УДК 517.948.34

В. А. Плотников, О. Г. Рудык

Об одной схеме усреднения в интегро-дифференциальных уравнениях

В работах [1, 2] обоснована третья схема усреднения для систем интегро-дифференциальных уравнений с медленными переменными на промежутке $[0, L/\sqrt{\varepsilon}]$, $L > 0$, L — const, ε — малый параметр. Согласно этой схеме системе

$$\dot{x} = \varepsilon X(t, x) + \varepsilon \int_0^t \Phi(t, s, x(s))\, ds \qquad (1)$$

ставится в соответствие усредненная система интегро-дифференциальных уравнений

$$\dot{\bar{x}} = \varepsilon \overline{X}(\bar{x}) + \varepsilon \int_0^t \overline{\Phi}(t, \bar{x}(s))\, ds, \qquad (2)$$

где

$$\overline{X}(x) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t, x)\, dt,$$

$$\overline{\Phi}(t, x) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \Phi(t, s, x)\, ds. \qquad (3)$$

Здесь $X(t, x)$, $\Phi(t, s, x)$ — вектор-функции, определенные при $t, s \geqslant 0$, $x \in D \subset R^n$.

Преимущество третьей схемы состоит в том, что метод усреднения не меняет качественную картину моделируемого процесса, так как усредненная система (2) остается интегро-дифференциальной.

В настоящей работе предлагаются новые варианты третьей схемы, позволяющие доказать близость решений исходной и усредненной систем на промежутке $[0, L/\varepsilon]$.

Схема 3а. Пусть существует функция $\Phi_1(t, x)$ такая, что

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt \int_0^t [\Phi(t, s, x) - \Phi_1(t, x)]\, ds = 0, \qquad (4)$$

Системе (1) поставим в соответствие систему

$$\dot{\xi} = \varepsilon \overline{X}(\xi) + \varepsilon \int_0^t \Phi_1(t, \xi(s))\, ds. \qquad (5)$$

Схема 3б. Вычислим $\Phi_2(t, x) = \frac{1}{t} \int_0^t \Phi(t, s, x)\, ds$, $t > 0$. Системе (1) поставим в соответствие систему

$$\dot{y} = \varepsilon \overline{X}(y) + \varepsilon \int_0^t \Phi_2(t, y(s))\, ds. \qquad (6)$$

Теорема. *Пусть $X(t, x)$, $\Phi(t, s, x)$ определены при $t, s \geqslant 0$, $x \in D \subset R^n$ и выполнены следующие условия:*

1) *$X(t, x)$, $\Phi(t, s, x)$ удовлетворяют условиям, обеспечивающим существование единственного абсолютно непрерывного решения $x(t)$ системы (1);*

2) *существуют суммируемые функции $K(t)$, $P(t, s)$, константы K_0 и P_0 такие, что $\| X(t, x) \| \leqslant K(t)$, $\| \Phi(t, s, x) \| \leqslant P(t, s)$ и на любом конечном отрезке $[t_1, t_2]$*

$$\int_{t_1}^{t_2} K(t)\, dt \leqslant K_0(t_2 - t_1), \quad \int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^t P(t, s)\, ds \leqslant P_0(t_2 - t_1);$$

3) существуют суммируемые функции $N(t)$, $M(t, s)$, *константы* N_0, M_0, M_1, *а также неубывающая функция* $\sigma(\omega)$, $\lim\limits_{\omega\to 0}\sigma(\omega) = 0$, *такие, что*

$$\| X(t, x_1) - X(t, x_2) \| \leqslant N(t)\,\sigma(\| x_1 - x_2 \|),$$
$$\| \Phi(t, s, x_1) - \Phi(t, s, x_2) \| \leqslant M(t, s)\, \| x_1 - x_2 \|,$$

и на любом конечном отрезке $[t_1, t_2]$

$$\int_{t_1}^{t_2} N(t)\,dt \leqslant N_0 (t_2 - t_1),$$

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^t M(t, s)\,ds \leqslant M_0 (t_2 - t_1), \quad \int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^t M(t, s)(t - s)\,ds \leqslant M_1 (t_2 - t_1);$$

4) *существует суммируемая функция* $\nu(t)$, *константы* λ, ν_0, ν_1 *такие, что*

$$\| \overline{X}(x_1) - \overline{X}(x_2) \| \leqslant \lambda \| x_1 - x_2 \|, \quad \| \Phi_1(t, x_1) - \Phi_1(t, x_2) \| \leqslant \nu(t)\, \| x_1 - x_2 \|$$

и на любом конечном отрезке $[t_1, t_2]$

$$\int_{t_1}^{t_2} t\nu(t)\,dt \leqslant \nu_0 (t_2 - t_1), \quad \int_{t_1}^{t_2} t^2 \nu(t)\,dt \leqslant \nu_1 (t_2 - t_1);$$

5) *равномерно относительно* $x \in D$ *существуют пределы* (3), (4);

6) *решение* $\xi(t)$ *усредненной системы* (5) ($x(0) = \xi(0)$) *определено при* $t \geqslant 0$ *и лежит в области* D *вместе со своей* ρ-*окрестностью.*

Тогда для любого сколь угодно малого $\eta > 0$ *и сколь угодно большого* $L > 0$ *можно указать* ε_0 *такое, что для всех* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *на отрезке* $0 \leqslant t \leqslant L\varepsilon^{-1}$ *выполняется неравенство* $\| x(t) - \xi(t) \| \leqslant \eta$.

