УДК 519.632

Т. Е. Коровкина

О сходимости метода разделения областей для эллиптических задач сопряжения второго порядка

1. При решении некоторых краевых задач, в частности, задач сопряжения, удобны методы, сводящие решение исходной задачи во всей области к решению подходящих краевых задач в подобластях. Такого типа метод (метод разделения областей) предложен в [1] для решения стационарных уравнений Навье—Стокса в сложных областях. В работах [2, 3] исследована сходимость метода для уравнения Пуассона в областях сложной формы и для эллиптических задач сопряжения второго порядка. В этих работах существенно использовалась самосопряженность рассматриваемых задач и, в частности, разложения по собственным функциям граничного оператора.

В настоящей работе изучается сходимость метода разделения областей для более широкого класса эллиптических задач сопряжения, которые из-за наличия членов первого порядка и комплексных коэффициентов, вообще говоря, несамосопряжены. Ключевым здесь является тот факт, что вводимый ниже граничный оператор K является секториальным. Это позволяет получить оценку зависящей от K функции (лемма 2), через которую выражается невязка.

Отметим, что лемма 2 представляет самостоятельный интерес и может быть использована при изучении, например, параболических задач сопряжения, которые являются существенно несамосопряженными.

2. В области $\Omega \subset \mathbb{R}^m(x)$, $\Omega = \overline{\Omega}^+ \cup \Omega^-$, $\overline{\Omega}^+ \subset \Omega$, рассматривается задача сопряжения

$$\mathcal{L}u^\pm = -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}^\pm(x)\frac{\partial u^\pm}{\partial x_j}\right) + b_j^\pm(x)\frac{\partial u^\pm}{\partial x_j} + a^\pm(x)u^\pm = f^\pm(x),$$

$$u^\pm \in \Omega^\pm, \tag{1}$$

$$\left.\frac{\partial u^+}{\partial \nu^+}\right|_\Gamma = \left.\frac{\partial u^-}{\partial \nu^-}\right|_\Gamma, \quad u^+|_\Gamma = u^-|_\Gamma, \quad u^-|_S = g(x).$$

Здесь S и Γ — гладкие границы областей Ω и Ω^+ соответственно, $\frac{\partial u^\pm}{\partial \nu^\pm} = a_{ij}^\pm \frac{\partial u^\pm}{\partial x_j}\cos(n, x_j)$ — производная по конормали к Γ. Предполагается, что коэффициенты оператора $\mathcal{L}$ — гладкие функции, вообще говоря, комплекснозначные. Будем предполагать также выполненным следующее условие:

$$\operatorname{Re} a(u, u) \geqslant \mu \| u \|^2_{H^1(\Omega)}, \quad u \in H_0^1(\Omega), \quad \mu > 0, \tag{2}$$

где

$$a(u, v) = \int_\Omega \left[a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial \bar{v}}{\partial x_i} + b_j\frac{\partial u}{\partial x_j}\bar{v} + au\bar{v}\right]dx,$$

а H^r и H_0^r, $r \in \mathbb{R}$ — пространства Соболева [4].

Напомним, что для строго эллиптического оператора выполняется неравенство $\operatorname{Re} a(u, u) \geqslant \mu \| u \|^2_{H^1(\Omega)} - \lambda \| u \|^2_{L^2(\Omega)}$, $\mu > 0$, $\lambda \geqslant 0$, и, следовательно, (2) справедливо для операторов $\mathcal{L} + \lambda$ с достаточно большим $\lambda \in \mathbb{R}$.

В дальнейшем знаки $\pm$ будем опускать, если это не будет вызывать недоразумение.

