УДК 519.48

А. А. Бовди, И. И. Хрипта

Обобщенная нильпотентность мультипликативной группы группового кольца

Пусть $U(KG)$ — мультипликативная группа группового кольца KG. Целью настоящей работы является доказательство следующей теоремы.

Теорема. *Пусть K — коммутативное кольцо характеристики p^m и G — группа, обладающая элементом порядка p. Тогда следующие условия эквивалентны*: 1) $U(KG)$—*группа с нормализаторным условием*; 2) $U(KG)$—ZA-*группа*; 3) $U(KG)$ — *нильпотентна*; 4) G — *нильпотентная группа, коммутант которой — конечная p-группа*.

Полученный результат продолжает исследование А. А. Бовди [1], в котором изучено строение целочисленного группового кольца с обобщенно нильпотентной мультипликативной группой, а также обобщает результаты работ И. И. Хрипты [2, 3] и Сегала [4], где доказана эквивалентность условий 3 и 4.

Прежде чем доказывать теорему, приведем некоторые вспомогательные утверждения. Группу, в которой выполняется нормализаторное условие, будем называть N-группой. Сначала докажем критерий N-группы на языке коммутаторов.

Лемма 1. *Группа G является N-группой тогда и только тогда, когда для каждого $g \in G$, каждой подгруппы $H \subseteq G$ и любой последовательности $\{h_n\}$ элементов подгруппы H последовательность коммутаторов $k_1 = [g, h_1] = gh_1g^{-1}h_1^{-1}, \ldots, k_{n+1} = [k_n, h_{n+1}], \ldots$ содержит элемент из H.*

Доказательство. Пусть G — N-группа и предположим, что существует подгруппа $H \subseteq G$ и такая последовательность $\{h_n \mid h_n \in H\}$, что соответствующая последовательность коммутаторов $\{k_n\}$ не содержит элемент из H. Если $1 = H_0 \subset H_1 = H \subset \ldots \subset H_\alpha \subset \ldots \subset H_\beta = G$ — строго возрастающий нормальный ряд, проходящий через подгруппу H, то существует наименьшая подгруппа H_γ из ряда, содержащая элемент k_m последовательности $\{k_n\}$. Индекс γ не может быть предельным и, поскольку $\gamma > 1$, то существует $\gamma - 1$. Так как $h_{m+1} \in H \subseteq H_{\gamma-1}$ и $H_{\gamma-1}$ нормальна в H_γ, то $k_{m+1} = [k_m, h_{m+1}] \in H_{\gamma-1}$, а это невозможно.

Если же G не является N-группой, то G обладает такой подгруппой H, что $N(H) = H$. Тогда, если $g \in G \setminus H$, то существует такой $h \in H$, что $[g, h]$ не принадлежит H. Таким образом удается построить такую последовательность $\{h_n \mid h_n \in H\}$, что $\{k_n\}$ не содержит элемент из H, а это так же невозможно. Лемма доказана.

Пусть ΔG — максимальная подгруппа группы G, состоящая из конечных классов сопряженных элементов группы G.

Лемма 2. *Если u — нетривиальный элемент группы $U(KG)$, принадлежащий нормализатору $N(G)$ подгруппы G в $U(KG)$, а носитель $\operatorname{supp} u$ элемента u содержит единичный элемент, то $\operatorname{supp} u \subseteq \Delta G$.*

Доказательство. Пусть $\operatorname{supp} u = \{g_1 = 1, g_1, \ldots, g_t\}$. Тогда $t \geqslant 2$ и для каждого $g \in G$ существует такой $g' \in G$, что $\operatorname{supp} u = g' (\operatorname{supp} u) g^{-1}$. Легко видеть, что если $g \in G$, то отображение $g \to \begin{pmatrix} g_i \\ g' g_i g^{-1} \end{pmatrix}$ является гомоморфизмом группы G в группу подстановок на множестве $g_1, g_2, \ldots, g_t$, ядро H которого есть подгруппа конечного индекса в G. Тогда для произвольного элемента $h \in H$ имеем $g_i = h' g_i h^{-1}$ и, поскольку $g_1 = 1$, то $h' = h$ и H — подгруппа централизатора $C_G(g_i)$. Следовательно, $[G : C_G(g_i)] < \infty$ и $\operatorname{supp} u \subseteq \Delta G$. Лемма доказана.

В дальнейшем предполагаем, что K — коммутативное кольцо характеристики p^m и группа G имеет элемент порядка p.

