УДК 512.554.3

В. М. Футорный

О непроводимых $Sl(3)$-модулях с бесконечномерными весовыми подпространствами

В настоящей статье продолжается изучение неприводимых бесконечномерных весовых представлений алгебры $sl(3)$, начатое в работе [1]. Получено описание одного естественного класса неприводимых $sl(3)$-модулей. К нему, в частности, принадлежат все модули, которые имеют хотя бы одно одномерное весовое подпространство. Такие модули рассматривались в [2, 3]. Полученные результаты позволяют строить неприводимые представления алгебры $sl(3)$ с бесконечномерными весовыми подпространствами.

Основное поле $\mathfrak{F}$ предполагается алгебраически замкнутым характеристики 0. Далее, пусть $\mathfrak{G} = sl(3)$, $\mathfrak{H} = \{\mathrm{diag}(\nu_1, \nu_2, \nu_3) \mid \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 = 0\}$, $R = \{\nu_i - \nu_j,\ i \neq j,\ i,\ j = \overline{1, 3}\}$. Для каждого $\varphi = \nu_i - \nu_j$ обозначим через e_{ij} матрицу, у которой на (i, j) месте стоит 1, а на остальных — нули.

Аналогично [1] рассмотрим категорию Q, состоящую из $\mathfrak{G}$-модулей, у которых элементы подалгебры Картана $\mathfrak{H}$ и центра $Z(\mathfrak{G})$ универсальной обертывающей алгебры $U(\mathfrak{G})$ имеют собственный базис. Тогда всякий объект V этой категории имеет вид $V = \bigoplus_{\chi \in \mathfrak{H}^*} V_\chi$, $V_\chi = \{v \in V \mid Hv = \chi(H)v\ \forall\ H \in \mathfrak{H}\}$.

Обозначим $S(V)=\{\chi\in\mathfrak{H}^*\,|\,V_\chi\neq 0\}$. Пусть $C(\mathfrak{H})$ — централизатор подалгебры $\mathfrak{H}$ в $U(\mathfrak{E})$. Если $X\in C(\mathfrak{H})$, то через $X(\chi)$ обозначим ограничение оператора X на V_χ. Зафиксируем $\alpha\in R$. Цель работы — описать все неприводимые объекты V категории Q, у которых оператор $e_\alpha e_{-\alpha}(\chi)$ имеет собственный базис для некоторого $\chi\in S(V)$.

Предположим, что $\alpha=\nu_i-\nu_j$, $i\neq j$. Рассмотрим $\beta=\nu_j-\nu_k$, $k\neq i, j$. Тогда пара $\{\alpha, \beta\}$ является базисом системы корней R. Легко проверить, что централизатор $C(\mathfrak{H})$ порожден элементами $H_1=[e_\alpha, e_{-\alpha}]$, $H_2=[e_\beta, e_{-\beta}]$, $A=e_\alpha e_{-\alpha}$, $B=e_\beta e_{-\beta}$, а также образующими центра универсальной обертывающей алгебры C_1 и C_2 [1, с. 494].

Для каждой пары $(\gamma_1, \gamma_2)\in\mathfrak{F}^2$ обозначим через $Q(\gamma_1, \gamma_2)$ полную подкатегорию в Q, образованную теми модулями, у которых C_1 и C_2 имеют единственное собственное значение γ_1 и γ_2 соответственно. При этом каждый объект V категории Q представляется в виде $V=\bigoplus\limits_{\gamma_1,\gamma_2} V(\gamma_1, \gamma_2)$, где $V(\gamma_1, \gamma_2)\in Q(\gamma_1, \gamma_2)$. Ясно, что все неприводимые объекты категории Q содержатся в некоторой подкатегории $Q(\gamma_1, \gamma_2)$. В $Q(\gamma_1, \gamma_2)$ рассмотрим полную подкатегорию $Q_\alpha(\gamma_1, \gamma_2)$ модулей V, у которых существует собственный базис для оператора $e_\alpha e_{-\alpha}(\chi)$ при некотором $\chi\in S(V)$. В этом случае χ будем называть особым весом модуля V.

