УДК 519.21

С. Г. ТРИГУБ, асп. (Киев. ун-т)

О скорости сходимости некоторых случайных рядов в нормах пространств Орлича

Получены условия сходимости и оценки скорости сходимости в нормах пространств Орлича случайных рядов вида $R(\overline{t}) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(\overline{t})\,\xi_k$, где $f_k(\overline{t})$ — ортонормированная система собственных функций некоторого интегрального уравнения, ξ_k — случайные величины из пространства Орлича, $\overline{t} \in R^n$.

Одержані умови збіжності та оцінки швидкості збіжності у нормах просторів Орлича випадкових рядів вигляду $R(\overline{t}) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(\overline{t})\,\xi_k$, де $f_k(\overline{t})$ — ортонормована система власних функцій деякого інтегрального рівняння, ξ_k — випадкові величини з простору Орлича, $\overline{t} \in R^n$.

Пусть (Ω, F, P) — стандартное вероятностное пространство; $u(x) = \exp\{\varphi(x)\} - 1$ — некоторая N-функция Орлича; $L_u(\Omega)$ — пространство Орлича случайных величин, порожденное N-функцией $u(x)$; $L_u^{\mu}(Q)$ — функциональное пространство Орлича, порожденное функцией $u(x)$ и состоящее из функций, заданных на кубе $Q = [0, T]^n$. Рассмотрим случайный ряд вида

$$R(\overline{t}) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(\overline{t})\,\xi_k, \tag{1}$$

где ξ_k — случайные величины из пространства Орлича $L_u(\Omega)$; $f_k(\overline{t})$, $t = (t_1, \ldots, t_n) \in Q = [0, T]^n \subset R^n$ — ортонормированная система собственных функций некоторого интегрального уравнения.

В настоящей статье исследуются оценки скорости сходимости случайных рядов вида (1) в норме пространства Орлича $L_u^\mu(Q)$ для случаев 1) $\varphi(x)$ — функция Орлича; 2) $\varphi(x)$ не является функцией Орлича.

Замечание. В [1, 2] получены оценки скорости сходимости в пространствах Орлича для случайных процессов субгауссовского типа и субгауссовских процессов. Из этих оценок, вообще говоря, можно получить оценки скорости сходимости в случае 1. Однако метод, используемый в данной работе, позволяет их улучшить. Второй случай исследован ранее не был.

1. Будем использовать определения N-функции Орлича и пространств Орлича из работы [4]. N-функция $U(x)$ удовлетворяет условию E [4], если существуют такие постоянные $c>0$, $k>0$, $x_0>0$, что при $x\geqslant x_0$, $y\geqslant x_0$ выполняется неравенство

$$U(x)\,U(y)\leqslant cU(kxy). \tag{2}$$

N-функция удовлетворяет Δ'-условию [3], если существуют такие постоянные $c>0$, $x_0>0$, что при $x\geqslant x_0$, $y\geqslant x_0$ выполняется неравенство

$$U(xy)\leqslant cU(x)\,U(y). \tag{3}$$

Пусть μ — мера Лебега в R^n.

Рассмотрим интегральное уравнение

$$f(\overline{t})=\lambda\int_Q B(\overline{t},\overline{s})\,f(\overline{s})\,d\mu(\overline{s}), \tag{4}$$

где $B(\overline{t},\overline{s})$ — ковариационная функция случайного процесса $R(\overline{t})$. Предположим, что $B(\overline{t},\overline{s})$ непрерывна. Пусть $f_k(\overline{t})$ — ортонормированная система собственных функций уравнения (4), а λ_k — соответствующие собственные числа. Будем считать, что λ_k положительны и пронумерованы в порядке возрастания.

Сформулируем необходимое в дальнейшем неравенство Бернштейна между нормами в различных пространствах Орлича, доказанное в работе [5] в одномерном случае.