Лемма 3. *Если группа $U(KG)$ является N-группой, то G — ZA-группа с конечными классами сопряженных элементов и коммутант группы G есть p-группа.*

Доказательство. Поскольку N-группа локально нильпотентна, то $U(KG)$ — локально нильпотентна, а, как показано в [2] (см. начало доказательства теоремы 1 из [2] или лемму 11.3.2 из [4]), для любых $g, h \in G$ существует такое p^t, что $g^{p^t} \in C_G(h)$ и коммутант группы G — p-группа.

Пусть $\mathfrak{z}(G)$ — центр и P — силовская p-подгруппа группы G. Докажем, что $\mathfrak{z}(G) \cap P \neq 1$. Это очевидно, когда $|P| = 2$. Если $|P| > 2$, то выберем в P конечную p-подгруппу H порядка больше 2 и построим нетривиальный обратимый элемент $u = 1 + p^{m-1} \sum\limits_{h \in H} h$. Тогда или $u \in N(G)$, или в силу леммы 1 можно выбрать такие элементы $g_1, g_2, \ldots, g_m \in G$, что коммутатор $u_m = [u, g_1, \ldots, g_m]$ принадлежит $N(G) \setminus G$. Таким образом, построен нетривиальный обратимый элемент из $N(G)$, носитель которого содержится в P. По лемме 2 существует неединичный элемент из $P \cap \Delta G$, который согласно лемме Дицмана порождает конечную нормальную p-подгруппу M. Индекс централизатора каждого элемента из M конечен и, по изложенному выше, равен либо 1, либо p^t. Следовательно, хотя бы два класса сопряженных элементов группы G из M одноэлементны, и этим утверждение $\mathfrak{z}(G) \cap P \neq 1$ доказано.

Чтобы доказать, что G — ZA-группа достаточно проверить, что каждая ее неединичная фактор-группа G/T обладает нетривиальным центром. Утверждение очевидно, когда $P \subseteq T$, так как фактор-группа G/T абелева. Пусть P не содержится в T, и положим $T_1 = T \cap P$ и $\overline{G} = G/T_1$. Тогда идеал $I(T_1)$ алгебры KG, порожденный элементами $h - 1$, $h \in T_1$, является нильидеалом [5], так как каждая конечно порожденная подгруппа группы G нильпотентна и имеет конечную силовскую p-подгруппу. Легко видеть, что $KG/I(T_1) \cong KG/T_1$ [5] и поэтому $U(K\overline{G}) \cong U(KG)/1 + I(T_1)$. Тогда $U(K\overline{G})$ — N-группа и в силу доказанного утверждения существует неединичный элемент gT_1 подгруппы $P/T_1 \cap \mathfrak{z}(\overline{G})$. Легко видеть, что $g \in P$ и $g \bar{\in} T$. Следовательно, gT — нетривиальный элемент из центра группы G/T.

Докажем, что G — FC-группа. Так как G — ZA-группа, то существует строго возрастающий центральный ряд $1 = Z_0 \subset Z_1 \subset \ldots \subset Z_\alpha \subset \ldots \subset Z_\gamma = G$. Индукцией по α докажем, что $Z_\alpha \subset \Delta G$. При $\alpha = 1$ это очевидно, и предположим $Z_\beta \subseteq \Delta G$ при всех $\beta < \alpha$. Легко видеть, что $Z_\alpha \subseteq \Delta G$, если α — предельное число. Предположим, что α не предельное и Z_α не содержится в ΔG. Тогда существует элемент $g \in Z_\alpha$, обладающий бесконечным числом сопряженных в G. Зафиксируем элемент h порядка p из Z_1 и построим индуктивно последовательности $\{a_n\}$ и $\{c_n\}$ с такими свойствами: 1) $a_{k+1} \in C_G(c_1, \ldots, c_k)$; 2) $c_1 \bar{\in} \langle h \rangle$, $c_{k+1} \bar{\in} \langle c_1, \ldots, c_k, h \rangle$, где $c_k = [a_k, g]$. Так как множество коммутаторов $\{[a, g] \; a \in G\}$ бесконечно, то в нем существует элемент $c_1 = [a, g]$, не принадлежащий $\langle h \rangle$. Предположим, что уже выбраны элементы $a_1, a_2, \ldots, a_k$, и укажем способ выбора a_{k+1}. Легко видеть, что $c_1, c_2, \ldots, c_k \in Z_{\alpha-1} \subseteq \Delta G$ и поэтому централизатор $D = C_G(c_1, \ldots, c_k)$ имеет конечный индекс в G. Так как $[G : C_G(g)] \leqslant [G : C_D(g)] = [G : D][D : C_D(g)]$, то индекс $[D : C_D(g)]$ бесконечен. Тогда множество коммутаторов вида $[d, g]$, $d \in D$, бесконечно и в D можно выбрать такой элемент a_{k+1}, что $c_{k+1} = [a_{k+1}, g]$ не принадлежит конечной подгруппе $\langle c_1 c_2, \ldots, c_k, h \rangle$. Таким образом, последовательность построена.

