УДК 519.21

**В. В. БУЛДЫГИН,** д-р физ.-мат. наук (Киев. политехн. ин-т),
**В. В. ЗАЯЦ,** канд. физ.-мат. наук (Ин-т математики АН УССР, Киев)

# Теоремы сравнения и асимптотическое поведение корреляционных оценок в пространствах непрерывных функций. II

Статья является второй частью работы [12]. С помощью теорем сравнения, доказанных в первой части, устанавливается асимптотическая нормальность оценки в схеме серий по многим выборкам корреляционной функции стационарного гауссовского случайного простоцесса в пространствах непрерывных функций с весом. Указан способ построения функциональных надійних интервалов для неизвестной корреляционной функции в этих пространствах.

Стаття є другою частиною роботи [12]. За допомогою теорем порівняння, доведених у першій частині, встановлюється асимптотична нормальність оцінки у схемі серій за багатьма вибірками кореляційної функції стаціонарного гауссівського випадкового процесу в просторах неперервних функцій із вагою. Вказано спосіб побудови функціональних надійних інтервалів для невідомої кореляційної функції в цих просторах.

В настоящей работе продолжена нумерация формул и ссылок, начатая в [12].

6. Асимптотическая нормальность оценок корреляционных функций в пространствах непрерывных функций с весом. Применим результаты, полученные в первой части работы, к одномерному случаю задачи, сформулированной в п. 2. Именно, пусть $X(t)$, $t \geqslant 0$,— стационарный гауссовский центрированный случайный процесс, непрерывный почти наверное (п. н.) с неизвестной корреляционной функцией (к. ф.) $B(h) = EX(t)X(t+h)$, $h \geqslant 0$. Обозначим $\sigma^2 = EX^2(t)$, $t \geqslant 0$. Пусть $\{X_k(t)\ t \geqslant 0\}$, $k = 1, 2, \ldots$, — последовательность независимых копий процесса $X(t)$, $t \geqslant 0$. Оценка к. ф. $\widehat{B}_n$, задаваемая соотношением (1), принимает в этом случае такой вид:

$$\widehat{B}_n(h) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{T_n}\int_0^{T_n} X_k(t)\,X_k(t+h)\,dt,\ h \geqslant 0, \tag{21}$$

где $T_n \geqslant T_0 > 0$, $n = 1, 2, \ldots$, $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = +\infty$. Изучим асимптотические свойства оценки (21) в пространстве $C_0(q)$ непрерывных функций $\varphi: [0, +\infty) \to R$ таких, что $\lim\limits_{u\to+\infty} q(u)\varphi(u) = 0$. Функция $q$ предполагается строго положительной и непрерывной на $[0, +\infty)$. Пространство $C_0(q)$ является банаховым относительно нормы $\|\varphi\|_{C_0(q)} = \sup\limits_{u\geqslant 0} q(u)|\varphi(u)|$. Процессы (2) для оценки (21) имеют вид

$$Y_n(h) = \sqrt{nT_n}\,(\widehat{B}_n(h) - B(h)),\ h \geqslant 0. \tag{22}$$

Если к. ф. интегрируема с квадратом по мере Лебега на прямой ($B \in L_2[0, +\infty)$), то конечномерные распределения случайных процессов (с. п.) $Y_n$ сходятся при $n \to +\infty$ к конечномерным распределениям центрированного гауссовского с. п. $Y$ с к. ф.

$$\rho(h_1, h_2) = \int_{-\infty}^{+\infty}[B(u)\,B(u + h_2 - h_1) + B(u + h_2)\,B(u - h_1)]\,du =$$
$$= 4\pi\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(\lambda)\cos\lambda h_1 \cos\lambda h_2\, d\lambda. \tag{23}$$

В формуле (23) $B(-h) = B(h)$, $h \geqslant 0$, $f(\lambda)$, $\lambda \in R$, — спектральная плотность с. п. $X$.