Лемма 1. *Пусть $U(x)$ и $V(x)$ — такие N-функции, что функции $U^{(-1)}(V(x))$, $U(\sqrt{x})$ и $V(\sqrt{x})$ выпуклы. Тогда для любой последовательности действительных чисел c_k, $k\geqslant 1$, справедливо неравенство*

$$\left\|\sum_{k=1}^{m}c_kf_k(\overline{t})\right\|_V\leqslant d_m\left\|\sum_{k=1}^{m}c_kf_k(\overline{t})\right\|_U, \tag{5}$$

где

$$d_m=\inf_{N\geqslant 1}\left[\left(1+\Delta(T/N)\sqrt{T^n}\lambda_n\right)U^{(-1)}(N/T)/V^{(-1)}(N/T)\right],$$

$$\Delta(h)=\sup_{|\overline{z}_1-\overline{z}_2|\leqslant h}\left(\int_Q\left[B(\overline{z}_1,\overline{s})-B(\overline{z}_2,\overline{s})\right]^2d\mu(\overline{s})\right)^{1/2},$$

$B(\overline{t},\overline{s})$ — T-периодическая по $\overline{t}$ и $\overline{s}$ функция, N — число точек разбиения каждого ребра n-мерного куба $[0,T]^n$.

Доказательство в n-мерном случае аналогично одномерному.

2. Пусть $u(x)=\exp\{\varphi(x)\}-1$ — некоторая N-функция Орлича, порождающая пространство Орлича случайных величин $L_u(\Omega)$ с нормой Люксембурга

$$\|\xi\|=\inf\left\{l>0:M\exp\varphi\left(\frac{x}{l}\right)<2\right\}$$

и функциональное пространство Орлича $L_u^\mu(Q)$, состоящее из функций, заданных на Q с нормой

$$\|\xi(t)\|_u=\inf\left\{l>0:\int_Q\exp\left\{\varphi\left(\frac{\xi(\overline{t})}{l}\right)\right\}d\mu(t)<2\right\}. \tag{6}$$

Обозначим $\|\xi(\overline{t})\|=\sigma(\overline{t})$. Докажем такую лемму.

Лемма 2. *Пусть случайный процесс* $\xi(\bar{t})$ *принадлежит пространству Орлича* $L_u(\Omega)$, $\sigma = \sup_{\bar{t}\in Q} \sigma(\bar{t})$, $\bar{t}\in Q = [0, T]^n$, $\varphi(x)$ — *N-функция Орлича, и для любых* $x\in R$, $y\in R$ *выполняется условие*

$$\varphi(xy) \leqslant r(x)\ \varphi(y), \tag{7}$$

где $r(x)$ — *некоторая выпуклая функция. Тогда с вероятностью единица* $\xi(\bar{t}) \in L_u^{\mu}(Q)$, *и справедлива оценка при любых* $x \neq 0$:

$$P\{\|\xi(\bar{t})\|_u > x\} \leqslant 2T^n \exp\{-\ln 2/r(\sigma/x)\}. \tag{8}$$

Доказательство. Используя неравенство Чебышева, неравенство $e^{ax} - 1 \leqslant a(e^x - 1)$, $0 \leqslant a \leqslant 1$, свойство (7), учитывая, что $\mu(Q) = T^n$, и полагая $p\ r(\sigma/x) \leqslant 1$, можно показать, что

$$P\{\|\xi(\bar{t})\|_u < x\} \leqslant (T^n/2^p)\ [pr(\sigma/x) + 1].$$

Выбирая $p = 1/r(\sigma/x)$, получаем (8). Лемма доказана.

Пример 1. В случае, когда $\varphi(x) = |x|^{\alpha}$, $\alpha > 1$, условие (7) превращается в Δ'-условие при $c = 1$.

Прежде чем перейти к формулировке и доказательству теоремы, введем следующие обозначения. Пусть $R(\bar{t})$ — случайный процесс из пространства Орлича, представимый в виде ряда (1). Обозначим

$$R_m^n(\bar{t}) = \sum_{k=m}^{n} f_k(\bar{t})\ \xi_k, \qquad R_m^{\infty}(\bar{t}) = \sum_{k=m}^{\infty} f_k(\bar{t})\ \xi_k,$$

$$R_m^n(a, \bar{t}) = \sum_{k=m}^{n} f_k(\bar{t})\ a_k\xi_k,$$

где $a = \{a_k,\ k = \overline{0, \infty}\}$ — числовая последовательность.