Рассмотрим неприводимый $\mathfrak{G}$-модуль $V\in Q_\alpha(\gamma_1, \gamma_2)$ с особым весом χ. Тогда V_χ — неприводимый $C(\mathfrak{H})$-модуль, причем V однозначно восстанавливается по V_χ. Поэтому для описания неприводимых объектов категории $Q_\alpha(\gamma_1, \gamma_2)$ с особым весом χ достаточно описать все неприводимые $C(\mathfrak{H})$-модули, у которых H_1, H_2, C_1, C_2 действуют умножением на $\chi(H_1)$, $\chi(H_2)$, γ_1 и γ_2 соответственно, а оператор $A(\chi)$ имеет собственный базис. Категорию $C(\mathfrak{H})$-модулей, удовлетворяющих этим условиям, обозначим $K(\alpha, \chi, \gamma_1, \gamma_2)$.

Пусть $\chi(H_i)=h_i$, $i=1, 2$, $r=\frac{1}{2}(h_1^2-2h_1)$. Рассмотрим многочлен $g(x, y)=(x-y)^2-2(x+y+r)$.

Лемма. *Пусть V — неприводимый объект категории $K(\alpha, \chi, \gamma_1, \gamma_2)$, λ — собственное значение оператора $A(\chi)$. Тогда*

1) кратность λ равна 1;

2) собственные значения оператора $A(\chi)$ можно упорядочить так, что $[A(\chi)]=\bigoplus\limits_i \alpha_i$ и $g(\lambda_i, \lambda_{i+1})=0$.

Доказательство леммы аналогично доказательству соответствующих результатов в [1].

Построим некоторые универсальные объекты категории $K(\alpha, \chi, \gamma_1, \gamma_2)$. Рассмотрим произвольное $\lambda_0\in\mathfrak{k}$, пространство W с базисом $\{w_i, i\in\mathbb{Z}\}$, подпространство $W_+=\{w_i, i\geqslant 0\}$ и множество $T=\left\{n(n-1)-\frac{1}{2}r, n\geqslant 1\right\}\cup$ $\cup\left\{(n-1)^2-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}r, n\geqslant 1\right\}$. Обозначим $\lambda_i=i^2+i(1+4\lambda_0+2r)^{1/2}+$ $+\lambda_0$, $i\in\mathbb{Z}$

Рассмотрим различные случаи. 1. $\lambda_0\notin T$. Положим

$$Aw_i=\lambda_i w_i,\ i\in\mathbb{Z},\ Bw_i=\begin{cases} w_{i-1}+b_i w_i+d_{i+1}w_{i+1}, & i<0,\\ w_{-1}+b_0 w_0+w_1, & i=0,\\ d_i w_{i-1}+b_i w_i+w_{i+1}, & i>0,\end{cases}\qquad (1)$$

где

$$b_i=(a\lambda_i-\lambda_i^2-\varepsilon)/(2\lambda_i+r),\quad d_i=\frac{1}{4}(\lambda_{i-1}-\lambda_i+1)^{-1}\left(\lambda_{i-1}-\frac{3}{4}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}r\right)^{-1}\left[\xi(\lambda_{i-1})(3+\lambda_{i-1}-\lambda_i)-\theta(\lambda_{i-1})\left[\frac{7}{2}\lambda_{i-1}-\frac{3}{2}\lambda_i+3+r\right)\right],$$

$$\xi(\lambda_i)=\frac{1}{2}(2\lambda_i+r)b_i^2-(2\lambda_i+r)b_i-\frac{1}{2}\bar{r}\lambda_i^2-(\bar{r}+\bar{\varepsilon})\lambda_i-\eta,$$

$$\theta(\lambda_i) = (a - 2\lambda_i) b_i - b_i^2 - \bar{r}\lambda_i - \bar{\varepsilon},\ a = 6\gamma_1 + h_1 + h_2 - \frac{1}{3} h_1^2 - \frac{1}{3} h_2^2 + \frac{1}{6} h_1 h_2,\ \bar{r} = \frac{1}{2}(h_2^2 - 2h_2),\ \eta = \frac{1}{4}\pi^2 + \frac{1}{6}\pi(h_1h_2 + h_1^2 + h_2^2 - 18\gamma_1) + \frac{1}{4} h_1 h_2 (h_1 h_2 + 4 - 2a),\ \pi = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{9}(h_1 - h_2)^2 - \gamma_2 + 6\gamma_1(h_2 - h_1 + 3) - h_1^2 - h_2^2 - h_1h_2 + 2h_1 - 2h_2\right],\ \varepsilon = \frac{1}{2} h_1 \pi + h_1 h_2,$$

$$\bar{\varepsilon} = -\frac{1}{2}\pi h_2 + \frac{1}{3} h_2 [18\gamma_1 - h_1^2 - h_2^2 - h_1 h_2 + 3h_1].$$

