УДК 517.911

О. А. АШИРОВ, асп.,
Н. А. ПЕРЕСТЮК, д-р физ.-мат. наук (Киев.ун-т)

# О методе замораживания в системах с импульсным воздействием

Исследуются линейные и слабо нелинейные системы дифференциальных уравнений с переменными матрицами, подвергающиеся импульсному воздействию в фиксированные моменты времени. Получены достаточные условия асимптотической устойчивости решений рассматриваемых систем, выражающиеся через собственные числа переменной матрицы.

Досліджуються лінійні і слабо нелінійні системи диференціальних рівнянь зі змінними матрицями, що підлягають імпульсній дії у фіксовані моменти часу. Одержані достатні умови асимптотичної стійкості розв'язків розглядуваних систем, які виражаються через власні числа змінної матриці.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с импульсным воздействием

$$\frac{dx}{dt} = A(t)\,x, \quad t \neq \tau_i \quad \Delta x|_{t=\tau_i} = B_i x. \tag{1}$$

В [1] получены достаточные условия асимптотической устойчивости нулевого решения рассматриваемой системы уравнений. Эти условия выражаются через наибольшие собственные числа $\Lambda(t)$ и $\Lambda_i^2$ соответственно матрицы

$$\hat{A}(t) = \frac{1}{2}\left(A(t) + A^{\mathrm{T}}(t)\right),\ (E + B_i^{\mathrm{T}})(E + B_i).$$

Нам хотелось бы получить более тонкие условия асимптотической устойчивости, выражающиеся через собственные числа матрицы $A(t)$. Достичь этой цели позволяет метод замораживания [2]. Представим систему (1) в виде

$$\frac{dx}{dt} = A(t_0)\,x + (A(t) - A(t_0))\,x, \quad t \neq \tau_i, \tag{2}$$
$$\Delta x|_{t=\tau_i} = Bx + (B_i - B)\,x$$

с произвольно фиксированным $t_0$.

Требуем, чтобы матрица $B$ коммутировала при всех $t \geqslant 0$ с матрицей $A(t)$.

Тогда согласно идее метода замораживания [2] матрицант $X(t, t_0)$ системы (2) допускает интегральное представление

$$X(t, t_0) = e^{A(t)(t-t_0)}\,(E + B)^{i(t_0, t)} + \int\limits_{t_0}^{t} e^{A(t)(t-t_0)}\,(E + B)^{i(t, s)}\,[A(s) -$$

$$- A(t)] X(s, t_0)\, ds + \sum_{t_0 < \tau_i < t} e^{A(t)(t-\tau_i)} (E + B)^{i(t, \tau_i)} [B_i - B] X(\tau_i, t_0). \quad (3)$$

В дальнейшем понадобятся следующие леммы.

Лемма 1. *Пусть неотрицательная кусочно-непрерывная функция $u(t)$ удовлетворяет при $t \geqslant t_0$ неравенству*

$$u(t) \leqslant C + \int_{t_0}^{t} a(t-s)\, u(s)\, ds, \quad (4)$$

*где $C \geqslant 0$, $a > 0$. Тогда при $t \geqslant t_0$ для функции $u(t)$ справедлива оценка*

$$u(t) \leqslant C \operatorname{ch}(\sqrt{a}(t - t_0)). \quad (5)$$

Доказательство. Введем обозначение

$$\omega(t) = C + \int_{t_0}^{t} a(t-s)\, u(s)\, ds.$$

Тогда

$$u(t) \leqslant \omega(t) \leqslant \overline{\omega}(t), \quad (6)$$

где $\overline{\omega}(t)$ — решение интегрального уравнения

$$\overline{\omega}(t) = C + \int_{t_0}^{t} a(t-s)\, \overline{\omega}(s)\, ds;$$

решая которое, имеем $\overline{\omega}(t) = C \operatorname{ch}(\sqrt{a}(t - t_0))$. Подставляя последнее в (6), получаем нужную оценку (5).

