УДК 517.98

А. Г. Бакан

Равенство Моро — Рокафеллара для сублинейных функционалов

Одной из основных формул субдифференциального исчисления является формула Моро — Рокафеллара

$$\partial (p + q) = \partial p + \partial q \tag{1}$$

для субдифференциала суммы сублинейных функционалов p и q. Представление (1) может и не иметь места даже тогда, когда все участвующие в нем субдифференциалы существуют. Поэтому возникает задача его двойственного описания. В настоящей статье приведены результаты, посвященные решению этой задачи как для равенства (1), так и для его частных случаев

$$(K_1 \cap K_2)^* = K_1^* + K_2^*, \tag{2}$$

$$(L_1 \cap L_2)^* = L_1^* + L_2^*, \tag{3}$$

которые получаются из (1), если p и q — индикаторные функции конусов K_1, K_2 и подпространств L_1, L_2 соответственно.

В дальнейшем потребуются следующие понятия и обозначения.

1. Подмножество K вещественного отделимого локально выпуклого пространства (ЛВП) (X, ν) называется конусом, если $K + K \subseteq K$, $\lambda K \subseteq K\ \forall \lambda \geqslant 0$, и подпространством, если K — конус и $K = -K$. Пусть $X^* := (X^*, \sigma(X^*, X))$, $X_\sigma := (X, \sigma(X, X^*))$, $X^\#$ — алгебраически сопряженное к X пространство; $N(\nu)$ — совокупность всех открытых абсолютно выпуклых окрестностей нуля в (X, ν); $\mathrm{K}(X)$ — множество всех конусов, а $\Lambda(X)$ — множество всех подпространств пространства X; $\delta(x \mid A)$ — индикаторная функция множества $A \subseteq X$, равная 0 при $x \in A$ и $+\infty$ при $x \notin A$, $A^0 := \{x^* \in X^* \mid x^*(A) \leqslant 1\}$, $A^* := -A^0$; $\overline{A}$, $\mathrm{Cl}\, A$ — замыкание множества $A \subseteq X$ в топологии ν и $\overline{\mathfrak{M}} := \{\mathrm{Cl}\, A \mid A \in \mathfrak{M}\}$, если $\mathfrak{M} \subseteq 2^X$; $\mathrm{co}\, A$ — выпуклая оболочка, $\mathrm{int}\, A := \{x \in X \mid \exists\, U \in N(\nu) : x + U \subseteq A\}$ — внутренность, а $\mathrm{ri}\, A := \{x \in X \mid \exists\, U \in N(\nu) : x + (U \cap \mathrm{lin}\, A) \subseteq A\}$ — относительная внутренность множества $A \subseteq X$, где $\mathrm{lin}\, A$ — наименьшее подпространство, содержащее A. Функционал $p : X \to \mathbb{R}^1 \cup \{+\infty\}$ называется сублинейным, если $p(x + y) \leqslant p(x) + p(y)$, $p(\lambda x) = \lambda p(x)\ \forall x, y \in X$ и $\lambda \geqslant 0$. Обозначим через $\mathrm{Sbl}(X)$ множество всех сублинейных функционалов на X; $\partial p := \{x^* \in X^* \mid x^*(x) \leqslant p(x)\ \forall x \in X\}$ — субдифференциал, $\mathrm{epi}\, p := \{(\alpha, x) \in \mathbb{R}^1 \times X \mid \alpha \geqslant p(x)\}$ — надграфик, а $\mathrm{dom}\, p := \{x \in X \mid p(x) < +\infty\}$ — эффективная область определения $p \in \mathrm{Sbl}(X)$. Конуса K_1 и K_2 в ЛВП X находятся в общем положении, если $K_1 - K_2 = K_2 - K_1$ и для любого $U \in N(\nu)$ существует такое $V \in N(\nu)$, что $V \cap (K_1 - K_2) \subseteq K_1 \cap U - K_2 \cap U$ [1, с. 71, 77]. Пара конусов (K_1, K_2) обладает свойством (N), если $\forall U \in N(\nu)\ \exists V \in N(\nu) : (K_1 + V) \cap (K_2 + V) \subseteq K_1 \cap K_2 + U$, и свойством (G), если $\forall U \in N(\nu)\ \exists V \in N(\nu) : K_1 \cap U + K_2 \cap U \supseteq (K_1 + K_2) \cap V$ [2, с. 531]. В [2, с. 531] доказано, что если $K \in \mathrm{K}(X)$, $K \cap -K = \{0\}$, то пара $(K, -K)$ обладает свойством (N) тогда и только тогда, когда конус K нормален [3, с. 271]. Множество вида $\{x \in X \mid x_i^*(x) \leqslant \alpha_i,\ i = \overline{1, n}\}$, $x_i^* \in X^*$, $\alpha_i \in \mathbb{R}^1$, $i = \overline{1, n}$, $n \in \mathbb{N}$, называется полиэдральным. Функционал $p \in \mathrm{Sbl}(X)$ называ-

ется полиэдральным, если его надграфик — полиэдральный конус [4, с. 187; 5, с. 49]. Функционалы $(p, q) \in \mathrm{Sbl}(X)^2 := \mathrm{Sbl}(X) \times \mathrm{Sbl}(X)$ находятся в общем положении, если в общем положении находятся конусы $\Delta_2(X) \times \mathbb{R}^2$ и $\sigma_2(\mathrm{epi}\, p \times \mathrm{epi}\, q)$, где $\sigma_2(x_1, \lambda_1, x_2, \lambda_2) = (x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2)$, $x_i \in X$, $\lambda_i \in \mathbb{R}^1$, $i = \overline{1, 2}$, $\Delta_2(X) := \{(x, x) \mid x \in X\}$ [1, с. 75].

2. Следующая теорема является следствием результатов работы Джеймсона [2, с. 535, 544, 545].

Теорема 1. *Пусть X — ЛВП, $L_1, L_2 \in \Lambda(X)$. Тогда*

а) *подпространства L_1, L_2 в ЛВП X_σ находятся в общем положении тогда и только тогда, когда справедливо равенство* (3);

б) *в метризуемом ЛВП X равенство* (3) *выполняется в том и только том случае, когда L_1, L_2 в ЛВП X находятся в общем положении;*

в) *если X — ЛВП Фреше, то равенство* (3) *эквивалентно соотношениям $\overline{L_1} \cap \overline{L_2} = \overline{L_1 \cap L_2}$, $\overline{L_1 + L_2} = \overline{L_1} + \overline{L_2}$.*

Утверждение в) теоремы 1 в банаховом пространстве доказано в [6, с. 463; 7, с. 403; 8, с. 555]. Утверждения а) и в) получены также в [9, с. 238, 239]. Заметим, что свойства (G), (N) и свойство общего положения для двух подпространств эквивалентны [2, с. 533]. Более того, справедливо следующее утверждение.

Предложение 1. *Пусть X — ЛВП, $K_1, K_2 \in \mathrm{K}(X)$.*

1. *Если пара конусов (K_1, K_2) обладает свойством (N) и $K_1 \cap K_2 \in \Lambda(X)$, то $(K_1, -K_2)$ обладает свойством (G).*

2. [10, с. 29]. *Если конусы K_1 и K_2 находятся в общем положении, то (K_1, K_2) обладает свойством (N).*

3. *Конусы K_1 и K_2 находятся в общем положении тогда и только тогда, когда $K_1 - K_2 \in \Lambda(X)$ и $(K_1, -K_2)$ обладает свойством (G).*

3. В проводимой ниже теореме указаны те случаи, когда удается получить критерии справедливости равенства (2), аналогичные критериям теоремы 1.

Теорема 2 [2, с. 535, 544, 545]. *Пусть X — ЛВП, $K_1, K_2 \in \mathrm{K}(X)$ и $K_1 \cap K_2 \in \Lambda(X)$. Тогда*

а) *конусы K_1, K_2 обладают свойством (N) в ЛВП X_σ тогда и только тогда, когда справедливо равенство* (2);

б) *в метризуемом ЛВП X равенство* (2) *выполняется в том и только том случае, когда (K_1, K_2) в ЛВП X обладает свойством (N);*

в) *если X — ЛВП Фреше и $K_1 - K_2 \in \Lambda(X)$, то равенство* (2) *эквивалентно соотношениям $\overline{K_1} \cap \overline{K_2} = \overline{K_1 \cap K_2}$, $\overline{K_1 - K_2} = \overline{K_1} - \overline{K_2}$.*

Утверждение а) теоремы 2 в случае $K_1 = -K_2 = K$, $K \cap -K = \{0\}$, доказано в [3, с. 277]. Если X — банахово пространство, $K_1 = -K_2 = K$ и $K \cap -K = \{0\}$, то утверждение б) совпадает с известной теоремой М. Г. Крейна [11, с. 19].

В общем случае для справедливости равенства (2) даже в конечномерном пространстве были получены лишь достаточные условия.

