УДК 517.53

В. Н. СОРОКИН, канд. физ.-мат. наук
(Моск. ин-т радиотехники, электроники и автоматики)

О совместных двухточечных аппроксимациях Паде марковских функций

Методом теории потенциала изучается асимптотическое поведение совместных аппроксимаций Паде двух функций марковского типа, одна из которых голоморфна в окрестности нуля, а другая — в окрестности бесконечности. Для специальных весов получена формула Родрига, и асимптотика представлена в терминах алгебраических функций.

Методом теорії потенціалу вивчається асимптотична поведінка сумісних апроксимацій Паде двох функцій марківського типу, одна з яких голоморфна в околі нуля а друга — в околі нескінченності. Для спеціальних ваг одержана формула Родрига, а асимптотика зображена термінами алгебраїчних функцій.

1. В настоящей статье изучаются совместные двухточечные аппроксимации Паде марковских функций с носителями $[0, 1]$ и $[1, +\infty)$ с точками интерполяции ∞ и 0 соответственно. Такие конструкции могут применяться в теории диофантовых приближений. Получена асимптотика аппроксимаций в терминах алгебраических функций третьего порядка.

2. Положим

$$\hat{\nu}(x) = \int_0^1 \frac{d\nu(t)}{x-t}, \quad \hat{\mu}(x) = \int_1^{+\infty} \frac{xt}{t-x}\, d\mu(t),$$

где ν и μ — конечные положительные борелевские меры на промежутках $\Delta_0 = [0, 1]$ и $\Delta_\infty = [1, +\infty)$ соответственно, причем $\nu'(t) > 0$ для почти всех (п. в.) $t \in \Delta_0$, $\mu'(t) > 0$ для п. в. $t \in \Delta_\infty$.

Пусть n и m — целые неотрицательные числа. Будем искать многочлены $Q_{n,m} \not\equiv 0$, $P^{\nu}_{n,m}$, $P^{\mu}_{n,m}$ степени не выше $n+m$ такие, что функция $R^{\nu}_{n,m} = Q_{n,m}\hat{\nu} - P^{\nu}_{n,m}$ имеет в точке $x=\infty$ нуль $(n+1)$-го порядка, а функция $R^{\mu}_{n,m} = Q_{n,m}\hat{\mu} - P^{\mu}_{n,m}$ имеет в точке $x=0$ нуль $(n+2m+1)$-го порядка. Такие многочлены существуют, при этом выполняются соотношения ортогональности

$$\int_0^1 Q_{n,m}(t)\, t^k d\nu(t) = 0, \quad k = 0, \dots, n-1, \tag{1}$$

$$\int_1^{+\infty} Q_{n,m}(t)\, t^k \frac{d\mu(t)}{t^{n+2m-1}} = 0, \quad k = 0, \dots, m-1. \tag{2}$$

Многочлен $Q_{n,m}(x)$ имеет n простых нулей на интервале $(0, 1)$ и m простых нулей на интервале $(1, +\infty)$. Он определен однозначно (с точностью до нормировки). Рациональные функции $\pi^{\nu}_{n,m} = P^{\nu}_{n,m}/Q_{n,m}$, $\pi^{\mu}_{n,m} = P^{\mu}_{n,m}/Q_{n,m}$ будем называть совместными двухточечными аппроксимациями Паде функций $\hat{\nu}$, $\hat{\mu}$.