Обозначим $\tilde{u}(y) = \ln 2/r(1/y)$, $y \in R$. Пусть $u^*(y)$ — дополнительная функция к $u(y)$.

Теорема 1. *Пусть* $u_2(x)$ — *N-функция Орлича такая, что* $u(x)$ *подчинена* $u_2(x)$. *Если существует N-функция* $u_1(x)$ $(u_1(x) \backsim u_2(x))$ *такая, что функции* $u_1(\sqrt{x})$ *и* $K(x) = u^{(-1)}(u(x)) = \varphi^{(-1)}(\ln(u_1(x) + 1))$ *выпуклы, где функция* $\varphi(x)$ *удовлетворяет условию* (7), *существует монотонно неубывающая последовательность* $a = \{a_k,\ k \geqslant 1\}$, $a_k > 0$, $a_k \to \infty$, $k \to \infty$, *для которой выполняется условие*

$$\sum_{k=1}^{\infty} d_k b_k \sigma_1^k < \infty, \tag{9}$$

где

$$\sigma_m^k = \sup_{\bar{t}\in Q} \|R_m^k(\bar{t})\|,$$

$$b_k = \begin{cases} \dfrac{1}{a_k} - \dfrac{1}{a_{k+1}}, & k = \overline{m, n-1}, \\ \dfrac{1}{a_n}, & k = n, \end{cases}$$

$$d_n = \inf_{N\geqslant 1} [(1 + \Delta(T/N)\ \sqrt{T^n}\lambda_n)\ \varphi^{(-1)}(\ln(N/T + 1))\, u_1^{(-1)}(N/T)],$$

а также для любого $y \in R$ *функция* $\tilde{u}(y)$ *является N-функцией Орлича, то ряд* (1) *сходится по вероятности в норме пространства* $L_{u_2}^{\mu}(Q)$, *случайный процесс* $R(\bar{t})$ *с вероятностью* 1 *принадлежит* $L_{u_2}^{\mu}(Q)$, *и справедливо неравенство при*

$$z > \max\Big[\sum_{k=m}^{\infty} d_k b_k \sigma_m^k / r^{(-1)}(\ln 2),\quad p\,(\tilde{u}^{*(-1)}(1) \sum_{k=m}^{n} d_k b_k \sigma_m^k\Big]:$$

$$P\left\{\|R_m^\infty(\bar{t})\|_{u_1} > z\sum_{k=m}^{\infty} d_k b_k \sigma_m^k\right\} \leqslant 2T^n c c_u e^2 \tilde{u}(z)\, \tilde{u}^*(p^{(-1)}(z)) \exp\{-\tilde{u}(z)\}. \quad (10)$$

Если случайные величины ξ_k *независимы, то ряд* (1) *сходится с вероятностью* 1 *в норме пространства* $L_{u_2}^{\mu}(Q)$.

Доказательство. Имеет место преобразование Абеля

$$R_m^n(\bar{t}) = \sum_{k=m}^{n-1}\left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}}\right) R_m^k(\bar{t}) + \frac{1}{a_n} R_m^n(\bar{t}) = \sum_{k=m}^{n} b_k R_m^k(a, \bar{t}). \quad (11)$$

Тогда

$$M\exp\{\lambda\|R_m^n(\bar{t})\|_{u_1}\} \leqslant M\exp\left\{\lambda\sum_{k=m}^{n} b_k\|R_m^k(a, \bar{t})\|_{u_1}\right\}.$$

Из неравенства Гельдера для $\{\alpha_k\}$ таких, что $\sum_{k=m}^{n}\alpha_k^{-1} \leqslant 1$ следует

$$M\exp\{\lambda\|R_m^n(\bar{t})\|_{u_1}\} \leqslant \prod_{k=m}^{n}[M(\exp\{\lambda b_k\|R_m^k(a, \bar{t})\|_{u_1}\})^{\alpha_k}]^{1/\alpha_k}.$$