Теорема 3. *Пусть X — ЛВП, $K_1, K_2 \in \mathrm{K}(X)$. Каждое из следующих условий достаточно для выполнения равенства* (2):

1) [12, с. 1130; 7, с. 402]. $K_1 \cap \mathrm{int}\, K_2 \neq \varnothing$;

2) [13, с. 113]. *K_1 и K_2 находятся в общем положении;*

3) [2, с. 539]. *Пара конусов (K_1, K_2) обладает свойством (N);*

4) [14, с. 116; 15, с. 185]. $X^* = X^\#$ *и* $\mathrm{ri}\, K_1 \cap \mathrm{ri}\, K_2 \neq \varnothing$;

5) [5, с. 48]. *Конусы K_1 и K_2 полиэдральны;*

6) [4, с. 240; 5, с. 50]. $X = \mathbb{R}^n$, *K_1 — полиэдрален и* $K_1 \cap \mathrm{ri}\, K_2 \neq \varnothing$;

7) [4, с. 240]. $X = \mathbb{R}^n$, $\mathrm{ri}\, K_1 \cap \mathrm{ri}\, K_2 \neq \varnothing$

Если для конусов K_1 и K_2 выполняется хотя бы одно из условий 1, 4 теоремы 3, то K_1 и K_2 находятся в общем положении. Подробный обзор других случаев, когда реализуется общее положение конусов, содержится в [16, с. 157]. В конечномерном ЛВП X конусы K_1 и K_2 находятся в общем положении тогда и только тогда, когда $\mathrm{ri}\, K_1 \cap \mathrm{ri}\, K_2 \neq \varnothing$ [13, с. 112]. Нетрудно показать, что из каждого условия 5, 6 теоремы 3 следует, что пара конусов (K_1, K_2) обладает свойством (N). Таким образом, все изложенное выше с утверждением 2 предложения 1 позволяет заключить, что наиболее слабым достаточным условием справедливости (2) в теореме 3 является условие 3 Джеймсона. Следует, однако, отметить, что условие общего положения конусов K_1 и K_2 обеспечивает справедливость более общего, чем (2), равенства $\pi^E(K_1 \cap K_2) = \pi^E(K_1) + \pi^E(K_2)$ [1, с. 75], где $\pi^E(K) := \{T \in \Lambda(X, E) : Tx \leqslant 0 \ \forall x \in K\}$, $\Lambda(X, E)$ — множество всех непрерывных линейных отображений из ЛВП X в K-пространство E [17, с. 137]. В то же время наличие свойства (N) у пары конусов (K_1, K_2) еще не является достаточным условием выполнения указанного равенства для всех K-пространств E.

4. Теорема 4. *Пусть X — ЛВП, p, $q \in \mathrm{Sbl}(X)$. Каждое из следующих условий достаточно для справедливости равенства* (1):

1) [12, с. 1130]. *Один из функционалов p, q непрерывен в хотя бы одной точке из эффективной области определения другого*;

2) [1, с. 75]. *Функционалы p и q находятся в общем положении*;

3) [4, с. 239; 5, с. 48]. *Функционалы p и q полиэдральны*;

4) [4, с. 239]. $X = \mathbb{R}^n$, $\mathrm{ridom}\, p \cap \mathrm{ridom}\, q \neq \varnothing$;

5) [4, с. 239]. $X = \mathbb{R}^n$, *p полиэдрален*, $\mathrm{dom}\, p \cap \mathrm{ridom}\, q \neq \varnothing$.

Первое условие теоремы 4 в конечномерном пространстве было доказано Рокафелларом [4]. Из каждого условия 1,3 теоремы 4 следует условие 2. Кроме того, общее положение функционалов p и q реализуется также тогда, когда конусы $\mathrm{epi}\, p$ и $\mathrm{epi}\, q$ находятся в общем положении, либо когда p, q — полунепрерывные снизу в нуле функционалы, а конусы $\mathrm{dom}\, p$ и $\mathrm{dom}\, q$ находятся в общем положении [1, с. 77].

Все приводимые ниже утверждения доказаны для замкнутых конусов и полунепрерывных снизу функционалов в [10]. Результаты с идентичными формулировками и доказательствами в полном объеме содержатся в [18].

5. Пусть $M(\nu) \subseteq N(\nu)$ — базис окрестностей нуля, удовлетворяющий $\lambda M(\nu) = M(\nu) \ \forall \lambda > 0$.

Пара конусов $\pi := (K_1 K_2) \in \mathrm{K}(X)^2$ называется квазинормальной, если $\forall U \in M(\nu)\ \exists V \in M(\nu) : m_\pi(V) \subseteq K_1 \cap K_2 + U$, где $m_\pi(V) := \cap\{V + (K_1 + W) \cap (K_2 + W) \mid W \subseteq V,\ W \in M(\nu)\}$. Обозначим $\sigma_U^\pi := \{U^0 \cap d_\pi^*(V^0) \mid V \subseteq U,\ V \in M(\nu)\}$, где $d_\pi^*(V^0) := \mathrm{co}\,((K_1^* \cap V^0) \cup (K_2^* \cap V^0))$, $U \in M(\nu)$.

Следующее предложение показывает, что для двойственного описания равенства (2) достаточно получить двойственное описание факта замкнутости в X^* объединения всех множеств из σ_U^π.

Предложение 2 [10, с. 25]. *Пусть $\pi \in \mathrm{K}(X)^2$. Равенство* (2) *для пары конусов π выполняется тогда и только тогда, когда π квазинормальна и объединение всех множеств из семейства σ_U^π замкнуто в X^* для любого $U \in M(\nu)$.*

Если пара конусов π обладает свойством (N), то, как показано в [2, с. 539], $\forall U \in M(\nu)\ \exists V \in M(\nu)$:

$$(K_1 \cap K_2)^* \cap U^0 \subseteq K_1^* \cap V^0 + K_2^* \cap V^0. \tag{4}$$

В терминах семейства σ_U^π последнее включение равносильно тому, что для любого $U \in M(\nu)$ существует такое $V \in M(\nu)$, что

$$\bigcup_{W \subseteq V} U^0 \cap d_\pi^*(V^0) = U^0 \cap d_\pi^*(V^0),$$

а так как справа в этом равенстве стоит компактное множество, то объединение всех множеств из σ_U^π замкнуто в X^* для любого $U \in M(\nu)$. Таким образом, в терминах семейства σ_U^π каждое из семи условий теоремы 3 требует, чтобы замкнутость объединения множеств из σ_U^π достигалась за счет совпадения этого объединения с одним из объединяемых множеств. Ясно, что это не единственная причина, вследствие которой объединение компактных множеств из σ_U^π может быть замкнуто. Итак, возникает следующая задача.

Пусть $U \in N(\nu)$, M — бесконечное множество, упорядоченное отношением порядка $\leqslant$ так, что $\forall \mu_1, \mu_2 \in M\ \exists \mu \in M : \mu \geqslant \mu_1,\ \mu \geqslant \mu_2$. Отображение $\sigma : M \to 2^{U^0}$, при котором каждому $\mu \in M$ ставится в соответствие компактное множество $R_\mu^\sigma \subseteq U^0$ так, что из $\mu_1 \leqslant \mu_2$ следует $R_{\mu_1}^\sigma \subseteq R_{\mu_2}^\sigma$ $\forall \mu_1, \mu_2 \in \mathrm{M}$, называется направлением [19, с. 16] и обозначается $\sigma := \{R_\mu^\sigma\}_{\mu \in M}$. Пусть $\mathrm{dr}(U^0)$ — множество всех таких направлений, а $\mathrm{drc}(U^0)$ — совокупность тех направлений $\sigma \in \mathrm{dr}(U^0)$, для которых $0 \in R_\mu^\sigma$, и R_μ^σ — выпуклое множество $\forall \mu \in \mathrm{M}$. Требуется дать двойственное описание факта замкнутости в X^* множества $R_\sigma := \bigcup \{R_\mu^\sigma \mid \mu \in \mathrm{M}\}$ для направления $\sigma \in \mathrm{drc}(U^0)$.

6. Обозначим $\mathrm{int}_A B$, где $A, B \subseteq U^0$, $U \in N(\nu)$, — внутренность множества $A \cap B$ в подпространстве A компакта U^0; $\mathrm{br}(U^0)$ — множество направлений $\sigma \in \mathrm{dr}(U^0)$, для которых $I_\sigma(D) := \bigcup \{\mathrm{int}_{\overline{D}} R_\mu^\sigma \mid \mu \in \mathrm{M}\} \neq \varnothing$ $\forall \overline{D} \subseteq R_\sigma$, $D \neq \varnothing$; $\mathrm{brc}(U^0) := \mathrm{br}(U^0) \cap \mathrm{drc}(U^0)$. Если $\sigma \in \mathrm{dr}(U^0)$ и M счетно, то в силу известной теоремы Бэра [3, с. 19] $\sigma \in \mathrm{br}(U^0)$. Направление $\sigma \in \mathrm{dr}(U^0)$ называется замкнутым, если $R_\sigma = \overline{R}_\sigma$, и бэровским, если $\sigma \in \mathrm{brc}(U^0)$. Пусть $w(U^0)$ — вес топологического пространства U^0 [20, с. 128], а $\psi(U^0)$ — наименьшее из тех порядковых чисел, мощность которых строго больше $w(U^0)$ [21, с. 238, 275].

Предлагается следующий алгоритм распознавания в X^* замкнутости направления $\sigma \in \mathrm{dr}(U^0)$ с помощью трансфинитной последовательности вложенных компактов.