2. $\lambda_0 = (n-1)^2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} r$ для некоторого целого $n \geqslant 1$ и

$$(1 + \lambda_1 - \lambda_0)\,\xi(\lambda_0) = \left(\frac{3}{2}\lambda_1 + \frac{1}{2}\lambda_0 + r\right)\theta(\lambda_0). \tag{2}$$

Положим

$$A w_i = \lambda_i w_i,\ i \geqslant 0,\ B w_i = \begin{cases} b_0 w_0 + w_1, & i = 0, \\ c_i w_{i-1} + b_i w_i + w_{i+1}, & i > 0, \end{cases} \tag{3}$$

где $c_1 = (1 + \lambda_1 - \lambda_0)^{-1}\theta(\lambda_0)$, $c_2 = \begin{cases} (1 + \lambda_2 - \lambda_1)^{-1}\theta(\lambda_1), & n = 1, \\ d_2, & n > 1, \end{cases}$ $c_i = d_i$, $i > 2$.

3. $\lambda_0 = n(n-1) - \frac{1}{2} r$ для некоторого целого $n \geqslant 1$, причем $r^2 + 2ar + 4\varepsilon = 0$, если $n = 1$, и выполняется условие (2), если $n > 1$. Положим

$$A w_i = \lambda_i w_i,\quad i \geqslant 0,\quad B w_i = \begin{cases} t w_0 + w_1, & i = 0, \\ q_i w_{i-1} + b_i w_i + w_{i+1}, & i > 0, \end{cases} \tag{4}$$

где $q_1 = \begin{cases} (1 + \lambda_1 - \lambda_0)^{-1}\theta(\lambda_0), & n \neq 1, \\ \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{8}\bar{r}r^2 + \frac{1}{2}(\bar{r} + \bar{\varepsilon})r - \eta\right), & n = 1, \end{cases}$ $q_i = d_i$, $i > 1$, $t = b_0$, если $n > 1$ и t — корень уравнения

$$x^2 - (r + a)x + \bar{\varepsilon} - \frac{1}{8}\bar{r}r^2 + \frac{1}{2} r\bar{\varepsilon} - \eta = 0, \tag{5}$$

если $n = 1$. Кроме того, положим

$$C_i w = \gamma_i w,\quad H_i w = h_i w,\qquad i = 1, 2, \tag{6}$$

для всех $\omega \in W$.

Предложение 1. *Формулы* (1) (*соответственно* (3) *или* (4)) *вместе с* (6) *определяют структуру* $C(\mathfrak{H})$*-модуля на* W (*соответственно* W_+).

Доказательство состоит в проверке соотношений (1) работы [1].

Построенные объекты категории $K(\alpha, \chi, \gamma_1, \gamma_2)$ будем называть универсальными модулями с начальным значением λ_0 и обозначать $W(\lambda_0)$, если $\lambda_0 \neq -\frac{1}{2} r$, и $W\left(-\frac{1}{2} r,\ t\right)$ — в противном случае.

Пусть $p(i, \lambda_0) = \xi(\lambda_i)(3 + \lambda_i - \lambda_{i+1}) - \theta(\lambda_i)\left(\frac{7}{2}\lambda_i - \frac{3}{2}\lambda_{i+1} + 3 + r\right)$.

Рассмотрим следующую функцию на $\mathbb{Z} \times \mathfrak{k}$: $f(i, \lambda_0) = 0$, если $\lambda_0 \in T$, $i < 0$; $f\left(0, -\frac{1}{4} - \frac{1}{2} r\right) = \theta\left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{2} r\right)$; $f\left(1, -\frac{1}{4} - \frac{1}{2} r\right) = f\left(0, \frac{3}{4} -\right.$

$-\frac{1}{2}r\Big) = \theta\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}r\right)$; $f\left(0, -\frac{1}{2}r\right) = \eta + \frac{1}{8}r^2 r - \frac{1}{2}r\ (r + \bar{\varepsilon})$; $f(i, \lambda_0) = p(i, \lambda_0)$ — в остальных случаях.

Обозначим $\Omega(\lambda_0) = \{i \in \mathbb{Z} \mid f(i, \lambda_0) = 0\}$, $\Omega^+(\lambda_0) = \{i \in \Omega(\lambda_0) \mid i \geqslant 0\}$, $\Omega^-(\lambda_0) = \Omega(\lambda_0) \setminus \Omega^+(\lambda_0)$.