Из неравенства Бернштейна (5) получаем

$$M\exp\{\lambda\|R_m^k(a, \bar{t})\|_{u_1}\} \leqslant M\exp\{\lambda d_k\|R_m^k(a, \bar{t})\|_u\}.$$

Пусть $F_m^k(x)$ — функция распределения $\|R_m^k(a, \bar{t})\|_u$. Тогда, используя лемму 2, преобразование Юнга — Фенхеля, для $\delta: 0 < \delta < 1$ можно показать, что

$$M\exp\{\lambda d_k\|R_m^k(a, \bar{t})\|_u\} \leqslant 1 + 2T^n\lambda d_k\int_0^\infty \exp\left\{\lambda d_k x - (1-\delta)\,\tilde{u}\left(\frac{x}{\sigma}\right)\right\} \times$$

$$\times \exp\left\{-\delta\tilde{u}\left(\frac{x}{\sigma}\right)\right\} dx.$$

Из преобразования Юнга — Фенхеля получаем

$$M\exp\{\lambda d_k\|R_m^k(a, \bar{t})\|_u\} \leqslant 1 + 2T^n\lambda d_k \exp\left\{(1-\delta)\,\tilde{u}^*\left(\frac{\lambda d_k\sigma}{1-\delta}\right)\right\}\frac{\sigma}{\delta}\, c,$$

где

$$c = \int_0^\infty \exp\left\{-\tilde{u}\left(\frac{x}{\sigma}\,\delta\right)\right\} dx.$$

Положим $2T^n c/\delta \geqslant 1$. Тогда, используя свойства $\tilde{u}^*(x)$-функции Орлича и неравенство

$$1 + \frac{\lambda d_k\varepsilon\sigma}{1-\delta} \leqslant c_u\exp\left\{\tilde{u}^*\left(\frac{\lambda\sigma d_k}{1-\delta}\,\varepsilon\right)\right\},$$

где $0 < \varepsilon < 1$, а c_u — некоторая постоянная, имеем

$$M\exp\{\lambda d_k\|R_m^k(a, \bar{t})\|_u\} \leqslant \frac{2T^n(1-\delta)}{\varepsilon\delta}\, c\, c_u \exp\left\{(1-\delta+\varepsilon)\,\tilde{u}^*\frac{\lambda\sigma d_k}{1-\delta}\right)\right\}.$$

Тогда из неравенства Гельдера, положив $(1-\delta)c_u/\varepsilon \geqslant 1$, получаем

$$M\exp\{\lambda\|R_m^n(\bar{t})\|_{u_1}\} \leqslant \frac{2T^n(1-\delta)\, c\, c_u}{\varepsilon\delta} \times$$

$$\times \exp\left\{(1-\delta+\varepsilon)\sum_{k=m}^{n}\tilde{u}^*\left(\frac{\lambda d_k b_k\alpha_k\sigma_m^k}{1-\delta}\right)/\alpha_k\right\}.$$

Обозначим $R_k = \lambda d_k b_k \sigma_m^k/(1-\delta)$. Выберем $\alpha_k = \left(\sum_{k=m}^{n} R_k\right)/R_k$. Это можно сделать, так как при таком выборе $\sum_{k=m}^{n} \alpha_k^{-1} = 1$. Тогда получим

$$M \exp\{\lambda \| R_m^n(t)\|_{u_1}\} \leqslant \frac{2T^n(1-\delta)cc_u}{\varepsilon\delta} \times$$
$$\times \exp\left\{(1-\delta+\varepsilon)\widetilde{u}^*\left(\sum_{k=m}^{n} \lambda d_k b_k \sigma_m^k/(1-\delta)\right)\right\}.$$

