $f \in KP_{2n}$, $f_h(\cdot)$ — функция Стеклова для $f(\cdot)$, $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$.

Из оценки (17) следует $b_{2n-1}(K*U_1, L_1) \geqslant e_n$. Теорема доказана.

Из доказанной теоремы и двойственности для линейных поперечников [2] следуют оценки $\lambda_{2n}(K*U_\infty, L_\infty) = \lambda_{2n}(K*U_1, L_1) \geqslant e_n$. Заметим, что в случае, когда $K \notin C_{y,2n}$, имеем $e_n^{-1} = \sum\limits_{k=1}^{2n} | K^{-1}\overline{sk}_1(y, t - x_k)| > > \left| \sum\limits_{k=1}^{2n} (-1)^k K^{-1}\overline{sk}_1(y, t-x_k) \right|$. В силу леммы 2.4 из работы [4] при $f_n(y) \neq 0$ находим $\left| \sum\limits_{k=1}^{2n} (-1)^k K^{-1}\overline{sk}_1(y, t - x_k) \right| = |f_n(y)|^{-1}$. Если y таково, что $|f_n(y)| = \|f_n\|_\infty$, то $e_n < \|f_n\|_\infty$. С другой стороны, для любой суммируемой функции $K(\cdot)$ функция $f_n(\cdot) = \pi^{-1} \int\limits_{-\pi}^{\pi} K(\cdot - \tau) \operatorname{sign} \sin n\tau d\tau$ принадлежит классу $K*U_\infty$ и обладает свойством $\operatorname{sign} f_n(y + k\pi/n) = (-1)^k \varepsilon$, где $\varepsilon = \pm 1$ и не зависит от k, а $y \in [0, \pi/n]$. Кроме того, $|f_n(y + k\pi/n)| = = \|f_n\|_\infty$, $0 \leqslant k \leqslant 2n - 1$. На основании теоремы Чебышева (см., например, [8, с. 46]) можно утверждать, что $\inf\{\|f_n - t_{n-1}\|_\infty, t_{n-1} \in \mathscr{T}_{2n-1}\} = = \|f_n\|_\infty$, где $\mathscr{T}_{2n-1}$ — пространство тригонометрических полиномов t_{n-1} порядка не выше $n - 1$.

Стало быть, для любой суммируемой функции $K(\cdot)$

$$E_n(K*U_\infty, C_{2\pi}) \overset{\mathrm{df}}{=} \sup_{f \in K*U_\infty} \inf_{t_{n-1} \in \mathscr{T}_{2n-1}} \| f - t_{n-1} \|_\infty \geqslant \| f_n \|_\infty.$$

Таким образом, в случае, когда $K \in A_n \setminus C_{y,2n}$, в оценках снизу и сверху для соответствующих поперечников $d_n(K*U_\infty, C_{2\pi})$ образуется некоторый зазор.

Приведем еще одно утверждение, позволяющее вычислять точные значения поперечников.

Лемма 2. *Пусть суммируемая 2π-периодическая функция $K(\cdot)$ обладает свойством $C_{y,2n}$ и, кроме того, последовательность e_k, фигурирующая в определении свойства $C_{y,2n}$, имеет значение 1 при всех k, $1 \leqslant \leqslant k \leqslant 2n$. Тогда при некотором $\varepsilon = \varepsilon(n, r)$, зависящем от n и r, функция $S(\cdot) = K(\cdot) + \delta(\cdot)$, где $\delta(\cdot) \in \varepsilon U_1$, удовлетворяет условию $C_{y,2n}$.*

Утверждение леммы 2 вытекает из непрерывной зависимости коэффициентов полинома $P_n(y, t)$ от $K(\cdot)$.

Так как фундаментальный полиномиальный сплайн меняет знак $2n$ раз на периоде, то в силу теоремы Ролля и того, что функция $\mathscr{D}_{r,r}(t)$, $r \in \mathbb{N}$, удовлетворяет свойству $C_{\xi_r, 2n}$, где ξ_r зависит от r [4], условия леммы 2 выполнены. Поэтому для любого α, удовлетворяющего условию $|\alpha - r| \leqslant \varepsilon \overset{\mathrm{df}}{=} \varepsilon(n, r)$, $r \in \mathbb{N}$, функция $\mathscr{D}_{\alpha,r}(\cdot)$ удовлетворяет свойству $C_{\xi_r, 2n}$. Стало быть, в этом случае

$$\lambda_{2n-1}(W^\alpha_{r,\infty}, C_{2\pi}) = b_{2n}(W^\alpha_{r,\infty}, C_{2\pi}) = \lambda_{2n-1}(W^\alpha_{r,1}, L) = b_{2n-1}(W^\alpha_{r,1}, L) =$$
$$= \| \mathscr{D}_{\alpha,r}(t) * \operatorname{sign} \sin nt \|_\infty = n^{-\alpha} 4\pi^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{(r+1)k} (2k+1)^{\alpha+1}.$$

1. *Kolmogorov A. N.* Uber die besste Annaherung von Fanctionen einer gegebenen Functionklassen // Ann. Math.— 1936.— 37, N 2.— P. 107—110.
2. *Тихомиров В. М.* Некоторые вопросы теории приближений.— М. : Изд-во Моск. ун-та, 1975.— 304 с.

3. *Степанец А. И.* Классификация и приближение периодических функций.— Киев : Наук. думка, 1987.— 267 с.
4. *Кушпель А. К.* *sk*-Сплайны и точные оценки поперечников функциональных классов в пространстве $C_{2\pi}$.— Киев, 1984.— 41 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 84.25).
5. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* Тригонометрические ряды и обобщенные периодические функции // Докл. АН СССР.— 1981.— **257**, № 4.— С. 799—804.
6. *Тихомиров В. М.* Наилучшие методы приближения и интерполирования в пространстве $C[-1,1]$ // Мат. сб.— 1969.— **80**, № 2.— С. 290—304.
7. *Субботин Ю. Н.* О кусочно полиномиальной интерполяции // Мат. заметки.— 1967.— **1**, № 1.— С. 63—70.
8. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи теории приближения.— М. : Наука, 1976.— 320 с.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 21.04.88