УДК 519.41/47

Б. И. МИЩЕНКО, канд. физ.-мат. наук (Киев)

Локально ступенчатые группы с дополняемыми бесконечными неабелевыми подгруппами

Исследуются бесконечные неабелевы группы с дополняемыми бесконечными неабелевыми подгруппами. Доказано, что при условии локальной ступенчатости такие группы локально конечны, разрешимы и в них тогда и только тогда дополняемы все неабелевы подгруппы, когда они нечерниковские.

Досліджуються нескінченні неабелеві групи, в яких доповнюються нескінченні неабелеві підгрупи. Доведено, що при умові локальної ступінчатості такі групи локально скінченні, розв'язані і в них тоді і лише тоді мають доповнення всі неабелеві підгрупи, коли вони нечерніковські.

В работах [1, 2] исследовались бесконечные неабелевы группы, в которых дополняемы бесконечные неабелевы подгруппы. Такие группы получили там название $I\overline{A}C$-групп. Основная цель настоящей статьи — установить, в каких случаях в локально ступенчатой $I\overline{A}C$-группе дополнения имеют все неабелевы подгруппы и выяснить, насколько класс локально ступенчатых $I\overline{A}C$-групп шире класса бесконечных неабелевых групп с дополняемыми неабелевыми подгруппами. В работе $I\overline{A}C$-группы изучаются при дополнительном условии локальной ступенчатости, исключающем из рассмотрения так называемые бесконечные группы Шмидта — бесконечные неабелевы группы, все истинные (собственные) подгруппы которых конечны [3, с. 236]. Существование групп Шмидта установлено в работе [4], а описание их строения — задача, очевидно, сложная. Заметим, что каждая бесконечная неабелева группа, не содержащая истинных бесконечных неабелевых подгрупп, является $I\overline{A}C$-группой. Описание такого рода групп при условии их локальной ступенчатости дал С. Н. Черников [5]. Оказалось, что такие группы—черниковские, т. е. являются конечными расширениями прямых произведений конечного числа квазициклических подгрупп. Существование черниковских $I\overline{A}C$-групп доказывает, что из условия дополняемости в группе бесконечных неабелевых подгрупп, вообще говоря, не следует дополняемость в ней всех неабелевых подгрупп.

Бесконечные бинарно конечные (в частности, локально конечные) неабелевы группы, в которых дополняемы все (в том числе конечные) неабелевы подгруппы, исследованы в работе П. П. Барышовца [6], где они описаны с точностью до образующих элементов и определяющих соотношений.

Определение 1. *Группа называется локально ступенчатой, если каждая ее отличная от единицы конечнопорожденная подгруппа имеет подгруппу отличного от единицы конечного индекса.*

Понятие локальной ступенчатости введено С. Н. Черниковым [3, с. 236] как обобщение многих известных условий конечности, в частности локальной конечности и локальной разрешимости. Локально ступенчатыми являются также группы, обладающие нормальной системой с конечными факторами, финитно аппроксимируемые группы и др.

Определение 2. *Группа, в которой дополняемы все подгруппы, называется вполне факторизуемой* [7].

Лемма 1. *Произвольная локально разрешимая неабелева группа с дополняемыми бесконечными неабевыми подгруппами является локально конечной группой.*

Доказательство. Докажем сначала, что произвольная конечнопорожденная разрешимая неабелева группа с дополняемыми бесконечными неабелевыми подгруппами конечна. В самом деле, пусть это не так. Возьмем конечнопорожденную разрешимую $I\overline{A}C$-группу G, ступень разрешимости n которой является наименьшей возможной.

Фактор-группа $G/G^{(n-1)}$ группы G по абелевому $(n-1)$-му члену ряда ее коммутантов конечна или абелева. Если она конечна, то группа G

почти абелева. Покажем, что группа G является почти абелевой и в том случае, когда фактор-группа $\overline{G} = G/G^{(n-1)}$ бесконечная абелева.