Предложение 2. *Следующие утверждения равносильны:*

1) *универсальный модуль с начальным значением λ_0 неприводим;*

2) $\Omega^+(\lambda_0) = \varnothing$ *и если* $\lambda_0 \notin T$, *то* $\Omega^-(\lambda_0) = \varnothing$.

Доказательство следует из построения универсального модуля с начальным значением λ_0.

Предложение 3. *Универсальный модуль с начальным значением λ_0 имеет единственный максимальный подмодуль.*

Доказательство. Пусть W — универсальный модуль с начальным значением λ_0 и V — некоторый его $C(\mathfrak{H})$-подмодуль, причем $V \neq W$. Тогда $V \subset \sum\limits_{i \neq 0} W_{\lambda_i}$, где $W_{\lambda_i} = \mathfrak{k}w_i$, $Aw_i = \lambda_i w_i$, Ясно, что и сумма всех $C(\mathfrak{H})$-подмодулей в W, отличных от W, содержится в $\sum\limits_{i \neq 0} W_{\lambda_i}$. Отсюда следует утверждение предложения.

Неприводимый фактор-модуль универсального модуля $W(\lambda_0)$ $\left(\text{соответственно } W\left(-\frac{1}{2}r, t\right)\right)$ будем обозначать через $N(\lambda_0)$ $\left(\text{соответственно } N\left(-\frac{1}{2}r, t\right)\right)$.

Теорема. *Всякий неприводимый объект категории $K(\alpha, \chi, \gamma_1, \gamma_2)$ является фактор-объектом универсального модуля с некоторым начальным значением.*

Доказательство теоремы следует из предложения 3 и построения универсального модуля.

Следствие. *Неприводимый объект категории $K(\alpha, \chi, \gamma_1, \gamma_2)$ имеет конечную размерность тогда и только тогда, когда $\Omega^+(\lambda_0) \neq \varnothing$ и $\Omega^-(\lambda_0) \neq \varnothing$, где λ_0 — начальное значение соответствующего универсального модуля.*

Предложение 4. *Пусть $\lambda_0, \mu_0 \in \mathfrak{k}$.*

1. *Предположим, что $\lambda_0 \notin T$ $N(\lambda_0) \simeq N(\mu_0)$ тогда и только тогда, когда существует целое $j \geqslant 0$ такое, что $\mu_0 = j^2 + j(1 + 4\lambda_0 + 2r)^{1/2} + \lambda_0$, $\Omega(\lambda_0) \cap \{0, 1, \ldots, j-1\} = \varnothing$, либо $\lambda_0 = j^2 + (1 + 4\mu_0 + 2r)^{1/2} + \mu_0$, $\Omega(\mu_0) \cap \{0, 1, \ldots, j-1\} = \varnothing$.*

2. *Пусть $\lambda_0 \in T \setminus \left\{-\frac{1}{2}r\right\}$. Тогда $N(\lambda_0) \not\simeq N(\mu_0)$ при $\lambda_0 \neq \mu_0$.*

3. $N(\lambda_0) \not\simeq N\left(-\frac{1}{2}r, t\right)$ *и* $N\left(-\frac{1}{2}r, t_1\right) \not\simeq N\left(-\frac{1}{2}r, t_2\right)$ *при* $t_1 \neq t_2$.

Доказательство предложения следует из леммы и предложения 2.

Замечание. Если неприводимый объект $N(\lambda_0)$ $\left(N\left(-\frac{1}{2}r, t\right)\right)$ категории $K(\alpha, \chi, \gamma_1, \gamma_2)$ имеет бесконечную размерность, то в соответствующем неприводимом $\mathfrak{C}$-модуле V все весовые подпространства бесконечномерны, причем $S(V) = \{\chi + k\alpha + n\beta \mid k, n \in \mathbb{Z}\}$.

1. *Футорный В. М.* Некоторое обобщение модулей Верма и неприводимые представления алгебры Ли $sl(3)$ // Укр. мат. журн.— 1986.— 38, № 4.— С. 492—497.
2. *Britten D. J., Lemire F. W.* Irreducible representation of A_n with 1-dimensional weight space // Trans. Amer. Math. Soc.— 1982.— **273**, N 2.— P. 509—540.
3. *Britten D. J., Lemire F. W.* A classification of pointed A_n-modules // Lect. Notes Math.— 1982.— **933**.— P. 63—70.

Киев. ун-т Получено 30.03.88