Лемма 2. *Пусть неотрицательная кусочно-непрерывная функция $u(t)$ удовлетворяет при $t \geqslant t_0$ неравенству*

$$u(t) \leqslant C + \int_{t_0}^{t} a(t-s)\, u(s)\, ds + \sum_{t_0 < \tau_i < t} \beta_i u(\tau_i), \quad (7)$$

*в котором $C \geqslant 0$, $\beta_i \geqslant 0$, $a > 0$, $\tau_i$ — точки разрыва первого рода функции $u(t)$, тогда справедлива оценка*

$$u(t) \leqslant C \prod_{t_0 < \tau_i < t} (1 + \beta_i)\, e^{\sqrt{a}(t - t_0)}. \quad (8)$$

Доказательство. В промежутке $[t_0, \tau_1]$ ввиду леммы 1 имеем

$$u(\tau_1 + 0) \leqslant C + \int_{t_0}^{\tau_1} a(t-s)\, u(s)\, ds + \beta_1 u(\tau_1);$$

$$u(t) \leqslant C_1 + \int_{\tau_1}^{t} a(t-s)\, u(s)\, ds, \quad \tau_1 < t \leqslant \tau_2;$$

$$u(t) \leqslant C_1 \operatorname{ch}(\sqrt{a}(t - \tau_1)),$$

где

$$C_1 = C + \int_{t_0}^{\tau_1} a(t-s)\, u(s)\, ds + \beta_1 u(\tau_1) \leqslant$$

$$\leqslant C \operatorname{ch}(\sqrt{a}(\tau_1 - t_0)) + \beta_1 C \operatorname{ch}(\sqrt{a}(\tau_1 - t_0)) = (1 + \beta_1) C \operatorname{ch}(\sqrt{a}(\tau_1 - t_0)),$$

или

$$u(t) \leqslant (1 + \beta_1) C \operatorname{ch}(\sqrt{a}(\tau_1 - t_0)).$$

Для $t \in ]\tau_i, \tau_{i+1}]$ имеем

$$u(t) \leqslant C \prod_{j=1}^{i} (1+\beta_j) \prod_{j=1}^{i} \operatorname{ch}(\sqrt{a}(\tau_j - \tau_{j-1})) \operatorname{ch}(\sqrt{a}(t-\tau_i)) \leqslant$$

$$\leqslant C \prod_{j=1}^{i} (1+\beta_j)\, e^{\sqrt{a}(t-t_0)}$$

или окончательно

$$u(t) \leqslant C \prod_{t_0<\tau_i<t} (1+\beta_i)\, e^{\sqrt{a}(t-t_0)}.$$

Лемма доказана.

Теорема 1. *Пусть в уравнениях (2) матрица $B$ коммутирует при всех $t \geqslant 0$ с матрицей $A(t)$.*

*Пусть также выполняются следующие условия:*

*а)* $\| e^{A(t)(t-t_0)} (E+B)^{i(t_0,t)} \| \leqslant K e^{-\gamma(t-t_0)},\ K \geqslant 0,\ \gamma > 0;$
*б)* $\| A(t) - A(s) \| \leqslant a(t-s),\ a > 0,\ t \geqslant s;$
*в)* $\| B_i - B \| \leqslant \beta,\ \forall i,\ \beta \geqslant 0;$ *и пусть существует предел*

$$\overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{i(t_0,T)}{T} \leqslant p < \infty, \tag{9}$$

*где $i(t_0, T)$ — количество точек последовательности $\{\tau_i\}$, принадлежащих промежутку $[t_0, T]$.*

*Тогда при достаточно малых $a$ и $\beta$ решения системы уравнений (1) асимптотически устойчивы.*

Доказательство. Матрицант $X(t, t_0)$ системы (1) допускает интегральное представление (3).