Теорема 5 [10, с. 7]. *Пусть X — ЛВП, $U \in N(\nu)$, $\sigma \in \mathrm{dr}(U^0)$, $R_\sigma \subseteq Q$, $\overline{Q} = Q$ и по трансфинитной индукции определена последовательность множеств $\Omega_\alpha^\sigma(Q)$, $\alpha < \psi(U^0)$: $\Omega_0^\sigma(Q) := Q$; $\Omega_{\alpha+1}^\sigma(Q) := \Omega_\alpha^\sigma(Q) \setminus I_\sigma(\Omega_\alpha^\sigma(Q))$; $\Omega_\beta^\sigma(Q) := \bigcap \{\Omega_\gamma^\sigma(Q) \mid \gamma < \beta\}$, если β — предельное порядковое число и $\alpha, \beta < \psi(U^0)$. Тогда в множестве $\{\alpha < \psi(U^0) \mid \Omega_\alpha^\sigma(Q) = \Omega_\beta^\sigma(Q)\ \forall \beta \geqslant \alpha\}$ существует наименьшее порядковое число $d_\sigma(Q) < \psi(U^0)$, причем $\overline{Q \setminus R_\sigma} \subseteq \Omega_{d_\sigma(Q)}^\sigma(Q)$, а если $\sigma \in \mathrm{br}(U^0)$, то в последнем включении имеет место знак равенства.*

В дальнейшем, $\Omega_\alpha(\sigma) := \Omega_\alpha^\sigma(Q_\sigma)$, где $Q_\sigma := \overline{R}_\sigma$.

Следствие 1 [10, с. 9]. *Пусть X — ЛВП, $U \in N(\nu)$, $\sigma \in \mathrm{dr}(U^0)$ и $\Omega_\alpha(\sigma)$, $\alpha < \psi(U^0)$, — последовательность множеств, построенных в теореме 5. Тогда при каждом $0 < \alpha < \psi(U^0)$ из*

$$\Omega_\alpha(\sigma) = \varnothing \tag{5}$$

следует замкнутость σ, а в случае, когда $\sigma \in \mathrm{br}(U^0)$, из замкнутости σ следует существование такого $0 < \alpha < \psi(U^0)$, что выполняется (5). Если $\sigma \in \mathrm{drc}(U^0)$, то (5) в формулировке этого следствия можно заменить на включение $\Omega_\alpha(\sigma) \subseteq \{0\}$.

Опишем теперь последовательность поляр множеств $\Omega_\alpha(\sigma)$, $\alpha < \psi(U^0)$. Пусть $\sigma \in \mathrm{drc}(U^0)$, $\tau := \{S_\mu^\tau\}_{\mu \in M}$, где $0 \in S_\mu^\tau \subseteq X$ — выпуклые множества $\forall \mu \in \mathrm{M}$. Если $R_\mu^\sigma = (S_\mu^\tau)^*$ или $S_\mu^\tau = (R_\mu^\sigma)^*$ $\forall \mu \in \mathrm{M}$, то $\tau^* := \sigma$ или $\sigma^* := \tau$ соответственно. Обозначим

$$P_\tau := \bigcap_{\mu \in M} \mathrm{Cl}\, S_\mu^\tau;\ 2_f^X := \left\{\bigcup_{i=1}^{n} \{x_i\} \mid x_i \in X,\ i = \overline{1, n},\ n \in \mathbb{N}\right\};$$

$$\mathrm{drc}(U) := \{\tau \mid \tau^* \in \mathrm{drc}(U^0),\ \mathrm{int}\, S_\mu^\tau \neq \varnothing\ \ \forall \mu \in \mathrm{M}\};$$

$$\mathrm{brc}(U) := \{\tau \mid \tau^* \in \mathrm{brc}(U^0),\ \mathrm{int}\, S_\mu^\tau \neq \varnothing\ \ \forall \mu \in \mathrm{M}\};$$

$$NS_B := \{(A, D) \mid A, D \in 2^X,\ B \cap \mathrm{co}(A \cup D) \neq \varnothing\},\ B \in 2^X.$$

Принадлежность направления τ к $\mathrm{drc}(U)$, очевидно, полностью характеризуют два свойства:

1) $(\mu_1 \leqslant \mu_2) \to (\mathrm{Cl}(S_{\mu_2}^\tau) \subseteq \mathrm{Cl}(S_{\mu_1}^\tau))$ $\forall \mu_1, \mu_2 \in \mathrm{M}$;
2) $U \subseteq S_\mu^\tau$ $\forall \mu \in \mathrm{M}$.

По направлению $\tau \in \mathrm{drc}(U)$ построим трансфинитную последовательность функций $F_\alpha^\tau : 2_f^X \to 2^X$, $\alpha < \psi(U^0)$, следующим образом: $F_0^\tau(A) := \{x \in X \mid x NS_{\mathrm{int} P_\tau} A\}$; $F_\beta^\tau(A) := \bigcup_{\gamma < \beta} F_\gamma^\tau(A)$, если β — предельное порядковое число, и

$$F^{\tau}_{\alpha+1}(A) := \bigcup_{\mu}\bigcap_{s}\{F^{\tau}_{\alpha}(A\cup\{s\}) \mid \mu\in\mathrm{M}, \quad s\in\operatorname{int}S^{\tau}_{\mu}\}, \tag{6}$$

где $A\in 2^X_f$, $\alpha<\psi(U^0)$. Множество $W_\alpha(\tau) := F^{\tau}_{\alpha}(\varnothing)$, $\alpha<\psi(U^0)$, называется множеством невидимых точек направления $\tau\in\operatorname{drc}(U)$ порядка α, причем, очевидно, $W_0(\tau)=\operatorname{int}P_\tau$ и $W_1(\tau)=\bigcup_{\mu\in\mathrm{M}}\bigcap_{s\in\operatorname{int}S^{\tau}_{\mu}}\bigcup_{\lambda\geqslant 1}((1-\lambda)s+\lambda\operatorname{int}P_\tau)$.

Теорема 6 [10, с. 11, 12]. *Пусть* X — *ЛВП*, $U\in N(\nu)$, $\tau\in\operatorname{drc}(U)$, $\sigma:=\tau^*$ *и* $\alpha<\psi(U^0)$. *Тогда* $\Omega_\alpha(\sigma)^*=\mathrm{Cl}\,W_\alpha(\tau)$.

Доказательство. Пусть $F(U^0)$ — совокупность всех замкнутых подмножеств U^0, $\Lambda\in F(U^0)$, $\Lambda\subseteq Q_\sigma$, $\sigma(\Lambda):=\{R^{\sigma}_{\mu}\cap\Lambda\}_{\mu\in\mathrm{M}}$, $(\Lambda)^{\sigma}_{\alpha}:=\Omega^{\sigma(\Lambda)}_{\alpha}(\Lambda)$ и $G_\alpha(A):=\{x\in X\mid(S_{Q_\sigma}(A\cup\{x\}))^{\sigma}_{\alpha}=\varnothing\}$, где $A\in 2^X_f$, $\alpha<\psi(U^0)$, $S(B)\,(S^0(B)):=$ $:=\{x^*\in X^*\mid x^*(B)\leqslant(<)-1\}$, $S_{Q_\sigma}(B):=S(B)\cap Q_\sigma$, $S^0_{Q_\sigma}(B):=S^0(B)\cap Q_\sigma$, $B\in 2^X$. Заметим, что если $D\subseteq Q_\sigma$, $D\in F(U^0)$, V, W — открытые в X^* множества, $V\subseteq W$, $V\cap(D)^{\sigma}_{\alpha}\neq\varnothing$, $0\leqslant\alpha\leqslant\psi(U^0)$, то

$$(D\cap\overline{W})^{\sigma}_{\alpha}\cap V=(D)^{\sigma}_{\alpha}\cap V. \tag{1'}$$

Кроме того, если $D_1\subseteq D_2\subseteq Q_\sigma$, D_1, $D_2\in F(U^0)$, то

$$(D_1)^{\sigma}_{\alpha}\subseteq(D_2)^{\sigma}_{\alpha}\ \ \forall\alpha<\psi(U^0). \tag{2'}$$

Докажем сначала, что

$$\Omega_\alpha(\sigma)^*=\overline{G_\alpha(\varnothing)}. \tag{3'}$$

Пусть $x_0\notin\Omega_\alpha(\sigma)^*$, т. е. $\exists x^*_0\in\Omega_\alpha(\sigma): x^*_0(x_0)<-1$. Так как $S^0(x_0)$ — открытое множество и $x^*_0\in Q_\sigma\cap S^0(x_0)$, то в силу (1') $x^*_0\in(S_{Q_\sigma}(x_0))^{\sigma}_{\alpha}$, т. е. $x_0\notin$ $\notin G_\alpha(\varnothing)$. Предположим теперь, что $x_0\notin\mathrm{Cl}\,G_\alpha(\varnothing)$. Тогда ввиду (2') $\varnothing\neq$ $\neq(S_{Q_\sigma}(x_0))^{\sigma}_{\alpha}\subseteq(Q_\sigma)^{\sigma}_{\alpha}=\Omega_\alpha(\sigma)$ и, следовательно, $\Omega_\alpha(\sigma)\cap S(x_0)\neq\varnothing$, т. е. $\exists x^*_0\in\Omega_\alpha(\sigma):=x^*_0(x_0)\leqslant-1$. Поэтому $x_0\notin\operatorname{int}\Omega_\alpha(\sigma)^*$ и $\Omega_\alpha(\sigma)^*=\mathrm{Cl}\operatorname{int}\Omega_\alpha(\sigma)^*=$ $=\mathrm{Cl}\,G_\alpha(\varnothing)$.