Доказательство. Переходя в (1) и (5) к соответствующим интегральным уравнениям и учитывая условие 4 теоремы, получаем

$$\| x(t) - \xi(t) \| \leqslant \varepsilon\lambda \int_0^t \| x(\tau) - \xi(\tau) \|\,d\tau + \varepsilon \int_0^t d\tau \int_0^\tau \nu(\tau)\, \| x(s) - \xi(s) \|\,ds + \| \Psi(t, s) \|, \tag{7}$$

где

$$\Psi(t, s) = \varepsilon \int_0^t \left\{ [X(\tau, x(\tau)) - \overline{X}(x(\tau))] + \int_0^\tau [\Phi(\tau, s, x(s)) - \Phi_1(\tau, x(s))]\,ds \right\} d\tau.$$

Распространим интегрирование на весь промежуток длины $L\varepsilon^{-1}$, считая, что справа от t подынтегральное выражение равно 0. Разделим промежуток $[0, L\varepsilon^{-1}]$ на n равных частей. Тогда справедлива оценка $\| \Psi(t, s) \| \leqslant I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5$. Здесь

$$I_1 = \varepsilon \left\| \sum_{j=0}^{n-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} [X(\tau, x(\tau)) - X(\tau, x_j)]\,d\tau \right\|,$$

$$I_2 = \varepsilon \left\| \sum_{j=0}^{n-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} d\tau \int_0^\tau [\Phi(\tau, s, x(s)) - \Phi(\tau, s, x_j)]\,ds \right\|,$$

$$I_3 = \varepsilon \left\| \sum_{j=0}^{n-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} d\tau \int_0^\tau [\Phi_1(\tau, x_j) - \Phi_1(\tau, x(s))]\,ds \right\|,$$

$$I_4 = \varepsilon \left\| \sum_{j=0}^{n-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} [\overline{X}(x_j) - \overline{X}(x(\tau))]\,d\tau \right\|,$$

$$I_5 = \varepsilon \left\| \sum_{j=0}^{n-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \left\{ [X(\tau, x_j) - \overline{X}(x_j)] + \int_0^{\tau} [\Phi(\tau, s, x_j) - \Phi_1(\tau, x_j)]\, ds \right\} d\tau \right\|.$$

Из условий теоремы следует, что для любого $\eta > 0$ можно указать n и ε_1 такие, что для всех $\varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ будет справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^{4} I_k \leqslant LN_0\sigma\left(\frac{L}{n}(K_0 + P_0)\right) + L(K_0 + P_0)\left[\varepsilon M_1 + \frac{LM_0}{n} + \lambda\frac{L}{2n} + \right.$$

$$\left. + \varepsilon\frac{\nu_1}{2} + \frac{L\nu_0}{n}\right] \leqslant \frac{\eta}{2} e^{-L(\lambda+\nu_0)}. \qquad (8)$$

Зафиксируем n. В силу равномерной сходимости (3) и (4) существуют такие монотонно убывающие функции $f(t)$ и $\varphi(t)$, стремящиеся к 0 при $t \to \infty$, что во всей области D

$$\left\| \int_0^t [X(\tau, x) - \overline{X}(x)]\, d\tau \right\| \leqslant tf(t), \quad \left\| \int_0^t d\tau \int_0^{\tau} [\Phi(\tau, s, x) - \Phi_1(\tau, x)]\, ds \right\| \leqslant t\varphi(t).$$

Тогда $I_5 \leqslant 2n(F_1(\varepsilon) + F_2(\varepsilon))$, где $F_1(\varepsilon) = \sup\limits_{\tau\in[0,L]}\left[\tau f\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right)\right]$, $F_2(\varepsilon) = \sup\limits_{\tau\in[0,L]}\left[\tau\varphi\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right)\right]$, $\tau = \varepsilon t$. При фиксированном n функции $F_1(\varepsilon)$ и $F_2(\varepsilon)$ стремятся к 0 при $\varepsilon \to 0$. Следовательно, для $\eta > 0$ можно указать ε_2 такое, что для всех $\varepsilon \leqslant \varepsilon_2$ будет справедливо неравенство

$$I_5 \leqslant 2n(F_1(\varepsilon) + F_2(\varepsilon)) \leqslant \frac{\eta}{2} e^{-L(\lambda+\nu_0)}. \qquad (9)$$

Объединяя (8), (9) и выбирая ε_0 из условия $\varepsilon_0 = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, на основании леммы Гроноулла — Беллмана из (7) получаем искомую оценку: $\| x(t) - \xi(t) \| \leqslant \eta$.

Замечание. Аналогично формулируется и доказывается теорема о близости решений исходной (1) и усредненной (6) систем.

1. *Филатов А. Н.* Усреднение в системах интегральных и интегро-дифференциальных уравнений // Исслед. по аналит. механике.— Ташкент: Наука, 1965.— С. 135—178.
2. *Филатов А. Н.* Методы усреднения в дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнениях.— Ташкент: ФАН, 1971.— 280 с.

Одес. ун-т

Получено 11.12.86