Если $w = p^{m-1}(1 + h + h^2 + \ldots + h^{p-1})$, то $x = 1 + wg \in U(KG)$ Теперь вычисляем коммутатор $k_n = [x, a_1, a_2, \ldots, a_n]$ Индуктивным путем получаем $k_n = 1 + w(1 - c_1) \ldots (1 - c_n) g$ и в силу леммы 1 $k_t = a \in G$ для некоторого t.

Поэтому $a - 1 = w(1 - c_1) \ldots (1 - c_t) g$, а отсюда вытекает $(a-1) \times w = 0$, что возможно лишь при $a \in \langle h \rangle$. Если $a = 1$, то $w(1 - c_1) \ldots (1 - c_t) = 0$, откуда c_t принадлежит $\langle c_1, c_2, \ldots, c_{t-1}, h \rangle$, что противоречит свойству 2 построенной последовательности. Поэтому $a \neq 1$, и из равенства $a - 1 = w(1 - c_1) \ldots (1 - c_t) g$ получаем $a = cg$, где $c \in \langle c_1, c_2, \ldots, c_t, h \rangle$. Следовательно, $g \in \Delta G$, что противоречит предположению. Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть G — FC-группа. Тогда: 1) полная подгруппа группы G содержится в центре $\mathfrak{z}(G)$; 2) если G с бесконечным коммутантом, то каждая ее подгруппа конечного индекса также имеет бесконечный коммутант и в G можно выбрать такую подгруппу W конечного индекса и такой элемент g_0, что $g_0 \bar{\in} W$ и $g_0 \in C_G(W)$.*

Доказательство. Если H — полная подгруппа и M — нормальная подгруппа, порожденная элементом $g \in G$, то централизатор $C_G(M)$ имеет конечный индекс m в G. Следовательно, $H = H^m \subseteq C_G(M) \subseteq C_G(g)$ и $H \subseteq \mathfrak{z}(G)$.

Если подгруппа V группы G имеет конечный индекс и G' — бесконечная подгруппа, то в [6] доказана бесконечность коммутанта V'. Пусть $g \in G \setminus \mathfrak{z}(G)$ и $L = C_G(g)$. Тогда элемент $g_0 \in G \setminus L$ и подгруппа $W = G_L(g_0)$ удовлетворяют требованиям леммы. Действительно, $g_0 \in C_G(W)$ и индекс подгруппы W в G равен $[G:L][L:W] < \infty$. Лемма доказана.

Лемма 5. *Если G — ZA-группа с конечными классами сопряженных элементов, содержащая не слойно-конечную p-группу H, то в централизаторе произвольного конечного подмножества группы G существует бесконечная элементарная абелева p-подгруппа.*

Доказательство. Пусть A — максимальная абелева нормальная подгруппа группы H и $C = C_H(A)$. Тогда легко доказать, что $C = A$. Если A слойно конечна, то согласно теореме Черникова [7] $A = A_1B$, где $A_1 = 1$ или полная подгруппа центра группы G, а B — конечная подгруппа. Поэтому $A = C_H(B)$ и в силу того, что G — FC-группа, имеем $[H:A] < \infty$. Отсюда вытекает слойно-конечность группы H, что невозможно. Таким образом, группа A не слойно-конечна и в ней существует бесконечная элементарная абелева p-подгруппа E. Если T — конечное подмножество в G и $E_1 = C_E(T)$, то индекс $[E:E_1]$ конечен и поэтому подгруппа E_1 бесконечна. Лемма доказана.

Пусть x, y, u, v — такие элементы кольца KG, что u и v центральны в KG и $u^2 = v^l = 0$. Тогда элементы $1 - xu$, $1 - yv$ обратимы в KG и имеет место равенство

$$[1 - xu,\ 1 - yv] = 1 - uv(xy - yx)\sum_{j=0}^{l-1}(yv)^j. \tag{1}$$

Формула (1) проверяется непосредственным вычислением.