Докажем теперь равенство

$$G_0(A)=F^{\tau}_{0}(A),\qquad A\in 2^X_f. \tag{4'}$$

Если $x_0\notin G_0(A)$, то $\exists x^*_0\in(P_\tau)^*: x^*_0(A\cup\{x_0\})\leqslant-1$, что по первой теореме отделимости [22, с. 174] означает со $(A\cup\{x_0\})\cap\operatorname{int}P_\tau=\varnothing$, т. е. $x_0\notin F^{\tau}_{0}(A)$ и, значит, $F^{\tau}_{0}(A)\subseteq G_0(A)$. Если же $x_0\notin F^{\tau}_{0}(A)$, то в силу первой теоремы отделимости $\exists x^*_0\in X^*: x^*_0(A\cup\{x_0\})\leqslant-1\leqslant x^*_0(P_\tau)$, т. е. $x^*_0\in Q_\sigma\cap S(A\cup\{x_0\})$ и, следовательно, $x_0\notin G_0(A)$. Таким образом, равенство (4') доказано.

Предположим, что равенство

$$F^{\tau}_{\gamma}(A)=G_\gamma(A) \tag{5'}$$

справедливо для всех $\gamma\leqslant\alpha$ и $A\in 2^X_f$. Докажем его справедливость при $\gamma=\alpha+1$ и произвольном $A\in 2^X_f$. Зафиксируем $A\in 2^X_f$ и для $B\subseteq X$ обозначим $\Phi_\alpha(B):=(S_{Q_\sigma}(A\cup B))^{\sigma}_{\alpha}$, $\alpha<\psi(U^0)$. Пусть $x\notin G_{\alpha+1}(A)$. Тогда $\exists x^*_0\in$ $\in\Phi_{\alpha+1}(x)$ и, следовательно, $\forall V\in N(\sigma(X^*,X))$ $\forall\mu\in\mathrm{M}\,\exists x^*_\mu\in[(x^*_0+V)\cap$ $\cap\Phi_\alpha(x)]\setminus R^{\sigma}_{\mu}$. Поэтому $\forall\mu\in\mathrm{M}$ $\exists s_\mu\in\operatorname{int}S^{\tau}_{\mu}: x^*_\mu\in S^0(s_\mu)$, и в силу (1') $x^*_\mu\in$ $\in\Phi_\alpha(x)\cap S^0(s_\mu)=\Phi_\alpha(\{x\}\cup\{s_\mu\})$, т. е. $x\notin D_\alpha(A)$, где $D_\alpha(A)$ обозначает выражение правой части равенства (6). Таким образом, $F^{\tau}_{\alpha+1}(A)\subseteq G_{\alpha+1}(A)$. Пусть теперь $x\notin D_\alpha(A)$. Это означает, что $\forall\mu\in\mathrm{M}$ $\exists s_\mu\in\operatorname{int}S^{\tau}_{\mu}: x\notin F^{\tau}_{\alpha}(A\cup$ $\cup\{s_\mu\})$, т. е. $\forall\mu\in\mathrm{M}$ $\exists x^*_\mu\in\Phi_\alpha(\{x\}\cup\{s_\mu\})$. Так как $s_\mu\in\operatorname{int}S^{\tau}_{\mu}$ и $x^*_\mu(s_\mu)\leqslant$ $\leqslant-1$, то $x^*_\mu\notin R^{\sigma}_{\mu}$ $\forall\mu\in\mathrm{M}$. Очевидно, что в силу компактности $\Phi_\alpha(x)$ множество $\Phi_{\alpha+1}(x)$ пусто тогда и только тогда, когда $\exists\mu_0\in\mathrm{M}:\Phi_\alpha(x)\subseteq$

$\subseteq R_{\mu_0}$. Но $\forall\mu\in M$ $x^*_\mu\in\Phi_\alpha(x)\setminus R^\sigma_\mu$, откуда $\Phi_{\alpha+1}(x)\neq\varnothing$ и, значит, $x\notin G_{\alpha+1}(A)$. Равенство (5′) при $\gamma=\alpha+1$ доказано.

Предположим теперь, что α — предельное порядковое число и равенство (5′) выполнено для всех $\gamma<\alpha$. Тогда для его справедливости при $\gamma=\alpha$ достаточно, чтобы

$$G_\alpha(A)=\bigcup_{\gamma<\alpha}G_\gamma(A)\qquad\forall A\in 2^X_f. \tag{6′}$$

Если $x\notin G_\alpha(A)$, то $\Phi_\alpha(x)\neq\varnothing$ и, следовательно, $\Phi_\gamma(x)\neq\varnothing$ $\forall\gamma<\alpha$ ввиду того, что согласно определению $\Phi_\alpha(x)=\bigcap\{\Phi_\gamma(x)\mid\gamma<\alpha\}$. Поэтому $x\notin G_\gamma(A)$ $\forall\gamma<\alpha$, откуда $\bigcup\{G_\gamma(A)\mid\gamma<\alpha\}\subseteq G_\alpha(A)$. Если же $x\notin\bigcup\{G_\gamma(A)\mid\gamma<\alpha\}$, то $\Phi_\gamma(x)\neq\varnothing$ $\forall\gamma<\alpha$. Так как из $\gamma_1<\gamma_2$ следует $\Phi_{\gamma_2}(x)\subseteq\Phi_{\gamma_1}(x)$, то в силу компактности $\Phi_\gamma(x)$ $\forall\gamma<\alpha$ получим $\Phi_\alpha(x)=\bigcap\{\Phi_\gamma(x)\mid\gamma<\alpha\}\neq\varnothing$, что и означает $x\notin G_\alpha(A)$. Таким образом, (6′) выполнено и равенство (5′) справедливо для $\gamma=\alpha$. Согласно принципу трансфинитной индукции это означает, что (5′) справедливо для всех $\gamma<\psi(U^0)$, что вместе с (3′) доказывает теорему 6.

Следствие 1 и теорема 6 позволяют сформулировать условия замкнутости направления $\sigma\in\mathrm{drc}(U^0)$, $U\in M(\nu)$, используя только термины пространства X.

Теорема 7 [10, с. 14]. *Пусть X — ЛВП, $U\in M(\nu)$, $\tau\in\mathrm{drc}(U)$. При каждом $\alpha<\psi(U^0)$ из $W_\alpha(\tau)=X$ следует замкнутость τ^*. Из замкнутости $\tau^*\in\mathrm{brc}(U^0)$ следует существование такого $\alpha<\psi(U^0)$, что $W_\alpha(\tau)=X$.*

В некоторых случаях условие теоремы 7 удается упростить.

Для выпуклого множества $P\subseteq X$, $\mathrm{int}\,P\neq\varnothing$ обозначим $(P)_{sm}:=\{x\in\overline{P}\setminus\mathrm{int}\,P\mid\overline{\mathrm{cone}}\,(x-P)\cup\overline{\mathrm{cone}}\,(P-x)=X\}$, где $\mathrm{cone}\,A:=\bigcup\{\lambda A\mid\lambda\geqslant 0\}$, $A\subseteq X$. Выпуклое множество $P\subseteq X$, $0\in\mathrm{int}\,P$ называется гладким, если $\forall x^*\in P^*\ \exists x\in(P)_{sm}: x^*(x)=\inf x^*(P)$.

Теорема 8 [10, с. 22]. *Пусть X — ЛВП, $U\in M(\nu)$, $\tau\in\mathrm{drc}(U)$, множество P_τ является гладким и $V\subseteq(P_\tau)_{sm}$ — произвольное множество, удовлетворяющее следующему условию: $\forall x^*\in(P_\tau)^*\ \exists x\in V: x^*(x)=\inf x^*(P)$. Направление τ^* замкнуто тогда и только тогда, когда $V\subseteq W_1(\tau)$.*

Доказательство. Непосредственно из равенства (6) следует $W_1(\tau)=\{x\in X\mid\exists\mu\in M\ \forall s\in S^\tau_\mu:\{x\}\ NS_{\mathrm{int}P_\tau}\{s\}\}$.

Обозначим $\sigma:=\tau^*$. Пусть $\exists x_0\in V\setminus W_1(\tau)$. Тогда $\forall\mu\in M\exists s_\mu\in\mathrm{int}\,S^\tau_\mu$: $[x_0,s_\mu]\cap\mathrm{int}\,P_\tau=\varnothing$, где $[x_0,s_\mu]:=\{\theta x_0+(1-\theta)s_\mu\mid\theta\in[0,1]\}$, и по первой теореме отделимости $\exists x^*_\mu\in X^*: x^*_\mu([x_0,s_\mu])\leqslant -1\leqslant x^*_\mu(P_\tau)$, $\inf x^*_\mu(P_\tau)=-1$. Так как $x_0\in(P_\tau)_{sm}$, то $\exists x^*_0\in X^*: x^*_0=x^*_\mu\forall\mu\in M$. Но из $U\subseteq P_\tau\subseteq S^\tau_\mu$ $\forall\mu\in M$ следует $\forall\mu\in M\ \exists\,\varepsilon_\mu>0: s_\mu+\varepsilon_\mu U\subseteq S^\tau_\mu$. Пусть $u_0\in U$, $x^*_0(u_0)<0$. Тогда $x^*_0(s_\mu+\varepsilon_\mu u_0)<-1\leqslant x^*_0(P_\tau)$ $\forall\mu\in M$, откуда $x^*_0\in Q_\sigma\setminus R_\sigma$, т. е. σ незамкнуто.