Рассмотрим разложение $\overline{G} = \overline{T} \times \overline{F}$ группы $\overline{G}$ в прямое произведение ее конечной подгруппы $\overline{T}$ (периодической части) и свободной абелевой подгруппы $\overline{F}$. Подгруппа $\overline{F}^2$, порожденная квадратами всех элементов подгруппы $\overline{F}$, не дополняема в $\overline{G}$. Следовательно, и полный прообраз F_1 подгруппы $\overline{F}^2$ из $\overline{G}$ не дополняем в группе G, а так как подгруппа F_1 бесконечна, то в силу определения $\mathrm{I}\overline{\mathrm{A}}\mathrm{C}$-группы она должна быть абелевой подгруппой группы G. Таким образом, F_1 — абелева подгруппа группы G конечного индекса, а потому группа G почти абелева.

Таким образом, доказано, что группа G обладает некоторым абелевым нормальным делителем A конечного индекса, при этом подгруппа A — конечнопорождена и можно считать, что без кручения. Положим $m = |G/A|$ и возьмем произвольное простое число p, не делящее m. Тогда по теореме Шура [8] имеет место разложение

$$G/A^p = \mathrm{A}/A^p \leftthreetimes S/A^p, \tag{1}$$

где S/A^p — некоторая подгруппа из G/A^p. Так как $|G : S| = |A : A^p| = p^t$, $t \geqslant 1$, то подгруппа S бесконечна и не может иметь дополнения в группе G, поскольку порядки конечных подгрупп группы G делят число m. Следовательно, из определения $\mathrm{I}\overline{\mathrm{A}}\mathrm{C}$-групп вытекает абелевость подгруппы S, а тогда из соотношения (1) получаем $A^p \leqslant Z(G)$, где $Z(G)$ — центр группы G.

Если q — еще одно простое число, не делящее m, и $q \neq p$, то аналогично доказывается, что $A^q \leqslant Z(G)$. Значит, $A^p \cdot A^q \leqslant Z(G)$, а так как, очевидно,

$$\mathrm{A}^p \cdot A^q = A$$

и по доказанному подгруппа S абелева, то соотношение $A \cdot S = G$ влечет абелевость группы G, что противоречит определению $\mathrm{I}\overline{\mathrm{A}}\mathrm{C}$-группы. Таким образом, доказано, что конечнопорожденная разрешимая неабелева группа с дополняемыми бесконечными неабелевыми подгруппами не может быть бесконечной.

Если теперь G — локально разрешимая $\mathrm{I}\overline{\mathrm{A}}\mathrm{C}$-группа, то по доказанному выше каждая ее конечнопорожденная подгруппа должна быть конечной и отсюда вытекает, что G — локально конечная группа. Лемма доказана.

Следствие 1. *Каждая непериодическая локально разрешимая неабелева группа содержит недополняемую в группе бесконечную неабелеву подгруппу.*

Теорема 1. *Каждая бесконечная локально ступенчатая неабелева группа G с дополняемыми бесконечными неабелевыми подгруппами локально конечна и разрешима. При этом G тогда и только тогда является черниковской группой, когда она содержит недополняемую конечную неабелеву подгруппу.*

Доказательство. Покажем, что группа G локально конечна. Пусть это не так. Легко видеть, что тогда G содержит некоторую бесконечную конечнопорожденную неабелеву подгруппу H. По определению 1 группа H содержит истинную подгруппу конечного индекса, а значит, и некоторый истинный нормальный делитель N конечного индекса. Если H/N — абелева группа, то $H' \neq H$; если же H/N — неабелева, то она в силу предложения 5 из [2] вполне факторизуема и потому разрешима [7]. Следовательно, и в этом случае $H' \neq H$.

Очевидно, H' — неабелева группа, причем она не может быть конечной. В самом деле, если H' — конечна, то в силу предложения 6 из [2] абелева фактор-группа H/H' является группой с дополняемыми бесконечными подгруппами, а такие группы, очевидно, не содержат элементов бесконечного порядка. В таком случае конечнопорожденная группа H/H' конечна, но тогда конечна и подгруппа H. Противоречие.