В силу условия теоремы и утверждения леммы 2 имеем

$$\| X(t,t_0) \| \leqslant K e^{-[\gamma - \sqrt{Ka} - p\ln(1+\beta)](t-t_0)} \to 0$$

при $t \to \infty$, что и завершает доказательство теоремы.

Нам понадобится следующее утверждение.

Лемма 3. *Пусть матрица $A(t)$ такая, что выполняется неравенство*

$$\max_j \operatorname{Re} \lambda_j (A(t)) < \gamma_0,$$

*матрица $(E+B)$ не вырождена и*

$$\max_j \lambda_j [(E+B^{\mathrm{T}})(E+B)] = \alpha^2,$$

*моменты $\tau_i$ удовлетворяют соотношению (9). Если выполняется неравенство $\gamma_0 + p\ln\alpha < 0$, то существуют такие константы $K \geqslant 1$ и $\gamma > 0$, что выполняется неравенство*

$$\| e^{A(t)(t-t_0)} (E+B)^{i(t_0,t)} \| \leqslant K e^{-\gamma(t-t_0)}.$$

Доказательство. Справедливы соотношения

$$\| e^{A(t)(t-t_0)} (E+B)^{i(t_0,t)} x \|^2 = \langle e^{A(t)(t-t_0)} (E+B)^{i(t_0,t)} x,$$

$$e^{A(t)(t-t_0)} (E+B)^{i(t_0,t)} x \rangle \leqslant e^{2(\gamma_0+\varepsilon_1)(t-t_0)} \langle (E+B)^{i(t_0,t)} x, (E+B)^{i(t_0,t)} x \rangle \leqslant$$

$$\leqslant e^{2(\gamma_0+\varepsilon_1)(t-t_0)} \alpha^{2i(t_0,t)} \langle x, x \rangle = e^{2(\gamma_0+\varepsilon_1)(t-t_0)} e^{2i(t_0,t)\ln\alpha} \langle x, x \rangle =$$

$$= e^{2(\gamma_0+\varepsilon_1)(t-t_0)} e^{2\ln\alpha\cdot(t-t_0)\left[p-p+\frac{i(t_0,t)}{t-t_0}\right]} \langle x, x \rangle \leqslant$$

$$\leqslant K_1 e^{2(\gamma_0+\varepsilon_1)(t-t_0)} e^{2p\ln\alpha\cdot(t-t_0)} \langle x, x \rangle = K_1 e^{2(\gamma_0+\varepsilon_1+p\ln\alpha)(t-t_0)} \langle x, x \rangle,$$

где $K_1 = \sup\limits_{t \geqslant \tau_1} e^{-2\ln\alpha\left(p - \frac{i(t_0, t)}{t - t_0}\right)}$. Тогда

$$\| e^{A(t)(t-t_0)} (E + B)^{i(t_0, t)} \| \leqslant K e^{(\gamma_0 + \varepsilon_1 + p \ln \alpha)(t - t_0)},$$

$\varepsilon_1$ можно выбрать достаточно малым, чтобы выполнялось неравенство $\gamma_0 + \varepsilon_1 + p \ln \alpha < 0$.

Теорема 2. *Пусть в уравнениях* (2) *матрица $B$ коммутирует при всех $t \geqslant 0$ с матрицей $A(t)$. Пусть также выполняется условие*

$$\| A(t) - A(s) \| \leqslant a(t - s), \quad a > 0, \ t \geqslant s,$$

$\| B_i - B \| \leqslant \beta$, $\forall i$, $\beta \geqslant 0$, *и моменты $\tau_i$ удовлетворяют соотношению* (9). *Если выполнено неравенство $\gamma_0 + p \ln \alpha < 0$, то при достаточно малых $a$ и $\beta$ решения системы уравнений* (1) *асимптотически устойчивы.*

Доказательство. Согласно лемме 3 все условия теоремы 1 выполняются.

Таким образом,

$$\| X(t, t_0) \| \leqslant K e^{[\gamma_0 + p \ln \alpha + \sqrt{Ka} + p \ln(1 + \beta)](t - t_0)} \to 0$$

при $t \to \infty$, что и завершает доказательство теоремы.

Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{dx}{dt} = A(t) x + g(t, x), \quad t \neq \tau_i, \tag{10}$$

$$\Delta x |_{t = \tau_i} = B_i x + I_i(x).$$

Предположим, что функции $g(t, x)$ и $I_i(x)$ удовлетворяют неравенствам

$$\| g(t, x) \| \leqslant \bar{a} \| x \|, \quad \| I_i(x) \| \leqslant \bar{a} \| x \| \tag{11}$$

при всех $t \geqslant t_0$, $i = 1, 2, \ldots$, $| x | \leqslant h$, $h > 0$. Наряду с уравнением (10) рассмотрим линейную систему уравнений

$$\frac{dx}{dt} = A(t) x, \ t \neq \tau_i, \ \Delta x |_{t = \tau_i} = Bx. \tag{12}$$

Теорема 3. *Пусть в уравнениях* (12) *матрица $B$ коммутирует при всех $t \geqslant 0$ с матрицей $A(t)$. Пусть также выполняется следующее условие:*

*а)* $\| e^{A(t)(t-t_0)} (E + B)^{i(t_0, t)} \| \leqslant K e^{-\gamma(t - t_0)}$, $K \geqslant 0$, $\gamma > 0$;
*б)* $\| A(t) - A(s) \| \leqslant a(t - s)$, $a > 0$, $t \geqslant s$;

*в)* $\| B_i - B \| \leqslant \beta$, $\forall i$, $\beta \geqslant 0$;

*моменты $\tau_i$ удовлетворяют соотношению* (9). *Тогда при достаточно малых $a$ и $\beta$ тривиальное решение системы уравнений* (10) *асимптотически устойчиво, лишь только функции $g(t, x)$ и $I_i(x)$ удовлетворяют неравенствам* (11) *с достаточно малой положительной постоянной $\bar{a}$.*

Доказательство. Каждое решение уравнений (10) можно представить в виде

$$x(t, x_0) = X(t, t_0) x_0 + \int_{t_0}^{t} X(t, \tau) g(\tau, x(\tau, x_0)) d\tau +$$

$$+ \sum_{t_0 < \tau_i < t} X(t, \tau_i) I_i(x(\tau_i, x_0)),$$

где $X(t, t_0)$ — матрицант системы уравнений (12). Отсюда, с учетом неравенств (11) и

$$\| X(t, t_0) \| \leqslant K e^{-[\gamma - \sqrt{Ka} - p \ln(1 + \beta)](t - t_0)}$$

имеем

$$\| x(t, x_0) \| \leqslant K e^{-[\gamma - \sqrt{Ka} - p \ln(1+\beta)](t-t_0)} \| x_0 \| +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} K e^{-[\gamma - \sqrt{Ka} - p \ln(1+\beta)](t-\tau_i)} \bar{a} \| x(\tau, x_0) \| d\tau +$$

$$+ \sum_{t_0 < \tau_i < t} K e^{-[\gamma - \sqrt{Ka} - p \ln(1+\beta)](t-\tau_i)} \bar{a} \| x(\tau_i, x_0) \|$$

или

$$e^{[\gamma - \sqrt{Ka} - p \ln(1+\beta)](t-t_0)} \| x(t, x_0) \| \leqslant$$

$$\leqslant K \| x_0 \| + \int_{t_0}^{t} K \bar{a} e^{[\gamma - \sqrt{Ka} - p \ln(1+\beta)](\tau - t_0)} \| x(\tau, x_0) \| d\tau +$$

$$+ \sum_{t_0 < \tau_i < t} K \bar{a} e^{[\gamma - \sqrt{Ka} - p \ln(1+\beta)](\tau_i - t_0)} \| x(\tau_i, x_0) \|,$$

$$\| x(t, x_0) \| \leqslant K e^{-[\gamma - K\bar{a} - \sqrt{Ka} - p \ln[(1+\beta)(1+Ka)]](t-t_0)} \| x_0 \|.$$