Приведем сначала один вспомогательный результат.

Лемма 5. *Пусть с. п. $X$ удовлетворяет при некотором $\delta \in (0, 2]$ условию*

$$B(h) = \sigma^2 - K\sigma^2 |h|^\delta + o(|h|^\delta), \ h \to 0, \tag{24}$$

*где $K > 0$ — некоторая константа. Пусть, кроме того, спектральная плотность $f$ процесса $X$ ограничена: $\sup_{\lambda \in R} f(\lambda) = C < +\infty$. Тогда для предельного с. п. $Y$ справедливо соотношение*

$$P\left\{\lim_{T \to +\infty} \sup \frac{S(T) - (8\pi C\sigma^2 \ln T)^{1/2}}{\ln \ln T} (8\pi C\sigma^2 \ln T)^{1/2} \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{\delta}\right\} = 1, \tag{25}$$

*где* $S(T) = \sup_{t \in [0, T]} |Y(t)|$.

Доказательство вытекает из леммы 2, соотношения (14) и теоремы 2.

Замечания. 1. Для выполнения условия (24) достаточно конечности спектрального момента

$$\omega_\delta = \int_{-\infty}^{+\infty} |\lambda|^\delta f(\lambda)\, d\lambda < +\infty. \tag{26}$$

2. В силу леммы 3 имеем $Y(h) \in C_0(q)$ п. н., если непрерывная положительная функция $q$ удовлетворяет соотношению

$$q(h) = o((\ln h)^{-1/2}), \ h \to +\infty, \tag{27}$$

и выполнены условия леммы 4.

Обозначим через $Q_2$ множество функций $q : [0, +\infty) \to (0, +\infty)$, удовлетворяющих условиям: 1) $q$ — непрерывная монотонно невозрастающая функция при $t \geqslant 0$; 2) для любого $T > 0$ существует число $0 < K(T) < +\infty$ такое, что

$$\lim_{t \to +\infty} q(t)/q(T + t) = K(t); \tag{28}$$

$$3) \int_0^{+\infty} q(t)\, dt < +\infty; \tag{29}$$

4) для любого $t > 0$ существует производная $q'(t)$, причем $\sup_{t > 0} |q'(t)| \leqslant \tilde{K} < +\infty$.

Основным результатом настоящей работы является следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть процесс $X$ имеет конечный спектральный момент $\omega_\delta$ при некотором $\delta > 1$, а спектральная плотность $f$ процесса $X$ ограничена. Тогда для любой функции $q \in Q_2$ с. п. $Y$, $Y_n$, $n = 1, 2, \ldots$, являются случайными элементами* (с. э.) *пространства $C_0(q)$, и $Y_n$ слабо сходятся при $n \to +\infty$ в пространстве $C_0(q)$ к с. э. $Y$.*

Доказательство. В силу условий 1 и 3 на класс $Q_2$ соотношение (27) выполнено, поэтому, принимая во внимание замечание 2 к лемме 5 и сепарабельность пространства $C_0(q)$, получаем, что $Y$ является с. э. пространства $C_0(q)$. Для того чтобы убедиться, что $Y_n$ также являются с. э. $C_0(q)$, достаточно показать, что при фиксированном $T > 0$ с вероятностью 1

$$\lim_{h \to +\infty} q(h) \left| \int_0^T X(t) X(t + h)\, dt \right| = 0. \tag{30}$$

Поскольку в условиях теоремы имеем цепочку неравенств

$$\lim_{h\to+\infty} q(h)\left|\int_0^T X(t)\,X(t+h)\,dt\right| \leqslant \int_0^T |X(t)|\,dt\cdot \lim_{h\to+\infty} q(h)\cdot \sup_{t\in[0,T]} |X(t+h)| \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^T |X(t)|\,dt \lim_{h\to+\infty} q(h)\cdot \sup_{t\in[0,T+h]} |X(t)| \leqslant \int_0^T |X(t)|\,dt\cdot \lim_{h\to+\infty} q(h)/q(T+h) \times$$

$$\times \lim_{h\to+\infty} q(T+h) \sup_{t\in[0,T+h]} |X(t)|,$$

то в силу соотношений (28), (29), конечности $T$ и непрерывности с вероятностью 1 процесса $X(t)$, $t\geqslant 0$, получаем, что соотношение (30) выполнено с вероятностью 1.