Таким образом, H' — бесконечная неабелева группа и потому в силу предложения 5 из [2] фактор-группа H/H' является вполне факторизуемой, а значит, конечной абелевой группой. Этим установлено, что индекс $|H:H'|$ конечен и, следовательно, подгруппа H' конечнопорождена.

Аналогичными рассуждениями доказывается, что среди членов ряда последовательных коммутантов $H > H^{(1)} > H^{(2)} > H^{(3)}$ нет совпадающих подгрупп, все они конечнопорождены, неабелевы и бесконечны.

Рассмотрим фактор-группу $H/H^{(3)}$. С одной стороны, ее ступень разрешимости равна 3, а с другой,— она вполне факторизуема и потому ступень ее разрешимости не выше 2 [7].

Полученное противоречие показывает, что группа G локально конечна. В таком случае в соответствии с предложением 8 из [2] она разрешима. В работе [1] установлено, что при этих условиях группа G тогда и только тогда черниковская, когда она содержит недополняемую конечную неабелеву подгруппу. Теорема доказана.

Следствие 2. *В бесконечной локально ступенчатой неабелевой группе G из условия дополняемости в ней бесконечных неабелевых подгрупп тогда и только тогда следует дополняемость всех неабелевых подгрупп, когда группа G нечерниковская.*

Следствие 3. *Бесконечная локально ступенчатая группа, в которой дополняемы все бесконечные подгруппы, является либо вполне факторизуемой, либо черниковской группой.*

В самом деле, если G — бесконечная локально ступенчатая группа с дополняемыми бесконечными подгруппами, то непосредственно из теоремы 1 вытекает ее разрешимость, а справедливость сформулированного утверждения получаем из следствия 1 работы [2].

Следствие 4. *Бесконечная локально ступенчатая неабелева группа, все бесконечные собственные подгруппы которой абелевы, локально конечна и разрешима.*

Это утверждение вытекает из теоремы 1 и полностью согласуется с результатами, сформулированными для групп, обладающих нормальной системой с конечными факторами, в следствиях 6.3 и 6.4 из монографии [3], а также с теоремой 4 из работы [5], где установлена черниковость бесконечных локально ступенчатых неабелевых групп, все собственные бесконечные подгруппы которых абелевы.

Таким образом, в настоящей работе установлено, что описание групп с дополняемыми неабелевыми подгруппами, полученное в [6], справедливо для локально ступенчатых нечерниковских $\bar{I}\bar{A}C$-групп. В то же время теорема 1 несколько обобщает результаты, полученные для IC-групп — бесконечных групп с дополняемыми бесконечными подгруппами (см. [3], теоремы 7.16, 7.17). Из нее следует, что приведенное в теореме 7.17 описание IC-групп справедливо для локально ступенчатых групп.

1. *Мищенко Б. И.* Локально конечные гуппы с дополняемыми бесконечными неабелевыми подгруппами // Конструктивное описание групп с заданными свойствами подгрупп.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1980.— С. 55—71.
2. *Мищенко Б. И.* Группы с некоторыми свойствами дополняемых бесконечных подгрупп// Исследования групп с ограничениями для подгрупп.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1988.— С. 59—66.
3. *Черников С. Н.* Группы с заданными свойствами системы подгрупп.— М. : Наука, 1980.— 384 с.
4. *Ольшанский А. Ю.* Бесконечные группы с циклическими подгруппами // Докл. АН СССР.— 1979.— **245**, № 4.— С. 785—787.
5. *Черников С. Н.* Группы с условием минимальности для неабелевых подгрупп // Группы с ограничениями для подгрупп.— Киев : Наук. думка, 1971.— С. 96—106.
6. *Барышовец П. П.* Неабелевы группы с дополняемыми неабелевыми подгруппами // Укр. мат. журн.— 1980.— **32**, № 1.— С. 99—101.
7. *Черникова Н. В.* Вполне факторизуемые группы // Докл. АН СССР.— 1953.— **92**, № 5.— С. 877—880.
8. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп.— М. : Наука, 1982.— 288 с.