Пусть σ не является замкнутым, т. е. $\exists x^*_0\in Q_\sigma\setminus R_\sigma$, $x^*_0\neq 0$. Из $x^*_0\notin R^\sigma_\mu$ $\forall\mu\in M$ и второй теоремы отделимости [3, с. 86] следует $\forall\mu\in M\ \exists x_\mu\in X\exists\varepsilon_\mu>0: x^*_0(x_\mu)\leqslant -1-\varepsilon_\mu<-1+\varepsilon_\mu\leqslant R^\sigma_\mu(x_\mu)$. Так как $R^\sigma_\mu\subseteq U^0$, то $R^\sigma_\mu(x_\mu+\varepsilon_\mu U)\geqslant -1$, т. е. $x_\mu\in\inf S^\tau_\mu$ $\forall\mu\in M$. Кроме того, $x^*_0(B)\leqslant -1\leqslant x^*_0(P_\tau)$ и $B\cap\inf S^\tau_\mu\neq\varnothing$ $\forall\mu\in M$, где $\overline{\mathrm{co}}\{x_\mu\}_{\mu\in M}=:B$. Из определения гладкого множества вытекает, что $\exists x_0\in V: x^*_0(x_0)=\inf x^*_0(P_\tau)$, и по первой теореме отделимости $\varnothing=\overline{\mathrm{co}}\,(B\cup\{x_0\})\cap\mathrm{int}\,P_\tau$. Ввиду того, что $B\cap\mathrm{int}\,S^\tau_\mu\neq\varnothing$ $\forall\mu\in M$, получим $x_0\notin W_1(\tau)$, т. е. $x_0\in V\setminus W_1(\tau)$. Теорема доказана.

Пусть $B\subseteq X^*$, $\mathrm{extr}\,B$ — совокупность экстремальных точек B [3, с. 88], $\mathrm{E}(B):=\overline{\mathrm{extr}\,B}$ и $e(\sigma):=\{R^\sigma_\mu\cap\mathrm{E}(Q_\sigma)\}_{\mu\in M}$, где $U\in N(\nu)$, $\sigma\in\mathrm{drc}(U^0)$. Направление $\sigma\in\mathrm{drc}(U^0)$ называется экстремально бэровским, если $e(\sigma)\in\mathrm{br}(U^0)$. Совокупность таких направлений обозначается $\mathrm{bre}(U^0)$. Множество $B\subseteq X^*$ называется строго выпуклым, если $\mathrm{co}\,\mathrm{E}(B)=B$, а направление $\sigma\in\mathrm{drc}(U^0)$ так же, как и направление σ^*, — пропорциональным, если для каждого $\mu_0\in M$ существуют такие $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subseteq M$, что каждое множество из $\{R_{\mu_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$

содержится в некотором множестве из $\{(nR_{\mu_0})\cap R_\sigma\}_{n\in\mathbb{N}}$ и наоборот. По направлению $\tau\in\operatorname{drc}(U^0)$, $U\in N(\nu)$ построим трансфинитную последовательность множеств $EW_\alpha(\tau)$, $\alpha<\psi(U^0)$, следующим образом:

$$EW_0(\tau):=\bar{P}_\tau;\ EW_{\alpha+1}(\tau)=G_\tau(EW_\alpha(\tau));\ EW_\beta(\tau):=\operatorname{Cl}\bigcup_{\gamma<\beta}EW_\gamma(\tau), \tag{7}$$

где β — предельное порядковое число, $\alpha,\beta<\psi(U^0)$,

$$G_\tau(A):=\operatorname{Cl}\{x\in X\mid \exists\mu\in\mathrm{M}: S_\mu^\tau\subseteq F_A(x)\},\quad P_\tau\subseteq A\subseteq X, \tag{8}$$

$$F_A(x):=\overline{\operatorname{co}}\bigcup_{\lambda\geqslant 1}((1-\lambda)D(x)+\lambda\operatorname{int}A), \tag{9}$$

$$D(x):=X\diagdown\Big[\bigcup_{\lambda\geqslant 1}((1-\lambda)[(\overline{\operatorname{co}}(P_\tau\cup\{x\}))\diagdown\bar{P}_\tau]+\lambda\operatorname{int}P_\tau). \tag{10}$$

Теорема 9 [10, с. 19]. *Пусть* X — *ЛВП*, $U\in N(\nu)$, $\tau\in\operatorname{drc}(U)$ — *пропорциональное направление*, $\sigma:=\tau^*$, $\pi:=e(\sigma)$ и $\alpha<\psi(U^0)$. *Тогда*

$$EW_\alpha(\tau)=\Omega_\alpha^\pi(\mathrm{E}(Q_\sigma))^*.$$

Доказательство. Обозначим $\Omega_\alpha^\pi:=\Omega_\alpha^\pi(\mathrm{E}(Q_\alpha))$, $Q_\alpha^\pi:=\overline{\operatorname{co}}\,\Omega_\alpha^\pi$, $\sigma_0=\sigma(X^*,X)$. Заметим, что $\Omega_\alpha^\pi=\mathrm{E}(Q_\alpha^\pi)$ $\forall\alpha<\psi(U^0)$. При $\gamma=0$ равенство

$$EW_\gamma(\tau)=(\Omega_\gamma^\pi)^*, \tag{1''}$$

очевидно, выполняется. Предположим, что (1″) верно для всех $\gamma\leqslant\alpha$, и докажем его справедливость при $\gamma=\alpha+1$. Пусть $A:=(\Omega_\alpha^\pi)^*$, $B:=Q_\alpha^\pi$, $\rho:=\{R_\mu^\sigma\cap\mathrm{E}(B)\}_{\mu\in\mathrm{M}}$. Тогда $\Omega_1^\rho:=\Omega_1^\rho(\mathrm{E}(B))=\Omega_{\alpha+1}^\pi$.

Имеет место следующее равенство:

$$(\Omega_1^\rho)^*=\operatorname{Cl}\{x\in X\mid\exists\ \mu\in\mathrm{M}:\Phi_B(x)\subseteq R_\mu^\sigma\}, \tag{2''}$$

где $\Phi_B(x):=B\cap\operatorname{cone}_1(\overline{\operatorname{co}}H(x))$; $H(x):=\mathrm{E}(B)\cap S^0(x)$; $\operatorname{cone}_1D:=\cup\{\lambda D\mid\lambda\geqslant 1\}$, $D\subseteq X$, а множества $S^0(x)$, $S(x)$ были определены в начале доказательства теоремы 6. Действительно, $\operatorname{int}(\Omega_1^\rho)^*=\{x\in X\mid x^*\in\mathrm{E}(B)$,

$$[(x^*+W)\cap\mathrm{E}(B)]\diagdown R_\mu^\sigma\neq\varnothing\ \forall\mu\in\mathrm{M}\ \ \forall W\in N(\sigma_0))\to(x^*(x)>-1)\}=$$
$$=\{x\in X\mid(x^*\in\mathrm{E}(B)\cap S(x))\to(\exists W\in N(\sigma_0)\ \exists\mu\in\mathrm{M}:(x^*+W)\cap\mathrm{E}(B)\cap$$
$$\cap S(x)\subseteq R_\mu^\sigma\}=\{x\in X\mid\exists\mu\in\mathrm{M}:\mathrm{E}(B)\cap S(x)\subseteq R_\mu^\sigma\}\subseteq\{x\in X\mid\exists\mu\in\mathrm{M}:H(x)\subseteq$$
$$\subseteq R_\mu^\sigma\}\subseteq\{x\in X\mid(x^*\in H(x))\to(\exists W\in N(\sigma_0)\ \exists\mu\in\mathrm{M}:(x^*+W)\cap H(x)\subseteq$$
$$\subseteq R_\mu^\sigma)\}=\{x\in X\mid(x^*\in H(x))\to(\exists W\in N(\sigma_0)\ \exists\mu\in\mathrm{M}:(x^*+W)\cap$$
$$\cap\mathrm{E}(B)\subseteq R_\mu^\sigma\}=(\Omega_1^\rho)^*,$$

где третье равенство справедливо в силу компактности множества $\mathrm{E}(B)\cap\cap S(x)$, а предпоследнее — ввиду открытости множества $S^0(x)$. Переходя в этой цепочке включений к замыканиям и учитывая то, что в силу пропорциональности направления $\sigma:H(x)\subseteq R_\mu^\sigma$ в том и только том случае, когда $\exists\mu_1\in\mathrm{M}:\Phi_B(x)\subseteq R_{\mu_1}^\sigma$, получаем (2″).

Докажем теперь, что

$$\Phi_B(x)=\cap\{S_B(y)\mid y\in D(x)\}, \tag{3''}$$

где $x\in X$ и $D(x):=\{y\in X\mid([S_B^0(z)\neq\varnothing)\wedge(S_B(z)\subseteq S_B(x))]\to(S_B(z)\cap\cap S_B(y)\neq\varnothing))\ \forall z\in X\}$.