Для дальнейшего доказательства воспользуемся следующим результатом, который вытекает из леммы 1 работы [13].

Лемма 6. *Пусть $Z(h)$, $Z_n(h)$, $n=1, 2, \ldots$, $h\geqslant 0$ — непрерывные почти наверное (п. н.) с. п., причем $P\{Z(\cdot)\in C_0(q)\}=1$. Предположим, что конечномерные распределения с. п. $Z_n(h)$, $h\geqslant 0$, сходятся при $n\to+\infty$ к конечномерным распределениям с. п. $Z(h)$, $h\geqslant 0$, и выполнены следующие условия*:

$$1)\ \lim_{a\to+\infty}\sup_n P\{q(0)\,|Z_n(0)|>a\}=0; \tag{31}$$

2) *существуют $\alpha>0$, $\beta>0$, $H>0$ такие, что для всех $t, s\geqslant 0$*

$$\sup_n E\,|q(t)\,Z_n(t)-q(s)\,Z_n(s)|^{\alpha}\leqslant H\,|t-s|^{1+\beta}; \tag{32}$$

3) *для любого $\varepsilon>0$*

$$\lim_{U\to+\infty}\sup_n P\{\sup_{h\geqslant U} q(h)\,|Z_n(h)|\geqslant\varepsilon\}=0. \tag{33}$$

*Тогда с. э. $Z_n$, $n=1, 2, \ldots$, слабо сходятся при $n\to+\infty$ в пространстве $C_0(q)$ к с. э. $Z$.*

Продолжим доказательство теоремы. Проверим выполнение условий леммы 6 для процессов $Y_n(h)$, $n=1, 2, \ldots$, $Y(h)$, $h\geqslant 0$. Поскольку из условий теоремы вытекает, что $B\in L_2[0, +\infty)$, то конечномерные распределения с. п. $Y_n$ сходятся при $n\to+\infty$ к конечномерным распределениям с. п. $Y$. Далее, в силу неравенства Чебышева

$$P\{q(0)\,|Y_n(0)|>a\}\leqslant \frac{q^2(0)\,\sigma_n^2(0)}{a^2}\leqslant \frac{q^2(0)\,d^2}{a^2}\xrightarrow[a\to+\infty]{} 0,$$

где $\sigma_n^2(h)=EY_n^2(h)$, $d^2=EY^2(0)=2\int_{-\infty}^{+\infty} B^2(u)\,du$, т. е. соотношение (31) выполнено. В силу леммы 4

$$E\,|q(t)\,Y_n(t)-q(s)\,Y_n(s)|^2\leqslant 2q^2(t)\,E\,|Y_n(t)-Y_n(s)|^2+$$

$$+2\sigma_n^2(s)\,(q(t)-q(s))^2\leqslant 2q^2(0)\,4\pi CE\,|X(t)-X(s)|^2+$$

$$+2q^2(0)\,K_2T_n^{-1/2}\,|t-s|^{3/2}+2d^2\,(\sup_{t>0}|q'(t)|)^2\,|t-s|^2\leqslant$$

$$\leqslant 2q^2(0)\,K_1\,|t-s|^{\delta}+2q^2(0)\,K_2T_0^{-1/2}\,|t-s|^{3/2}+2d^2\widetilde{K}^2\,|t-s|^2,$$

где

$$K_1=2^{4-\delta}\pi C\omega_\delta,\quad K_2=16\,\pi^{1/2}C\omega_1,\quad T_0=\inf_n T_n. \tag{34}$$

Следовательно, при $|t-s|\leqslant 1$

$$E\,|q(t)\,Y_n(t)-q(s)\,Y_n(s)|^2\leqslant H\,|t-s|^{\delta},$$

где

$$H=2K_1q^2(0)+2K_2q^2(0)\,T_0^{-1/2}+2d^2\widetilde{K}^2. \tag{35}$$

Таким образом, условие (32) выполнено в силу того, что $\delta>1$.