Получено 29.01.91

предложения 5 из [2] фактор-группа H/H' является вполне факторизуемой, а значит, конечной абелевой группой. Этим установлено, что индекс $|H : : H'|$ конечен и, следовательно, подгруппа H' конечнопорождена.

Аналогичными рассуждениями доказывается, что среди членов ряда последовательных коммутантов $H > H^{(1)} > H^{(2)} > H^{(3)}$ нет совпадающих подгрупп, все они конечнопорождены, неабелевы и бесконечны.

Рассмотрим фактор-группу $H/H^{(3)}$. С одной стороны, ее ступень разрешимости равна 3, а с другой,— она вполне факторизуема и потому ступень ее разрешимости не выше 2 [7].

Полученное противоречие показывает, что группа G локально конечна. В таком случае в соответствии с предложением 8 из [2] она разрешима. В работе [1] установлено, что при этих условиях группа G тогда и только тогда черниковская, когда она содержит недополняемую конечную неабелеву подгруппу. Теорема доказана.

Следствие 2. *В бесконечной локально ступенчатой неабелевой группе G из условия дополняемости в ней бесконечных неабелевых подгрупп тогда и только тогда следует дополняемость всех неабелевых подгрупп, когда группа G нечерниковская.*

Следствие 3. *Бесконечная локально ступенчатая группа, в которой дополняемы все бесконечные подгруппы, является либо вполне факторизуемой, либо черниковской группой.*

В самом деле, если G — бесконечная локально ступенчатая группа с дополняемыми бесконечными подгруппами, то непосредственно из теоремы 1 вытекает ее разрешимость, а справедливость сформулированного утверждения получаем из следствия 1 работы [2].

Следствие 4. *Бесконечная локально ступенчатая неабелева группа, все бесконечные собственные подгруппы которой абелевы, локально конечна и разрешима.*

Это утверждение вытекает из теоремы 1 и полностью согласуется с результатами, сформулированными для групп, обладающих нормальной системой с конечными факторами, в следствиях 6.3 и 6.4 из монографии [3], а также с теоремой 4 из работы [5], где установлена черниковость бесконечных локально ступенчатых неабелевых групп, все собственные бесконечные подгруппы которых абелевы.

Таким образом, в настоящей работе установлено, что описание групп с дополняемыми неабелевыми подгруппами, полученное в [6], справедливо для локально ступенчатых нечерниковских $\bar{\mathrm{I}}\bar{\mathrm{A}}$C-групп. В то же время теорема 1 несколько обобщает результаты, полученные для IC-групп — бесконечных групп с дополняемыми бесконечными подгруппами (см. [3], теоремы 7.16, 7.17). Из нее следует, что приведенное в теореме 7.17 описание IC-групп справедливо для локально ступенчатых групп.

1. *Мищенко Б. И.* Локально конечные гуппы с дополняемыми бесконечными неабелевыми подгруппами // Конструктивное описание групп с заданными свойствами подгрупп.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1980.— С. 55—71.
2. *Мищенко Б. И.* Группы с некоторыми свойствами дополняемых бесконечных подгрупп// Исследования групп с ограничениями для подгрупп.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1988.— С. 59—66.
3. *Черников С. Н.* Группы с заданными свойствами системы подгрупп.— М. : Наука, 1980.— 384 с.
4. *Ольшанский А. Ю.* Бесконечные группы с циклическими подгруппами // Докл. АН СССР.— 1979.— **245**, № 4.— С. 785—787.
5. *Черников С. Н.* Группы с условием минимальности для неабелевых подгрупп // Группы с ограничениями для подгрупп.— Киев : Наук. думка, 1971.— С. 96—106.
6. *Барышовец П. П.* Неабелевы группы с дополняемыми неабелевыми подгруппами // Укр. мат. журн.— 1980.— **32**, № 1.— С. 99—101.
7. *Черникова Н. В.* Вполне факторизуемые группы // Докл. АН СССР.— 1953.— **92**, № 5.— С. 877—880.
8. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп.— М. : Наука, 1982.— 288 с.

Получено 29.01.91