Выберем $\varepsilon = 1/\widetilde{u}^*\left(\sum_{k=m}^{n} \lambda d_k b_k \sigma_m^k/(1-\delta)\right)$. Тогда

$$M \exp\{\lambda \| R_m^n(\bar{t})\|_{u_1}\} \leqslant 2T^n(1-\delta)\frac{1}{\delta}cc_u e\widetilde{u}^*\left(\sum_{k=m}^{n} \frac{\lambda d_k b_k \sigma_m^k}{1-\delta}\right) \times$$
$$\times \exp\left\{(1-\delta)\widetilde{u}^*\left(\sum_{k=m}^{n} \frac{\lambda d_k b_k \sigma_m^k}{1-\delta}\right)\right\}.$$

С помощью неравенства Чебышева находим

$$P\{\| R_m^n(\bar{t})\|_{u_1} > z\} \leqslant 2T^n cc_u e(1-\delta)\frac{1}{\delta}\widetilde{u}^*\left(\sum_{k=m}^{n} \frac{\lambda d_k b_k \sigma_m^k}{1-\delta}\right) \times$$
$$\times \exp\left\{-\lambda z + (1-\delta)\widetilde{u}^*\left(\sum_{k=m}^{n} \frac{\lambda d_k b_k \sigma_m^k}{1-\delta}\right)\right\}.$$

Положим теперь

$$\delta = 1/\widetilde{u}\left(\frac{z}{\sum_{k=m}^{n} d_k b_k \sigma_m^k}\right).$$

Так как $\delta < 1$, то отсюда получим условия для z: $z > \left(\sum_{k=m}^{n} d_k b_k \sigma_m^k\right)/r^{(-1)}(\ln 2)$.

Обозначим $D = \sum_{k=m}^{n} d_k b_k \sigma_m^k$. При таком выборе δ имеем

$$\exp\left\{-\lambda z + (1-\delta)\widetilde{u}^*\left(\frac{\lambda D}{1-\delta}\right)\right\} \leqslant e \exp\left\{-\widetilde{u}\left(z/\sum_{k=m}^{n} d_k b_k \sigma_m^k\right)\right\}.$$

Теперь для функции $\widetilde{u}^*\left(\sum_{k=m}^{n} \lambda d_k b_k \sigma_m^k/(1-\delta)\right) = \widetilde{u}^*\left(\frac{\lambda D}{1-\delta}\right)$ найдем минимум по $\frac{\lambda D}{1-\delta}$. Он достигается при

$$\lambda = \frac{1}{\sum_{k=m}^{n} d_k b_k \sigma_m^k}\left(1 - \frac{1}{\widetilde{u}\left(z/\sum_{k=m}^{n} d_k b_k \sigma_m^k\right)}\right) p^{(-1)}\left(\frac{z}{\sum_{k=m}^{n} d_k b_k \sigma_m^k}\right),$$

где

$$\widetilde{u}^*(y) = \int_0^y p(u)\,du.$$

Кроме того, из условия $\varepsilon < 1$ получаем, что $\lambda > \widetilde{u}^{*(-1)}(1)(1-\delta)/D$, и, сопоставив с полученным значением λ, найдем условие

$$z > p\,(\widetilde{u}^{*(-1)}(1)) \sum_{k=m}^{n} d_k b_k \sigma_m^k.$$

Таким образом,

$$z > \max\left[\sum_{k=m}^{n} d_k b_k \sigma_m^k / r^{(-1)}(\ln 2),\quad p\,(\widetilde{u}^{*(-1)}(1) \sum_{k=m}^{n} d_k b_k \sigma_m^k\right].$$

Тогда окончательно получаем

$$P\left\{\| R_m^n(\bar{t})\|_{u_1} > z \sum_{k=m}^{n} d_k b_k \sigma_m^k\right\} \leqslant 2T^n c\, c_u e^2 \widetilde{u}(z)\, \widetilde{u}^*(p^{(-1)}(z)) \exp\{-\widetilde{u}(z)\}. \quad (12)$$