Чтобы убедиться в выполнении условия (33), заметим, что при любом $U > 0$, $n = 1, 2, \ldots$

$$E \sup_{h \geqslant U} q(h) |Y_n(h)| \leqslant E \left\{ \sum_{k=[U]}^{+\infty} \sup_{h \in [k, k+1]} q(h) |Y_n(h)| \right\} =$$

$$= \sum_{k=[U]}^{+\infty} E \sup_{h \in [k, k+1]} q(h) |Y_n(h)| \leqslant \sum_{k=[U]}^{+\infty} q(k) E \sup_{h \in [k, k+1]} |Y_n(h)| \tag{36}$$

($[U]$ обозначает целую часть числа $U$). Далее,

$$E \sup_{h \in [k, k+1]} |Y_n(h)| \leqslant E |Y_n(k)| + E \sup_{h \in [k, k+1]} ||Y_n(h) - Y_n(k)| \leqslant$$

$$\leqslant \sigma_n(k) + E \sup_{t, s \in [k, k+1]} |Y_n(t) - Y_n(s)|.$$

В силу теоремы 4.1 работы [14]

$$E \sup_{t, s \in [k, k+1]} |Y_n(t) - Y_n(s)| \leqslant 2 \sum_{n=0}^{+\infty} (2^n \sigma_{(n,k)}^{(2)} (2^{-n}))^{1/2}, \tag{37}$$

где $\sigma_{(n,k)}^{(2)}(h) = \sup_{t, t+h \in [k, k+1]} E |Y_n(t+h) - Y_n(t)|^2$.

По лемме 4 $\sigma_{(n,k)}^{(2)}(h) \leqslant K_3 |h|^\delta$, где $K_3 = K_1 + K_2 T_0^{-1/2}$. Оценивая с помощью этого неравенства правую часть соотношения (37), получаем

$$E \sup_{t, s \in [k, k+1]} |Y_n(t) - Y_n(s)| \leqslant 2K_3^{1/2}/(1 - 2^{(1-\delta)/2}).$$

Тогда

$$E \sup_{h \in [k, k+1]} |Y_n(h)| \leqslant \sigma_n(k) + 2K_3^{1/2}/(1 - 2^{(1-\delta)/2}) \leqslant$$

$$\leqslant d + 2K_3^{1/2}/(1 - 2^{(1-\delta)/2}) = K_4,$$

и из неравенства (36) для любого $n = 1, 2, \ldots$ имеем

$$E \sup_{h \geqslant U} q(h) |Y_n(h)| \leqslant K_4 \sum_{k=[U]}^{+\infty} q(k).$$

Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ в силу неравенства Чебышева и соотношения (29)

$$\sup_n P \{ \sup_{h \geqslant U} q(h) |Y_n(h)| \geqslant \varepsilon \} \leqslant K_4 \varepsilon^{-1} \sum_{k=[U]}^{+\infty} q(k) \xrightarrow[U \to +\infty]{} 0.$$

Применение леммы 6 завершает доказательство теоремы.