В соответствие с методом разделения областей для некоторого $\alpha > 0$ в каждой области $\Omega^\pm$ рассмотрим краевые задачи

$$\mathcal{L}u_N = f, \quad \left.\frac{\partial u_N}{\partial \nu}\right|_\Gamma = \left.\frac{\partial u_{N-1}}{\partial \nu}\right|_\Gamma - \alpha(u_{N-1}^+ - u_{N-1}^-)_\Gamma, \; u_N^-|_S = g, \tag{3}$$

где $u_N = \sum_{k=1}^N v_k$, а v_k — решения краевых задач

$$\mathcal{L}v_0 = f, \quad \left.\frac{\partial v_0}{\partial \nu}\right|_\Gamma = \psi, \quad v_0^-|_S = g,$$

$$\mathcal{L}v_1 = 0, \quad \left.\frac{\partial v_1}{\partial \nu}\right|_\Gamma = -\alpha(v_0^+ - v_0^-)_\Gamma, \quad v_1^-|_S = 0,$$

$$\mathcal{L}v_k = 0, \quad \left.\frac{\partial v_k}{\partial \nu}\right|_\Gamma = \left.\frac{\partial v_{k-1}}{\partial \nu}\right|_\Gamma - \alpha(v_{k-1}^+ - v_{k-1}^-)_\Gamma, v_k^-|_S = 0, \quad k \geqslant 2.$$

Здесь ψ — произвольная функция на Γ, играющая роль начального приближения.

Покажем, что $u_N \to u$ при $N \to \infty$ (u — решение задачи (1)). С этой целью введем граничный оператор K и изучим его свойства.

3. Рассмотрим краевую задачу

$$\mathcal{L}w = 0, \quad \left.\frac{\partial w}{\partial \nu}\right|_\Gamma = \psi, \quad w^-|_S = 0, \tag{4}$$

и определим линейный оператор K следующим образом: $K\psi = (w^+ - w^-)_\Gamma$.

Опишем некоторые свойства этого оператора. Напомним, что оператор K в гильбертовом пространстве H называется аккретивным, если $\operatorname{Re}(Ku,$

$u) \geqslant 0$, и секториальным, если для некоторого $\varphi_0 > 0$ оператор $e^{i\varphi}K$ аккретивен при $|\varphi| \leqslant \varphi_0$.

Лемма 1. *Оператор K является вполне непрерывным секториальным оператором в $L^2(\Gamma)$ с нулевым ядром.*

Доказательство полной непрерывности оператора K повторяет доказательство, приведенное в [3] в самосопряженном случае.

Докажем секториальность K. Пусть w — решение задачи (4). Справедливо тождество

$$0 = \int\limits_{\Omega} \mathcal{L} w \bar{w} dx = a(w, w) - \int\limits_{\Gamma} \frac{\partial w^+}{\partial \nu^+} \overline{(w^+ - w^-)}_{\Gamma} d\Gamma. \tag{5}$$

Из определения оператора K, тождества (5), неравенства $|a(w,w)| \leqslant c\|w\|^2_{H^1(\Omega)}$ и условия (2) следует неравенство

$$\operatorname{Re}(\psi, e^{i\varphi}K\psi) = \operatorname{Re}[e^{-i\varphi}a(w,w)] \geqslant \mu \cos\varphi \|w\|^2_{H^1(\Omega)} - |\sin\varphi| |a(w,w)| \geqslant$$
$$\geqslant (\mu\cos\varphi - c|\sin\varphi|)\|w\|^2_{H^1(\Omega)}.$$

Выберем φ_0 настолько малым, чтобы для $|\varphi| \leqslant \varphi_0$ выполнялось неравенство $\mu\cos\varphi - c|\sin\varphi| \geqslant 0$. Тогда $\operatorname{Re}(\psi, e^{i\varphi}K\psi) \geqslant \mu_0\|w\|^2_{H^1(\Omega)}$, откуда и следует утверждение леммы.

4. Для доказательства сходимости метода потребуется оценка нормы оператора $(I - \alpha K)^N K^r$, где K — ограниченный секториальный оператор. Через $\operatorname{spr} K$ обозначен спектральный радиус оператора K.