Устремляя в (12) n к бесконечности, получаем неравенство (10). Отсюда в силу эквивалентности функций $u_1(x)$ и $u_2(x)$ придем к утверждению теоремы о принадлежности $R(\bar{t})$ пространству $L_{u_2}^{\mu}(Q)$. Неравенство (12) обеспечивает сходимость по вероятности ряда (1) в норме $L_{u_2}^{\mu}(Q)$ (так как для любого $\varepsilon > 0$: $P\{\| R_m^{\infty}(\bar{t})\|_{u_1} > \varepsilon\} \to 0$ при $m \to \infty$). Учитывая то, что у рядов из независимых случайных элементов со значениями в сепарабельных банаховых пространствах сходимости по вероятности и с вероятностью 1 эквивалентны [6], и то, что все функции $R(\bar{t})$ принадлежат сепарабельному подпространству $L_{u_2}^{\mu}(Q)$, порожденному функциями $f_k(\bar{t})$ [5], придем к утверждению о сходимости ряда (1) с вероятностью 1 в норме пространства $L_{u_2}^{\mu}(Q)$. Теорема доказана.

3. Перейдем теперь к рассмотрению случая, когда $\varphi(x)$ не является функцией Орлича. Докажем следующую лемму.

Лемма 3. *Пусть случайный процесс $\xi(\bar{t})$ принадлежит пространству Орлича $L_u(\Omega)$, $\sigma = \sup_{t \in Q} \sigma(\bar{t})$, $\varphi(x)$ при $|x| > x_0 > 0$ — монотонно неубывающая вогнутая функция, и для любых $x \in R$, $y \in R$ выполняется условие*

$$\varphi(xy) \geqslant \psi(x)\,\varphi(y), \quad (13)$$

где $\psi(x)$ — некоторая монотонно неубывающая вогнутая функция. Тогда при любой последовательности $\{c_k,\ k \geqslant 1\}$, $c_k > 0$, такой, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k/k! < \infty \quad (14)$$

справедливо неравенство

$$M \exp\left\{\left(\varphi \frac{\|\xi(\bar{t})\|_u}{\sigma}\right) s\right\} \leqslant A(c_k), \quad (15)$$

где $A(c_k) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k/k!$, $0 < s < 1$.

Доказательство. Рассмотрим в пространстве $L_u^{\mu}(Q)$ норму, эквивалентную норме (6)

$$\|\xi(\bar{t})\|_u = \inf_{l>0}\left\{\frac{1}{l}\int_Q \exp\varphi(\xi(\bar{t})\,l)\,d\mu(\bar{t})\right\}.$$

Используя условие (13), легко показать, что

$$M\,\|\xi(\bar{t})\|_u^n \leqslant \inf_{l>0}\left\{\frac{1}{l^n}\int_Q M\exp\{\varphi(\psi^{(-1)}(n)\,\xi(\bar{t})\,l)\}\,d\mu(\bar{t})\right\}.$$

Выберем l так, чтобы $\psi^{(-1)}(n)\,l = 1/\sigma$. Тогда

$$M\,\|\xi(\overline{t})\|_u^n \leqslant 2T^n\sigma^n(\psi^{(-1)}(n))^n.$$

Аналогично тому, как это сделано в работе [7], обозначим

$$\gamma_k(x) = [\varphi(x^{1/k})]^k, \qquad k \geqslant 1.$$

Для некоторого s, $0 < s < 1$, найдем

$$M\exp\left\{\varphi\left(\frac{\|\xi(\overline{t})\|_u}{\sigma}\right)s\right\} \leqslant 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k\left(2T^k(\psi^{(-1)}(k))^k\right)s^k/k!.$$

Положим

$$s = \inf_{k\geqslant 1}\frac{c_k^{1/k}}{\varphi(2^{1/k}T\varphi^{(-1)}(k))}. \tag{16}$$

Тогда

$$M\exp\left\{\varphi\left(\frac{\|\xi(\overline{t})\|_u}{\sigma}\right)s\right\} \leqslant 1 + \sum_{k=1}^{\infty}c_k/k! = A(c_k).$$

Лемма доказана.