Лемма 6. *Если коммутант группы G есть группа $\langle a_i \mid a_1^p = 1, a_{i+1}^p = a_i\rangle$ типа p^∞, то группа $U(KG)$ не является N-группой.*

Доказательство. В силу леммы 3 можно предполагать, что G — FC-группа; по лемме 4 $G' \subseteq \mathfrak{z}(G)$ и в G существуют такая подгруппа W конечного индекса и такой элемент g_0, что $g_0 \in C_G(W) \setminus W$. Коммутант группы W бесконечен и совпадает с G'. Построим последовательность $\{g_n \mid g_n \in W\}$ с такими свойствами: $g_{2n+1}, g_{2n+2} \in C_G(g_1, \ldots, g_{2n})$ и $[g_{2n-1}, g_{2n}] = a_{2n}^{-1}$. Возможность построения обеспечивается тем, что в централизаторе C произвольного конечного подмножества группы W для каждого i существуют такие $x_i, y_i \in W$, что $[x_i, y_i] = a_i^{-1}$. Действительно, подгруппа C — конечного индекса в W, по лемме 4 C' бесконечна и существуют такие $x_i, t_i \in C$, что $[x_i, t_i] \bar{\in} \langle a_i\rangle$. Тогда $[x_i, t_i] = a_{i+l}^k$, где $l > 0$ и $(k, p) = 1$. Если s — решение сравнения $kx \equiv 1 \pmod{p^i}$ и $y_i = t_i^{-sp^l}$, то $[x_i, y_i] = [x_i, t_i]^{-sp^l} = a_{i+l}^{-ksp^l} = a_i^{-1}$. Пусть $H_{2i} = \langle g_1, \ldots, g_{2i}\rangle$, $v_i = a_i - 1$, $\alpha = p^{m-1}(1 + a_1 + \ldots + a_1^{p-1})$. Тогда α, v_i — элементы центра кольца KW и $\alpha^2 = v_i^{mp^i} = 0$. Легко видеть, что $g_n \in C(H_{2i})$ при $n > 2i$ и $1 - xv_2$, $1 - x\alpha$ принадлежат $U(KG)$. Пусть $x_0 = 1 - g_0g_1\alpha$ и $x_{2n-1} = 1 - g_{2n}g_{2n+1}v_{2n+1}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Определим индуктивно коммутаторы $k_1 = [x_0, x_1]$, $k_{2n+1} = [k_{2n-1}, x_{2n+1}]$. Пусть $l_n = mp^{2n+1} - 1$. Индукцией по n докажем, что

$$k_{2n-1} = 1 + \alpha v_2 v_3 \ldots v_{2n+1} g_0 \alpha_{2n} u_{2n+1}, \tag{2}$$

где $u_{2n+1} = g_{2n+1} + \sum_{k=2}^{l_n} \beta_k g_{2n+1}^k$, $\beta_k \in KH_{2n}v_{2n+1}^{k-1}$ и $\alpha_{2n} \in U(KH_{2n})$. Пусть

$(x, y) = xy - yx$ — лиев коммутатор. Так как $(g_{2n}, g_{2n-1}) = g_{2n-1}g_{2n}v_{2n}$, то на основании (1) получаем

$$k_1 = [x_0, x_1] = 1 + \alpha g_0 g_1 g_2 v_2 g_3 \sum_{j=0}^{l_1} g_3^j (g_2 v_3)^j v_3,$$

и, следовательно, (2) доказано при $n = 1$. Предположим, что оно верно для n и докажем справедливость его при $n+1$. В силу (1) имеем $k_{2n+1} = 1 + \alpha v_2 v_3 \dots v_{2n+1} v_{2n+3} \alpha_{2n} (g_{2n+2}, u_{2n+2}) F$, где

$$F = g_{2n+3} \sum_{j=0}^{l_{n+1}} (g_{2n+3})^j (g_{2n+2} v_{2n+3})^j.$$

Легко видеть, что F можно представить в виде

$$g_{2n+3} + \sum_{k=2}^{l_{n+1}} \beta'_k g_{2n+3}^k, \ \beta'_k \in KH_{2n+2} v_{2n+1}^{k-1}.$$