Лемма 2. *Пусть K — ограниченный секториальный оператор в гильбертовом пространстве H. Тогда для произвольных $\theta \in (0, r)$, $\alpha \in (0, \alpha_0)$, где $\alpha_0 = (\operatorname{spr} K)^{-1}\sin\varphi_0$, справедливо неравенство*

$$\|(I - \alpha K)^N K^r\| \leqslant \frac{c(r, \theta, \varphi_0)}{\alpha^r N^{r-\theta}}. \tag{6}$$

Доказательство. Пусть K — ограниченный секториальный оператор, т. е. $e^{i\varphi}K$ — аккретивен при $|\varphi| \leqslant \varphi_0$. Тогда спектр K находится в секторе σ_K, состоящем из отрезков лучей $\arg\lambda = \pm(\pi/2 - \varphi_0)$ и дуги окружности $|\lambda| = \operatorname{spr} K$. Обозначим через σ некоторый контур, охватывающий σ_K. Справедливо представление

$$(I - \alpha K)^N K^r = \frac{1}{2\Pi i}\int\limits_{\sigma}(1 - \alpha\lambda)^N \lambda^r (\lambda I - K)^{-1} d\lambda. \tag{7}$$

Покажем, что в (7) в качестве σ на самом деле можно выбрать контур, состоящий из лучей $\arg\lambda = \pm(\pi/2 - \varphi_0 + \varepsilon)$ и дуги $|\lambda| = \operatorname{spr} K + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ (этот контур проходит через нуль, являющийся точкой спектра K).

Действительно, выберем в качестве σ контур, охватывающий точку 0 и состоящий из отрезков лучей $\arg\lambda = \pm(\pi/2 - \varphi_0 + \varepsilon)$ и дуг окружностей $|\lambda| = \operatorname{spr} K + \varepsilon$ и $|\lambda| = \rho$. Устремим ρ к нулю и, используя оценку [5]

$$\|\lambda I - K\|^{-1} \leqslant [\operatorname{dist}(\lambda, \sigma_K)]^{-1}, \tag{8}$$

в пределе получаем нужный интеграл (его абсолютная сходимость также следует из оценки (8)).

Пусть $r = s + \theta$, где $\theta \in (0, r)$ произвольно. Положим также $\rho = |\alpha\lambda|$, $a = \operatorname{spr} K + \varepsilon$, $b = |\sin\varphi|$ и $f(\rho) = (1 - 2\rho b + \rho^2)^{N/2}\rho^s$. Тогда из (7), представляя интеграл по σ как сумму интегралов по лучам и дуге окружности γ и используя (8), находим

$$\|(I - \alpha K)^N K^r\| \leqslant c\int\limits_{\Omega} |1 - \alpha\lambda|^N |\lambda|^r \|\lambda I - K\|^{-1} d\lambda \leqslant$$
$$\leqslant \frac{c}{\alpha^r}\int\limits_0^{\alpha a}(1 - 2\rho b + \rho^2)^{N/2}\rho^{r-1}d\rho + c(\alpha a)^r \int\limits_{\gamma} |1 - \alpha\lambda|^N d\rho \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c}{\alpha^r} \sup_{[0,\alpha a]} f(\rho) \int_0^{\alpha a} \frac{d\rho}{\rho^{1-\theta}} + c(\alpha a)^r (\max_{|\lambda|=a} |1-\alpha\lambda|)^N \operatorname{mes}\gamma \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c(\alpha a)^\theta}{\alpha^r \theta} \sup_{[0,\alpha a]} f(\rho) + c(\alpha a)^r \varkappa^N \operatorname{mes}\gamma,$$

где $\varkappa = |1 - \alpha a e^{i(\Pi/2-\varphi)}|$.

Далее, можно показать, что для $\alpha \in (0, \alpha_0)$, $\alpha_0 = (\operatorname{spr} K)^{-1} \sin\varphi_0$, и $|\varphi| \leqslant \varphi_0 \sup\limits_{[0,\alpha a]} f(\rho) = f(\rho_1)$, где $\rho_1 > 0$ — наименьший корень уравнения $\rho^2(s+N) - \rho b(2s+N) + s = 0$. Так как $\rho_1 \to 0$ при $N \to \infty$, то $(1+2\rho_1 b + \rho_1^2)^{N/2} < 1$ и поэтому $\sup\limits_{[0,\alpha a]} f(\rho) \leqslant |\rho_1|^s$. В результате при больших N получаем