Если $x\in B^*$, то (3″) превращается в равенство пустых множеств, поэтому в доказательстве (3″) предполагается $x\notin B^*$. Пусть $x_0^*\notin\Phi_B(x)$, $x_0\in B$. Непосредственно из определения $\Phi_B(x)$ следует $\theta x_0^*\notin\Phi_B(x)$ $\forall\theta\in[0,1]$. Так как $[0, x_0^*]$ — компактное множество, то по второй теореме отделимости $\exists\, y_0 \in X : \Phi_B(x)\ (y_0) \leqslant -1 < [0, x_0^*]\ (y_0)$. Поэтому $\Phi_B(x) \subseteq S_B(y_0)$, $x_0^* \notin$ $\notin S_B(y_0)$. Если $S_B^0(z) \neq \varnothing$, $S_B(z) \subseteq S_B(x)$, $z \in X$, то по теореме Крейна — Мильмана [3, с. 89] $\varnothing \neq \mathrm{E}(B) \cap S_B^0(z) \subseteq \mathrm{E}(B) \cap S_B^0(x) \subseteq \Phi_B(x) \subseteq S_B(y_0)$, т. е. $y_0 \in D(x)$. Из $x_0^* \notin S_B(y_0)$ следует $x_0^* \notin \bigcap\{S_B(y) \mid y \in D(x)\}$, и, значит, $\Phi_B(x) \supseteq \bigcap\{S_B(y) \mid y \in D(x)\}$. Пусть теперь $y_0 \in D(x)$. Докажем, что $H(x) \subseteq$ $\subseteq S_B(y_0)$. Предположим противное, т. е. $\exists y_0^* \in H(x) \setminus S_B(y_0)$. Это означает, что $y_0^* \in \mathrm{E}(B) \cap T(y_0)$, где $T(y_0) := \{x^* \in X^* \mid x^*(y_0) > -1\} \cap S^0(x)$. В силу открытости $T(y_0)$ $\exists W \in N(\sigma_0) : y_0^* + W \subseteq T(y_0)$, а по определению $\mathrm{E}(B)$ существуют такие $y_1^* \in \operatorname{extr} B$, $V \in N(\sigma_0)$, что $y_1^* + V \subseteq y_0^* + W \subseteq T(y_0)$. Так как $0 \in Q_\sigma$ и $\operatorname{extr} B \subseteq \operatorname{extr} Q_\sigma$, то $y_1^* \in \operatorname{extr} \operatorname{co}(B \cup \{0\})$ и по теореме Мильмана [3, с. 89] $y_1^* \notin \overline{\operatorname{co}}([\operatorname{co}(B \cup \{0\})] \setminus (y_1^* + V)) =: B_V$. Согласно второй теореме отделимости и в силу $0 \in B_V$ существует такой $y_1 \in X$, что $y_1^*(y_1) < -1 <$ $< \inf B_V(y_1)$. Но тогда $\varnothing \neq S_B^0(y_1)$; $S_B(y_1) \subseteq y_1^* + V \subseteq T(y_0)$, т. е. $S_B(y_1) \cap$ $\cap\, S_B(y_0) = \varnothing$ и $S_B(y_1) \subseteq S_B^0(x)$, что противоречит $y_0 \in D(x)$. Таким образом, $H(x) \subseteq S_B(y)\ \forall y \in D(x)$ и, как нетрудно показать, $\Phi_B(x) \subseteq S_B(y)$ $\forall y \in D(x)$, что вместе с доказанным ранее означает справедливость равенства (3″).

Пусть $y, z \in X$. Очевидно, что $S_B^0(z) \neq \varnothing$ эквивалентно $z \notin B^*$, а $S_B(z) \subseteq S_B(x)$ выполняется тогда и только тогда, когда $z \in \overline{\operatorname{co}}(B^* \cup \{x\})$. Кроме того, из первой теоремы отделимости следует, что $S_B(z) \cap S_B(y) \neq$ $\neq \varnothing$ в том и только том случае, когда $\varnothing = [z, y] \cap \operatorname{int} B^*$. Поэтому $D(x)$ в (3″) совпадает с множеством, определенным формулой (10). Так как $\operatorname{int} S_B(y)^* = \{z \in X \mid (x^*(B^*) \geqslant -1,\ x^*(y) \leqslant -1) \to (x^*(z) > -1)\}$, то $X \setminus \operatorname{int} S_B(y)^* = \{z \in X \mid \exists x^* \in X^* : x^*(B^*) \geqslant -1,\ x^*(y) \leqslant -1,\ x^*(z) \leqslant -1\} =$ $= \{x \in X \mid [z, y] \cap \operatorname{int} B^* = \varnothing\}$ и

$$S_B(y)^* = \operatorname{Cl} \operatorname{int} S_B(y)^* = \operatorname{Cl}(y + \operatorname{cone}_1(\operatorname{int} B^* - y)). \tag{4″}$$

Таким образом, в силу (2″)

$$(\Omega_{\alpha+1}^\pi)^* = \operatorname{Cl}\{x \in X \mid \exists \mu \in \mathrm{M} : S_\mu^\tau \subseteq \Phi_B(x)^*\}. \tag{5″}$$

Но из (3″), (4″), (10) и (9) следует, что $(B := Q_\alpha^\pi,\ A := (\Omega_\alpha^\pi)^*)\ \Phi_B(x)^* =$ $= \overline{\operatorname{co}} \bigcup\limits_{y \in D(x)} S_B(x)^* = F_A(x)$, откуда ввиду (5″), (7) и (8) $(\Omega_{\alpha+1}^\pi)^* = G_\tau((\Omega_\alpha^\pi)^*) =$ $= G_\tau(EW_\alpha(\tau)) = EW_{\alpha+1}(\tau)$, т. е. равенство (1″) справедливо и при $\gamma = \alpha + 1$.

Предположим теперь, что α — предельное порядковое число и (1″) справедливо для всех $\gamma < \alpha$. Так как $\Omega_{\gamma+1}^\pi \subseteq \Omega_\gamma^\pi$ и Ω_γ^π — компакт $\forall \gamma < \alpha$, то по лемме 3 в [23, с. 110] $\overline{\operatorname{co}} \bigcap\limits_{\gamma<\alpha} \Omega_\gamma^\pi = \bigcap\limits_{\gamma<\alpha} \overline{\operatorname{co}}\ \Omega_\gamma^\pi$ и

$$(\Omega_\alpha^\pi)^* = \Big(\bigcap_{\gamma<\alpha} \Omega_\gamma^\pi\Big)^* = \Big(\overline{\operatorname{co}} \bigcap_{\gamma<\alpha} \Omega_\gamma^\pi\Big)^* = \operatorname{Cl} \bigcup_{\gamma<\alpha} (\Omega_\gamma^\pi)^* = \operatorname{Cl} \bigcup_{\gamma<\alpha} EW_\gamma(\tau) = EW_\alpha(\tau).$$

Теперь согласно принципу трансфинитной индукции заключаем, что (1″) верно для всех $\alpha < \psi(U^0)$. Теорема доказана.

Теорема 10 [10, с. 21]. *Пусть X — ЛВП, $U \in N(\nu)$, $\tau \in \operatorname{drc}(U)$ — пропорциональное направление, а множество $(P_\tau)^*$ — строго выпуклое. При каждом $\alpha < \psi(U^0)$ из $EW_\alpha(\tau) = X$ следует замкнутость τ^*. Из замкнутости $\tau^* \in \operatorname{bre}(U^0)$ вытекает существование такого $\alpha < \psi(U^0)$, что $EW_\alpha(\tau) = X$.*

Очевидно, что $\operatorname{brc}(U^0) \subseteq \operatorname{bre}(U^0)\ \forall\, U \in N(\nu)$ и из $W_\alpha(\tau) = X$ следует $EW_\alpha(\tau) = X$ для любого $\alpha < \psi(U^0)$, пропорционального направления $\tau \in \operatorname{drc}(U^0)$ и $U \in N(\nu)$. Таким образом, двойственное описание замкнутости направления $\sigma \in \operatorname{drc}(U^0)$, $U \in N(\nu)$, удается получить лишь тогда, когда σ — бэровское направление (теорема 7) либо σ — экстремально бэровское и пропорциональное направление, а Q_σ — строго выпуклое множество (теорема 10), а также тогда, когда P_{σ^*} является гладким множеством (теорема 8). В остальных случаях задача, поставленная в п. 5, остается нерешенной.

7. В этом пункте результаты п. 6 и предложения 2 применяются для двойственного описания равенства (2).

Совокупность $K(\nu) \subseteq N(\nu)$ называется полным предбазисом окрестностей нуля (ср. с [20, с. 133]), если $\bigcup\{U^0 \mid U \in K(\nu)\} = X^*$ и $\left\{\bigcap_{i=1}^{n} U_i \mid U_i \in K(\nu),\ i = \overline{1, n},\ n \in \mathbb{N}\right\}$ — базис окрестностей нуля. Если A — непустое множество порядковых чисел, то пусть $\sup A$ обозначает наименьшее порядковое число в множестве $\{\alpha \mid \alpha \geqslant a\ \ \forall a \in A\}$ и $\psi := \sup\{\psi(U^0) \mid U \in M(\nu)\}$.