Далее,

$$(g_{2n+2}, u_{2n+1}) = (g_{2n+2}, g_{2n+1}) + \sum_{k=2}^{l_n} \beta_k (g_{2n+2}, g_{2n+1}^k) =$$

$$= g_{2n+1} g_{2n+2} v_{2n+2} + \sum_{k=2}^{l_n} \beta_k g_{2n+1}^k g_{2n+2} v_{2n+2} (1 + a_{2n+2} + \dots + a_{2n+2}^{k-1}) = v_{2n+2}\beta,$$

где

$$\beta = g_{2n+1} g_{2n+2} + \sum_{k=2}^{l_n} \beta_k g_{2n+1}^k g_{2n+2} (1 + a_{2n+2} + \dots + a_{2n+2}^{k-1})$$

принадлежит кольцу KH_{2n+2}. Поскольку $\beta \equiv g_{2n+1} g_{2n+2} (\mathrm{mod}\, I(G'))$, то β обратим. Таким образом, k_{2n+1} можно представить в виде $k_{2n+1} = 1 + \alpha v_2 v_3 \dots v_{2n+3} g_0 \alpha_{2n+2} u_{2n+3}$, где $\alpha_{2n+2} = \alpha_{2n}\beta$ и $u_{2n+3} = F$, что доказывает (2).

Легко видеть, что $\alpha v_2 v_3 \dots v_{2n+1} g_0 \alpha_{2n} u_{2n+1} \neq 0$, так как в противном случае в виду обратимости элемента $g_0 \alpha_{2n} u_{2n+1}$ получили бы $\alpha v_2 \dots v_{2n+1} = 0$, и отсюда $a_{2n+1} \in \langle a_{2n} \rangle$, что невозможно. Поэтому подгруппа носителя элемента k_{2n-1} содержит элемент g_0 и $k_{2n-1} \bar{\in} U(KW)$. Тем самым указаны элемент x_0, подгруппа $U(KW)$ группы $U(KG)$ и такая последовательность $\{x_{2n-1}\}$ элементов из $U(KW)$, что последовательность коммутаторов $\{k_{2n-1}\}$ не содержит элемент из $U(KW)$. Тогда по лемме 1 группа $U(KG)$ не является N-группой. Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Пусть $U(KG)$ — N-группа. Докажем, что коммутант G' — конечная p-группа. Как показано в лемме 3, группа G является ZA-группой с конечными классами сопряженных элементов, а G' — p-группой. Предположим, что G' бесконечна и рассмотрим такие случаи.

1. Группа G' слойно конечна. Тогда по теореме Черникова [7] $G' = AB$, где $A = A_1 \times \dots \times A_m$ — прямое произведение групп типа p^∞, B — конечная подгруппа. По лемме 4 группа A содержится в центре G и $B_1 = \langle gbg^{-1} \ g \in G, \ b \in B \rangle$ является конечной нормальной подгруппой, поскольку G — FC-группа. Тогда $D = (A_2 \times \dots \times A_m) B_1$ — нормальная подгруппа группы G и коммутант фактор-группы $G_1 = G/D$ изоморфный $A_1/A_1 \cap D$. Легко видеть, что группа $A_1 \cap D$ конечна и поэтому коммутант G_1' является группой типа p^∞. Так как $U(KG)/1 + I(D)$ изоморфна $U(KG_1)$, то она является N-группой, что противоречит лемме 6. Поэтому этот случай невозможен.

2. Группа G' не слойно конечна. Выберем в G элемент g_0 и подгруппу W, удовлетворяющие требованиям леммы 4. Коммутант W' группы W бесконечен и, как показано в случае 1, группа W' не слойно конечна. Построим

последовательность $(g_1, g_2, a_2), (g_3, g_4, a_4), \ldots, (g_{2n+1}, g_{2n+2}, a_{2n+2}), \ldots$, состоящую из троек элементов группы W, со следующими свойствами:

1° $g_{2n+1}, g_{2n+2} \in C_G(\{a_{2i}, g_j \mid 0 \leqslant i \leqslant n, j \leqslant 2n\})$;

2° $b_{2n+1} \overline{\in} \langle a_{2i}, b_{2j+1} \mid i \leqslant n, j < n\rangle$;

3° $a_{2n+2} \in C_G(\{a_{2i}, g_j \mid 0 \leqslant i \leqslant n, j \leqslant 2n+2\})$;

4° $a_{2n+2} \overline{\in} \langle a_{2i}, b_{2j+1} \mid i \leqslant n, j \leqslant n\rangle$;

5° $a_{2n}^p = 1$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, где a_0 — фиксированный элемент порядка p из центра $\mathfrak{z}(W)$ группы W и $b_{2n+1} = [g_{2n+2}, g_{2n+1}]$.