$$\sup_{[0,\alpha a]} f(\rho) \leqslant \left\{\frac{b}{2}\left(1 + \frac{s}{N+s}\right)\left[1 - \left(1 - \frac{4s}{b^2(N+s)}\left(1 + \frac{s}{N+s}\right)^{-2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]\right\}^s \leqslant$$

$$\leqslant \left[\frac{2s}{(N+2s)b}\right]^s.$$

Поэтому, учитывая, что $\alpha a < b$, получаем неравенство

$$\|(I-\alpha K)^N K^r\| \leqslant \frac{c(r,\theta)\, b^{\theta-s}}{\alpha^r N^{r-\theta}} + c b^r \varkappa^N \operatorname{mes}\gamma.$$

В силу того, что $\varphi \in (0, 1)$, второе слагаемое в правой части этого неравенства стремится к нулю быстрее, чем первое. Отсюда следует неравенство (6). Лемма доказана.

5. Сходимость метода и оценку скорости сходимости дает следующая теорема.

Теорема. *Пусть* $f^\pm \in H^{k-2}(\Omega^\pm)$, $g \in H^{k-1/2}(S)$, $\psi \in H^{k-3/2}(\Gamma)$. *Тогда для* $\alpha \in (0, \alpha_0)$, *где* $\alpha_0 = (\operatorname{spr} K)^{-1} \sin\varphi_0$, *и произвольного* $\theta \in (0, k-m-1)$, k *и* m *натуральные*, $k > m+1$, *справедлива оценка*

$$\|u - u_N\|_{H^m(\Omega\pm)} \leqslant \frac{c(m,k,\theta,\varphi_0)}{\alpha^{k-m-1} N^{k-m-\theta-1}} \{\|f^+\|_{H^{k-2}(\Omega+)} + \|f^-\|_{H^{k-2}(\Omega-)} +$$

$$+ \|g\|_{H^{k-1/2}(S)} + \|\psi\|_{H^{k-3/2}(\Gamma)}\}. \tag{9}$$

Доказательство. Невязка $w = u - u_N$ является решением краевой задачи

$$\mathcal{L}w = 0, \quad \left.\frac{\partial w^+}{\partial \nu^+}\right|_\Gamma = \left.\frac{\partial w^-}{\partial \nu^-}\right|_\Gamma,$$

$$(w^+ - w^-)_\Gamma = -\frac{1}{\alpha}(I-\alpha K)^N K^{-1}(v_1^+ - v_1^-)_\Gamma.$$

Теперь с использованием оценки (6) доказательство проводится по схеме [3].

6. Сравнение полученного результата с аналогичным для самосопряженного случая [3] показывает, что оценка (9) скорости сходимости метода несколько слабее. Однако порядки скорости сходимости в этих двух случаях отличаются на величину $\theta > 0$, которая может быть сколь угодно малой.

В заключение отметим, что аналогичные результаты могут быть получены для более общего эллиптического оператора

$$\mathcal{L}u = -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + b_j \frac{\partial u}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j}(c_j u) + au = f$$

с соответствующими условиями на границе Г.

1. *Дородницын А. А., Меллер Н. А.* О некоторых подходах к решению стационарных уравнений Навье — Стокса // Журн. вычисл. математики и мат. физики.— 1968.— **8**, № 2.— С. 393—402.
2. *Матеева Э. Й., Пельцес Б. В.* О разделении областей при решении краевых задач для уравнений Пуассона в областях сложной формы // Там же.— 1973.— **13**. № 6.— С. 1441—1452.
3. *Осмоловский В. Г., Ривкинд В. Я.* О методе разделения областей для эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами // Там же.— 1981.— **21**, № 1.— С. 35—39.
4. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения.— М.: Мир, 1971.— 371 с.
5. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов.— М. : Наука, 1965.— 448 с.

Ин-т прикл. математики и механики АН УССР,
Донецк

Получено 21.09.87