Нетрудно показать, что в силу компактности U^0 соотношение (4) выполняется тогда и только тогда, когда $\Omega_1(\sigma_U^\pi) = \varnothing\ \ \forall U \in M(\nu)$. Кроме того, $\tau_U^\pi := (\sigma_U^\pi)^* = \{\mathrm{co}\,[U \cup ((K_1 + V) \cap (K_2 + V))] \mid V \subseteq U,\ V \in M(\nu)\}$.

Определение 1. *Пара конусов* $\pi = (K_1, K_2) \in \mathrm{K}(X)^2$, *обладающая свойством* (N), *называется нормальной парой конусов нулевого порядка. Квазинормальная пара конусов* π *называется нормальной порядка* $1 \leqslant \alpha \leqslant \psi$, *если при каждом* $U \in M(\nu): W_\alpha(\tau_U^\pi) = X$, *т. е.* $\Omega_\alpha(\sigma_U^\pi) \subseteq \{0\}$. *Квазинормальная пара конусов* $\pi \in \mathrm{K}(X)^2$ *называется экстремально нормальной порядка* $1 \leqslant \alpha \leqslant \psi$, *если при каждом* $U \in M(\nu): EW_\alpha(\tau_U^\pi) = X$. *Пара конусов* $\pi_2^* := (K_1^*, K_2^*)$ *называется (экстремально) бэровской, если* $\sigma_U^\pi \in \mathrm{brc}\,(U^0)$ $(\sigma_U^\pi \in \mathrm{bre}\,(U^0))$ $\forall U \in M(\nu)$. *Пара конусов* π *называется слабо преднормальной* нулевого *порядка, если существует такой полный предбазис* $K(\sigma(X, X^*))$, *что* $\forall U \in K(\sigma(X, X^*))\ \exists V \in M(\nu): (K_1 + V) \cap (K_2 + V) \subseteq K_1 \cap K_2 + U$.

Заметим, что в пространстве Фреше по теореме Крейна — Шмульяна [3, с. 193] из замкнутости направления $\sigma_U^\pi\ \forall U \in M(\nu)$ для $\pi \in \overline{\mathrm{K}}(X)^2$ следует справедливость равенства (2). Поэтому в пространстве Фреше для $\pi \in \overline{\mathrm{K}}(X)^2$ условие квазинормальности из определения 1 и предложения 2 можно опустить. Кроме того, понятия нормальности, бэровости и экстремальной нормальности пары конусов не зависят от выбора базиса $M(\nu)$.

Аналогом утверждения а) теоремы 2 для общего равенства (2) является следующая теорема.

Теорема 11 [10, с. 27]. *Пусть* X — *ЛВП*, $\pi = (K_1, K_2) \in \mathrm{K}(X)^2$. *Для справедливости равенства* (2) *необходимо и достаточно, чтобы* π *была слабо преднормальной парой нулевого порядка.*

Теорема 12 [10, с. 27]. *Пусть* X — *ЛВП*, $\pi = (K_1, K_2) \in \mathrm{K}(X)^2$. *При каждом* $0 \leqslant \alpha \leqslant \psi$ *из нормальности* π *порядка* α *следует* (2). *В случае, когда* π_2^* *является бэровской, из справедливости* (2) *вытекает нормальность* π *некоторого порядка* $0 \leqslant \alpha \leqslant \psi$.

Следствие 2 [10, с. 28]. *Пусть* X — *метризуемое ЛВП*, $\pi = (K_1, K_2) \in \mathrm{K}(X)^2$. *Для справедливости равенства* (2) *необходимо и достаточно, чтобы* π *была нормальной парой конусов некоторого порядка* $0 \leqslant \alpha \leqslant \psi$.

ЛВП X^* называется строго выпуклым, если существует такой базис $M_1(\nu) \subseteq N(\nu)$ окрестностей нуля (базис гладких окрестностей нуля), что $X_{U^0}^* := \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} nU^0, m_{U^0}(\cdot)\right)$, где m_{U^0} — функционал Минковского множества U^0, является строго выпуклым банаховым пространством [24, с. 25] $\forall U \in M_1(\nu)$.

Теорема 13 [10, с. 28]. *Пусть* X — *ЛВП*, X^* — *строго выпукло*, $\pi \in \mathrm{K}(X)^2$, *а* $M_1(\nu)$ — *базис гладких окрестностей нуля в* X. *При каждом* $0 \leqslant \alpha \leqslant \psi$ *из экстремальной нормальности* π *порядка* α *следует* (2). *В случае, когда* π_2^* — *экстремально бэровская пара конусов, из справедливости* (2) *вытекает экстремальная нормальность* π *некоторого порядка* $1 \leqslant \alpha \leqslant \psi$.

Теорема 14 [10, с. 29]. *Пусть* X — *рефлексивное гладкое банахово пространство* [24, с. 24] *и* $\pi = (K_1, K_2) \in \mathrm{K}(X)^2$. *Равенство* (2) *выполняет-*

ся тогда и только тогда, когда π *квазинормальна и*

$$\overline{V} \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{s \in \mathrm{co}\left[V \cup \left(\left(K_1 + \frac{1}{n} V\right) \cap \left(K_2 + \frac{1}{n} V\right)\right)\right]} \bigcup_{\lambda \geqslant 1} ((1-\lambda) s + \lambda (V + (K_1 \cap K_2)),$$

где $V := \{x \in X \mid \|x\| < 1\}$.

Теоремы 12—14 являются следствиями предложения 2 и теорем 7, 10 и 8 соответственно. Каждая из теорем 12—14, очевидно, полностью решает вопрос о двойственном описании равенства (2) в конечномерных ЛВП [25, с. 95].

Пусть ω_1 — наименьшее из порядковых чисел, превышающих все порядковые числа второго класса, т. е. числа, мощность которых равна кардинальному числу бесконечных счетных множеств [21, с. 181, 275]. Если $X = \mathbb{R}^n$, то $\psi \leqslant \omega_1$, а в $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$ $\psi = 0$ [26, с. 9]. С другой стороны, имеет место следующая теорема.

Теорема 15. *Пусть* X — *ЛВП размерности не меньше* 4, α — *произвольное порядковое число второго класса. Тогда существует такая пара конусов* $\pi = (K_1, K_2) \in \mathrm{K}(X)^2$, *что* π *не является нормальной парой порядка* γ $\forall \gamma \in \{\beta \mid 0 \leqslant \beta \leqslant \alpha\}$, *для* π *справедливо равенство* (2) *и размерность линейной оболочки* $K_1 \cup K_2$ *равна* 4.

Опишем теперь ту пару конусов $\pi = (K_1, K_2)$, относительно которой справедливо утверждение теоремы 15.

Пусть действительные числа $a < b$ таковы, что $[a, b] \subset (0, \frac{1}{4}\pi)$, $b \leqslant a + \operatorname{tg} a$, ω_0 — наименьшее порядковое число второго класса и порядковое число β удовлетворяет следующему соотношению: $\omega_0^{\alpha+1} < \beta < \omega_1$. По числам β, a и b можно построить такую функцию $\varphi : [0, \beta] \to [a, b]$, что из $\alpha_1 < \alpha_2$, $0 \leqslant \alpha_1, \alpha_2 \leqslant \alpha$ следует $\varphi(\alpha_1) < \varphi(\alpha_2)$, и $\lim\limits_{\gamma < \lambda} \varphi(\gamma) = \varphi(\lambda)$ для любого предельного порядкового числа $\lambda \leqslant \beta$. Здесь $[0, \beta] := \{\gamma \mid 0 \leqslant \gamma \leqslant \beta\}$, а $\lim\limits_{\gamma < \lambda} \varphi(\gamma)$ обозначает наименьшее порядковое число множества $\{\alpha \mid \alpha > \varphi(\gamma) \ \forall \gamma < \lambda\}$. Обозначим $\psi_\gamma := \varphi(\gamma)$, $\gamma \in [0, \beta]$, и пусть $(e_i)_{i=0}^3$ — линейно независимые элементы X, а $(e_i^*)_{i=0}^3$ — система функционалов из X^*, биортогональная [19, с. 109] к $(e_i)_{i=0}^3$. Тогда конусы K_1 и K_2 определяются следующими равенствами:

$$K_1 = \{\lambda (e_0 + x_1 e_1 + x_2 e_2) \mid \lambda \geqslant 0, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}^1\},$$

$$K_2 = \{\lambda \mathrm{co}(\{e_0 + x_1 e_1 + x_2 e_2\}_{x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1} \cup \{a_{\gamma,\mu}\}_{(\gamma,\mu) \in [0,\beta] \times [0, b-a]}) \mid \lambda \geqslant 0\},$$

где $a_{\gamma,\mu} = e_0 + (\cos\psi_\gamma + \mu \sin\psi_\gamma) e_1 + (\sin\psi_\gamma - \mu\cos\psi_\gamma) e_2 + \mu^3 e_3$, $\gamma \in [0, \beta]$, $\mu \in [0, b-a]$.

8. Доказательство приведенных ниже утверждений по существу мало отличаются от доказательств соответствующих теорем в п. 7.