Таким образом, если $a$, $\bar{a}$ и $\beta$ настолько малы, что

$$\gamma - K\bar{a} - \sqrt{Ka} - p \ln[(1+\beta)(1+Ka)] > 0,$$

то любое решение $x(t, x_0)$, $\| x_0 \| < \dfrac{h}{K}$ уравнений (10) определено при всех $t \geqslant t_0$ и $\lim\limits_{t\to\infty} \| x(t, x_0) \| = 0$, т. е. нулевое решение (10) асимптотически устойчиво.

Теорема 4. *Пусть в уравнениях* (12) *матрица $B$ коммутирует при всех $t \geqslant 0$ с матрицей $A(t)$. Пусть также выполняются следующие условия:*

$$\| A(t) - A(s) \| \leqslant a(t-s), \ a \geqslant 0, \ t \geqslant s,$$

$$\| B_i - B \| \leqslant \beta, \ \forall i, \ \beta \geqslant 0,$$

*и моменты $\tau_i$ удовлетворяют соотношению* (9).

Если выполнено неравенство $\gamma_0 + p \ln \alpha < 0$, *то при достаточно малых $a$, $\bar{a}$ и $\beta$ тривиальное решение системы уравнений* (10) *асимптотически устойчиво, лишь только функции $g(t, x)$ и $I_i(x)$ удовлетворяют неравенствам* (11).

Доказательство. Согласно лемме 3 все условия теоремы 3 выполняются. Таким образом,

$$\| x(t, x_0) \| \leqslant K e^{[\gamma_0 + p \ln \alpha + K\bar{a} + \sqrt{Ka} + p \ln(1+\beta) + p \ln(1+Ka)](t-t_0)} \| x_0 \|$$

или

$$\| x(t, x_0) \| \leqslant K e^{[\gamma_0 + p \ln \alpha + K\bar{a} + \sqrt{Ka} + p \ln[(1+Ka)(1+\beta)]](t-t_0)} \| x_0 \|.$$

Отсюда если $a$, $\bar{a}$ и $\beta$ настолько малы, что

$$\gamma_0 + p \ln \alpha + K\bar{a} + \sqrt{Ka} + p \ln[(1+Ka)(1+\beta)] < 0,$$

то любое решение $x(t, x_0)$, $\| x_0 \| < h/K$ уравнений (10) определено при всех $t \geqslant t_0$ и $\lim\limits_{t\to\infty} \| x(t, x_0) \| = 0$, т. е. нулевое решение (10) асимптотически устойчиво.

Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{dx}{dt} = A(t) x + g(t, x), \quad t \neq \tau_i, \tag{13}$$

$$\Delta x |_{t=\tau_i} = I_i(x),$$

где функции $g(t, x)$ и $I_i(x)$ удовлетворяют неравенствам (11). Тогда, как частный случай теоремы 4, можно сформулировать следующее утверждение.

Теорема 5. *Пусть матрица $A(t)$ удовлетворяет условию*

$$\|A(t) - A(s)\| \leqslant a(t-s), \quad a \geqslant 0, \ t \geqslant s.$$

*Пусть* $\max\limits_{j} \operatorname{Re} \lambda_j(A(t)) < \gamma_0$. *Тогда, если* $\gamma_0 < 0$, *то при достаточно малых* $a$, *а тривиальное решение системы уравнений* (10) *асимптотически устойчиво, лишь только функции* $g(t, x)$ *и* $I_i(x)$ *удовлетворяет неравенствам* (11).


1. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием.— Киев : Вища шк.— 1987.— 288 с.
2. *Теория* показателей Ляпунова / Б. Ф. Былов, Р. Э. Виноград, Д. М. Гробман, В. В. Немыцкий.— М. : Наука, 1977.— 576 с.



Получено 29.10.90