Построение легко выполняется индукцией по n. Действительно, выбор элементов g_{2n+1}, g_{2n+2} со свойствами 1° и 2° возможен, так как централизатор C произвольного конечного подмножества группы W имеет конечный индекс и его коммутант C' бесконечен, а существование элементов a_{2n} со свойствами 3°—5° гарантируется леммой 5.

Пусть $i_{2n} = 1 + a_{2n} + \ldots + a_{2n}^{p-1}$ и $x_{2n} = 1 + g_{2n}g_{2n+1}i_{2n}$. Тогда $i_{2n}^2 = 0$; в силу свойств 1°, 3° $(i_{2n}g_{2n}g_{2n+1})^2 = 0$, и поэтому $x_{2n} \in U(KG)$ и $x_{2n}^{-1} = 1 - g_{2n}g_{2n+1}i_{2n}$.

Пусть $k_2 = [x_0, x_2]$ и $k_{2n+2} = [k_{2n}, x_{2n+2}]$. Индуктивным путем на основании 1° — 5° получаем $k_{2n} = 1 + i_0 i_2 \ldots i_{2n}(1 - b_1)(1 - b_3)\ldots(1 - b_{2n-1}) \times g_0 g_1 \ldots g_{2n+1}$. Покажем, что $k_{2n} \neq 1$ при всех n. Действительно, если $k_2 = 1$, то $i_0 i_2 (1 - b_1) = 0$, а это невозможно, так как $b_1 \overline{\in} \langle a_0\rangle$ и $a_2 \overline{\in} \langle b_1, a_0\rangle$.

Предположим, что $k_{2n} \neq 1$. Тогда $\gamma = i_0 i_2 \ldots i_{2n}(1 - b_1)(1 - b_3)\ldots(1 - b_{2n-1}) \neq 0$. Докажем, что $k_{2n+2} \neq 1$. Действительно, если $k_{2n+2} = 1$, то $\gamma(1 - b_{2n+1})i_{2n+2} = 0$, что противоречит свойству 2° и 4°. Легко видеть, что x_{2n} при $n \geqslant 1$ принадлежит подгруппе $U(KW)$ группы $U(KG)$ и согласно лемме 1 $k_{2n} \in U(KW)$ при некотором n. Отсюда вытекает $i_0 i_2 \ldots i_{2n}(1 - b_1)(1 - b_3)\ldots(1 - b_{2n-1}) g_1 \ldots g_{2n+1} g_0 = \alpha_1 w_1 + \ldots + \alpha_l w_l$, где $0 \neq \alpha_i \in K$ и $w \in W$.

В силу этого равенства существуют такие элементы $w, w_i \in W$, что $wg_0 = w_i$, а это противоречит выбору элемента g_0 и подгруппы W. Следовательно, случай 2 также невозможен и поэтому доказана конечность коммутанта группы G. Легко видеть, что ZA-группа с конечным коммутантом нильпотентна. Таким образом, из условия 1 теоремы вытекает условие 4. Так как условия 3 и 4 эквивалентны [2] и ZA-группа является N-группой, то теорема доказана.

1. *Бовди А. А.* О строении целочисленного группового кольца с тривиальными элементами конечного порядка // Сиб. мат. журн.— 1980.— **21**, № 4.— С. 28—37.
2. *Хрипта И. И.* О нильпотентности мультипликативной группы группового кольца // Мат. заметки.— 1972.— **11**, № 2.— С. 191—200.
3. *Хрипта И. И.* О нильпотентности мультипликативной группы группового кольца // Латв. мат. ежегодник.— 1973.— **13**.— С. 119—127.
4. *Sehgal S. K.* Topics in group rings.— New York; Basel: Marcel Dekker, 1978.— 251 p.
5. *Бовди А. А.* Групповые кольца.— Киев : Учеб. метод. каб.— 1974.— 118 с.
6. *Горчаков Ю. М.* Группы с конечными классами сопряженных элементов.— М. : Наука, 1978.— 120 с.
7. *Черников С. Н.* Бесконечные слойно-конечные группы // Мат. сб.— 1948.— **22**.— С. 101—133.

Дрогобыч. пед. ин-т

Получено 16.04.87