Пусть $Y := \mathbb{R}^1 \times X$. Для $\pi := (p, q) \in \mathrm{Sbl}(X)^2$ обозначим $\pi_2^* := (\partial p, \partial q)$ и

$$U_Y := \mathrm{Cl}\,\mathrm{epi}(m_U - 1),\ U_Y^* := (U_Y)^*,\ \psi := \sup\{\psi(U_Y^*) \mid U \in M(\nu)\},$$

$$p_U := p \nabla m_U,\ i_p(U) := -\inf p(U), \quad h_U^\pi := (p + q) \nabla (m_U - 1),$$

$$h_{UV}^\pi := (p_V + q_V) \nabla (m_U - 1), \qquad B_U := \{(\lambda, x) \mid \lambda^2 + m_U(x)^2 \leqslant 1, \lambda \in \mathbb{R}^1, x \in X\},$$

$$m_{\pi,U}(x) := \sup\{h_{UV}^\pi(x) \mid V \subseteq U, V \in M(\nu)\}, \quad \tau_U^\pi := \{\mathrm{epi}\, h_{UV}^\pi\}_{V \subseteq U},$$

$$\sigma_U^\pi := \{\mathrm{epi}\, h_{UV}^\pi)^*\}_{V \subseteq U}, \quad T_{U,V}^\pi := \mathrm{co}(\mathrm{epi}(p_V + q_V) + \mathrm{epi}\ m_U) \cup B_U),$$

где $U, V \in M(\nu)$, $(f \nabla g)(x) := \inf\{f(x - y) + g(y) \mid y \in X\}$, $x \in X$, $f, g : X \to \mathbb{R}^1 \cup \{+\infty\}$ и $m_U(\cdot)$ — функционал Минковского множества $U \in M(\nu)$.

Определение 2. *Пара функционалов* $\pi \in \mathrm{Sbl}(X)^2$ *называется квазинормальной, если* $\forall U \in M(\nu)\ \exists V \in M(\nu) : h_U^\pi(x) \leqslant m_{\pi,V}(x) \quad \forall x \in X$. *Пара*

$\pi \in \mathrm{Sbl}(X)^2$ *называется нормальной нулевого порядка, если* $\forall U \in M(\nu)\, \exists V \in M(\nu) : h^{\pi}_{U}(x) \leqslant h^{\pi}_{UV}(x)\ \forall x \in X$. *Квазинормальная пара* $\pi \in \mathrm{Sbl}(X)^2$ *называется нормальной порядка* $1 \leqslant \alpha \leqslant \psi$, *если при каждом* $U \in M(\nu) : W_{\alpha}(\tau^{\pi}_{U}) = Y$. *Пара множеств* π^*_{γ} *называется бэровской, если* $\sigma^{\pi}_{U} \in \mathrm{brc}(U^*_{Y})\ \forall U \in M(\nu)$. *Пара* $\pi \in \mathrm{Sbl}(X)^2$ *называется слабо преднормальной нулевого порядка, если существует такой полный предбазис* $K(\sigma(X, X^*))$, *что* $\forall U \in K(\sigma(X, X^*))\, \exists V \in M(\nu) : h^{\pi}_{U}(x) \leqslant h^{\pi}_{UV}(x) \quad \forall x \in X$.

Понятие нормальной пары функционалов нулевого порядка представляет собой непосредственное обобщение понятия нормальной пары конусов нулевого порядка, причем пара $\pi \in \mathrm{Sbl}(X)^2$ является нормальной нулевого порядка тогда и только тогда, когда $\forall U \in M(\nu)\ \exists V \in M(\nu) : U^0 \cap \partial(p+q) \subseteq V^0 \cap \partial p + V^0 \cap \partial q$. Кроме того, если функционалы p и q находятся в общем положении, то пара $\pi = (p, q)$ является нормальной нулевого порядка [10, с. 36].

Теоремы 11, 12 и следствие 2 допускают точно такую же формулировку и для пары функционалов $\pi = (p, q) \in \mathrm{Sbl}(X)^2$ [10, с. 34]. Теорема 13 для $\pi \in \mathrm{Sbl}(X)^2$ не имеет места из-за того, что направление σ^{π}_{U}, $U \in M(\nu)$, не является в этом случае пропорциональным. Аналогом теоремы 14 для $\pi \in \mathrm{Sbl}(X)^2$ является следующий результат.

Теорема 16 [10, с. 35]. *Пусть* X — *рефлексивное гладкое банахово пространство* $\pi = (p, q) \in \mathrm{Sbl}(X)^2$, $U := \{x \in X \mid \|x\| < 1\}$, $T^{\pi}_{mn} := T^{\pi}_{n^{-1}U, m^{-1}U}$, $P^{\pi}_{n} := \mathrm{epi}(p+q) + \mathrm{epi}\, m_{n^{-1}U} + B_{\frac{1}{n}U}$, $m, n \in \mathbb{N}$. *Равенство* (1) *выполняется в том и только том случае, когда* π — *квазинормальна и*

$$B_{\frac{1}{m}U} \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{s \in T^{\pi}_{mn}} \bigcup_{\lambda \geqslant 1} ((1-\lambda)s + \lambda\, \mathrm{int}\, P^{\pi}_{m}) \quad \forall m > i_{p+q}(U).$$

Таким образом, вопрос о двойственном описании равенств (1) и (2) решен, по существу, только для метризуемых ЛВП. В неметризуемых ЛВП решение этой задачи получено лишь для бэровских пар функционалов и конусов. Нерешенным остается также и вопрос о двойственном описании равенства Моро — Рокафеллара для двух и нескольких сублинейных операторов, где пока наиболее слабым достаточным условием справедливости остается условие общего положения сублинейных операторов [1, с. 75].

1. *Кусраев А. Г.* Векторная двойственность и ее приложения.— Новосибирск : Наука, 1985.— 256 с.
2. *Jameson G.* The duality of pairs of wedges // Proc. London Math. Soc.— 1972.— **24**, N 3.— P. 531—547.
3. *Шефер X.* Топологические векторные пространства.— М. : Мир, 1971.— 358 с.
4. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ.— М. : Мир, 1973.— 472 с.
5. *Пшеничный Б. Н.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи.— М. : Наука, 1980.— 320 с.
6. *Mennicken R., Sagraloff B.* On Banach's closed range theorems // Arch. Math.— 1980.— **33**, N 5.— P. 461—465.
7. *Дубовицкий А. Я., Милютин А. А.* Задачи на экстремум при наличии ограничений // Журн. вычислит. математики и мат. физики.— 1965.— **5**, № 3.— С. 395—453.
8. *Reiter H.* Contributions to harmonic analysis. VI // Ann. Math.— 1963.— **77**, N 2.— P. 552—562.
9. *Luxemburg W. A. J.* A note of the sum of two closed linear subspaces // Proc. Kon. ned. akad. wetensch. A.— 1985.— **88**, N 2.— P. 235—242.
10. *Бакан А. Г.* Равенство Моро—Рокафеллара.— Киев, 1986.— 40 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 86.48).
11. *Крейн М. Г., Рутман М. А.* Линейные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха // Успехи мат. наук.— 1948.— **3**, № 1.— С. 3—95.
12. *Moreau J.-J.* Sur la fonction polaire d'une fonctione semi-continue supérieurment // C. r. Acad. Sci. Paris.— 1964.— **258**.— P. 1128—1131.
13. *Кусраев А. Г.* Некоторые применения несплющенности в выпуклом анализе // Сиб. мат. журн.— 1982.— **22**, № 6.— С. 102—125.
14. *Elster K. H., Nehse R.* Ein Bipolarensatz // Math. Nachr.— 1974.— **62**.— P. 111—119.
15. *Bair J.* About the polarity in real linear space // Ibid.— 1977.— **77**.— P. 181—185.
16. *Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.* Локальный выпуклый анализ // Современ. пробл. математики.— М. : ВИНИТИ, 1982.— **19**.— С. 155—206.

17. *Акилов Г. П., Кутателадзе С. С.* Упорядоченные векторные пространства.— Новосибирск : Наука, 1978.— 368 с.
18. *Бакан А. Г.* Некоторые вопросы выпуклого анализа и их применение в теории функций: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук.— Киев, 1986.— 12 с.
19. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ.— М. : Наука, 1984.— 752 с.
20. *Александров П. С.* Введение в теорию множеств и общую топологию.— М. : Наука, 1977.— 368 с.
21. *Куратовский К., Мостовский А.* Теория множеств.— М. : Мир, 1970.— 416 с.
22. *Иоффе А. Д., Тихомиров В. М.* Теория экстремальных задач.— М. : Наука, 1974.— 479 с.
23. *Мильман Д. П.* Граневая характеристика выпуклых множеств, экстремальные элементы // Тр. Мат. ин-та СССР.— 1970.— **22**.— С. 63—126.
24. *Дистель Дж.* Геометрия банаховых пространств.— Киев : Вища шк., 1980.— 216 с.
25. *Люстерник Л. А., Соболев В. И.* Краткий курс функционального анализа.— М. : Высш. шк., 1982.— 271 с.
26. *Бакан А. Г.* Нормальные пары конусов в конечномерных пространствах // Некоторые вопросы теории приближения функций и их приложения.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1988.— С. 4—11.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 12.10.87