Покажем, как с помощью теоремы 3 можно строить функциональные доверительные интервалы для неизвестной к. ф. $B$. Неравенства сравнения (12) и (15) позволяют получать оценки распределений хвостов

$$P \{ \| Y \|_{C_0(q)} > x \} \leqslant G(x), \tag{38}$$

где $q \in Q_2$, а $G(x)$ — экспоненциально убывающая с ростом $x$ функция (см., например, [15]). Тогда для любого $H > 0$ в силу того, что функция $q$ монотонно невозрастает,

$$\sup_{h \geqslant 0} q(h) |Y_n(h)| = \sup_{h \geqslant 0} q(h) (nT_n)^{1/2} |\hat{B}_n(h) - B(h)| \geqslant$$

$$\geqslant \sup_{h \in [0, H]} q(h) (nT_n)^{1/2} |\hat{B}_n(h) - B(h)| \geqslant q(H) (nT_n)^{1/2} \sup_{h \in [0, H]} |\hat{B}_n(h) - B(h)|.$$

Для любого $x > 0$

$$P \{ \| Y_n \|_{C_0(q)} \leqslant x \} = P \{ \sup_{h \geqslant 0} q(h) |Y_n(h)| \leqslant x \} =$$

$$= P\{\forall H > 0 : \sup_{h\in[0,H]} q(h)\,|Y_n(h)| \leqslant x\} \leqslant$$

$$\leqslant P\left\{\forall H > 0 : \sup_{h\in[0,H]} |\hat{B}_n(h) - B(h)| \leqslant \frac{x}{q(H)\,(nT_n)^{1/2}}\right\}. \qquad (39)$$

Для доверительного уровня $\beta \in (0, 1)$ выберем $x_\beta$ таким, чтобы $G(x_\beta) \leqslant \beta$. Тогда в силу неравенства (38)

$$P(\|Y\|_{C_0(q)} \leqslant x_\beta\} > 1 - \beta.$$

Поскольку из теоремы 3

$$\lim_{n\to+\infty} P\{\|Y_n\|_{C_0(q)} \leqslant x\} = P\{\|Y\|_{C_0(q)} \leqslant x\},$$

то для данного $\beta$ найдется $n_\beta$ такой, что для всех $n > n_\beta$

$$P\{\|Y_n\|_{C_0(q)} \leqslant x_\beta\} > 1 - \beta$$

(для того, чтобы указать $n_\beta$, нужны оценки скорости сходимости в центральной предельной теореме). Тогда в силу неравенства (39)

$$P\left\{\forall H > 0 : \sup_{h\in[0,H]} |\hat{B}_n(h) - B(h)| \leqslant \frac{x_\beta}{q(H)\,(nT_n)^{1/2}}\right\} > 1 - \beta,$$

т. е. с вероятностью, бóльшей $1 - \beta$, неравенство

$$\sup_{q\in[0,H]} |\hat{B}_n(h) - B(h)| \leqslant \frac{x_\beta}{q(H)\,(nT_n)^{1/2}}$$

выполняется сразу для всех $H > 0$ при $n > n_\beta$. Выбирая при заданном $\beta$ требуемую максимальную погрешность $w$ измерения к. ф., можно подобрать условия наблюдения (параметры $H$, $n$, $T_n$) так, чтобы $\frac{x_\beta}{q(H)\,(nT_n)^{1/2}} \leqslant w$. Тогда $\sup_{h\in[0,H]} |\hat{B}_n(h) - B(h)| \leqslant w$ с вероятностью, бóльшей $1 - \beta$.


12. *Булдыгин В. В., Заяц В. В.* Теоремы сравнения и асимптотическое поведение корреляционных оценок в пространствах непрерывных функций. I // Укр. мат. журн.— 1991.— 43, № 4.— С. 482—489.
13. *Майборода Р. Е.* Оценка производящей функции моментов случайной величины по результатам наблюдений // Теория вероятностей и мат. статистика.— 1985.— Вып. 32.— С. 121—131.
14. *Мацак И. К.* Локальные свойства выборочных функций случайных процессов: Автореф. ... канд. физ.-мат. наук.— Киев, 1977.— 11 с.
15. *Заяц В. В.* Применение теорем сравнения в одной задаче математической статистики // Аналитические методы исследования эволюции стохастических систем.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1989.— С. 30—39.



Получено 06.03.90