Пример 2. В случае, когда $\varphi(x) = |x|^\alpha$, $0 < \alpha < 1$, условие (13) превращается в условие E при $c = 1$, $k = 1$.

Теорема 2. *Пусть $u_2(x)$ — N-функция такая, что $u(x)$ подчинена $u_2(x)$. Если существует N-функция $u_1(x)$ $(u_1(x) \sim u_2(x))$ такая, что функции $u_1(\sqrt{x})$ и $K_1(x) = u^{(-1)}(u_1(x)) = \varphi^{(-1)}(\ln(u_1(x)+1))$ выпуклы, функция $\varphi(x)$ удовлетворяет условию (13), существует монотонно неубывающая последовательность $a = \{a_k,\ k \geqslant 1\}$, $a_k > 0$, $a_k \to \infty$, $k \to \infty$, для которой выполняется условие (10), то для любой последовательности $\{c_k,\ k \geqslant 1\}$, $c_k > 0$, удовлетворяющей условию (14), ряд (1) сходится по вероятности в норме пространства $L_{u_2}^{\mu}(Q)$, случайный процесс $R(\overline{t})$ с вероятностью 1 принадлежит $L_{u_2}^{\mu}(Q)$ и справедливо неравенство*

$$P\left\{\|R_m^{\infty}(\overline{t})\|_{u_1} > z\sum_{k=m}^{\infty}d_kb_k\sigma_m^k\right\} \leqslant A(c_k)\exp\{-\varphi(z)s\}, \tag{17}$$

где s определяется из (16). Если ξ_k — независимые случайные величины, то ряд (1) сходится с вероятностью 1 в норме пространства $L_{u_2}^{\mu}(Q)$.

Доказательство. Используя преобразование Абеля (11), неравенство Бернштейна (5), получаем

$$M\exp\left\{\varphi\left(\frac{\|R_m^n(\overline{t})\|_{u_1}}{r}\right)s\right\} \leqslant M\exp\left\{\varphi\left(\sum_{k=m}^{n}\frac{\|R_m^k(a,\overline{t})\|_u}{\sigma_m^k}\,\frac{\sigma_m^k d_k b_k}{r}\right)s\right\}.$$

Выберем $r = \sum_{k=m}^{n}d_kb_k\sigma_m^k$, тогда $\sum_{k=m}^{n}\sigma_m^kd_kb_k/r = 1$. Воспользуемся неравенством Иенсена и леммой 3. Тогда

$$M\exp\left\{\varphi\left(\frac{\|R_m^n(\overline{t})\|_{u_1}}{r}\right)s\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=m}^{n}\frac{\sigma_m^kd_kb_k}{r}\,M\exp\left\{\varphi\left(\frac{\|R_m^k(a,\overline{t})\|_u}{\sigma_m^k}\right)s\right\} \leqslant A(c_k).$$

Следовательно,

$$P\left\{\|R_m^n(\overline{t})\|_{u_1} > z\sum_{k=m}^{n}d_kb_k\sigma_m^k\right\} \leqslant A(c_k)\exp\{-\varphi(z)s\}.$$

Устремляя n к бесконечности в последнем неравенстве, получаем (17). Повторяя рассуждения из доказательства теоремы 1, завершаем доказательство теоремы.

1. *Рязанцева В. В.* О сходимости тригонометрических случайных рядов в нормах пространства Орлича // Укр. мат. журн.— 1989.— **41**, № 8.— С. 1088—1094.
2. *Зелепугина И. Н., Рязанцева В. В.* О скорости сходимости некоторых субгауссовских случайных рядов в нормах пространств Орлича // Теория вероятностей и мат. статистика.— 1989.— Вып. 40.— С. 28—36.
3. *Красносельский М. А., Рутицкий Я. В.* Выпуклые функции и пространства Орлича.— М. : Физматгиз, 1958.— 271 с.
4. *Козаченко Ю. В.* О равномерной сходимости стохастических интегралов в норме пространства Орлича // Теория вероятностей и мат. статистика.— 1984.— Вып. 29.— С. 52—64.

Получено 18.06,90