Теорема. *Если $n, m \to \infty$ так, что $n/m \to 1$, то аппроксимации $\pi^{\nu}_{n,m}$ и $\pi^{\mu}_{n,m}$ сходятся соответственно к функциям $\hat{\nu}$ и $\hat{\mu}$ равномерно на компактных подмножествах области $D_* = \mathbb{C} \setminus \Delta_*$, где $\Delta_* = [0, +\infty)$. При этом если u_0, u_∞, u_* — функции, голоморфные в областях $D_0 = \mathbb{C} \setminus \Delta_0$, $D_\infty = \mathbb{C} \setminus \Delta_\infty$, D_* соответственно и удовлетворяющие уравнению*

$$u^3 - \left(\frac{27}{2}x^2 - 39x + \frac{27}{2}\right)u^2 +$$

$$+\left(\frac{729}{16}x^4 - \frac{81}{4}x^3 - \frac{21}{8}x^2 - \frac{81}{4}x + \frac{729}{16}\right)u + 64x^3 = 0, \qquad (3)$$

то

$$\lim_{n,m\to\infty} |\hat{\nu}(x) - \pi^{\nu}_{n,m}(x)|^{1/n} = \left|\frac{u_0(x)}{u_*(x)}\right|, \qquad (4)$$

$$\lim_{n,m\to\infty} |\hat{\mu}(x) - \pi^{\mu}_{n,m}(x)|^{1/m} = \left|\frac{u_\infty(x)}{u_*(x)}\right|. \qquad (5)$$

Следующие пункты посвящены доказательству теоремы.

3. Применим метод А. А. Гончара и Е. А. Рахманова [1—3]. Существуют и единственны вероятностные меры $\bar{\nu}$ и $\bar{\mu}$ на промежутках Δ_0 и Δ_∞ соответственно такие, что выполняются условия равновесия

$$2V_{\bar{\nu}}(t) + V_{\bar{\mu}}(t) \begin{cases} \equiv w_0, & t \in \Delta_{\bar{\nu}}, \\ \geqslant w_0, & t \in \Delta_0 \setminus \Delta_{\bar{\nu}}, \end{cases}$$

$$2V_{\bar{\mu}}(t) + V_{\bar{\nu}}(t) + 3\ln t \begin{cases} \equiv w_\infty, & t \in \Delta_{\bar{\mu}}, \\ \geqslant w_\infty, & t \in \Delta_\infty \setminus \Delta_{\bar{\mu}}, \end{cases}$$

где w_0 и w_∞ — некоторые постоянные, $\Delta_{\bar{\nu}}$ и $\Delta_{\bar{\mu}}$ — носители мер $\bar{\nu}$ и $\bar{\mu}$. Здесь

$$V_\varkappa(x) = -\int \ln|x - t|\, d\varkappa(t)$$

— логарифмический потенциал меры $\varkappa$. При этом если старший коэффициент многочлена $Q_{n,m}$ равен единице, то

$$\lim_{n,m\to\infty} |Q_{n,m}(x)|^{-\frac{2}{n+m}} = \exp\{V_{\bar{\nu}}(x) + V_{\bar{\mu}}(x)\}, \quad x \in D_*, \qquad (6)$$

$$\lim_{n,m\to\infty} |R^{\nu}_{n,m}(x)|^{1/n} = \exp\{V_{\bar{\nu}}(x) - w_0\}, \quad x \in D_0, \qquad (7)$$

$$\lim_{n,m\to\infty} |R^{\mu}_{n,m}(x)|^{1/m} = \exp\{V_{\bar{\mu}}(x) + 3\ln|x| - w_\infty\}, \quad x \in D_\infty. \qquad (8)$$

Этот метод можно применять для любых двух непересекающихся промежутков положительной полуоси и для любого предела n/m.

4. Поскольку асимптотические формулы (6)—(8) не зависят от выбора мер ν и μ, то положим $n=m$, $d\nu(t) = dt$, $d\mu(t) = t^{-2}dt$. Тогда соотношения (1), (2) означают, что

$$\int_0^1 Q_{n,n}(t)\, t^k dt = 0, \quad k = 0, \ldots, \quad n-1, \qquad (9)$$

и при этом

$$t^{2n} Q_{n,n}\left(\frac{1}{t}\right) = Q_{n,n}(t). \qquad (10)$$

Лемма 1. *Справедлива формула*

$$Q_{n,n}(x) = \sum_{j=0}^{2n} \binom{2n}{j} \binom{n+j}{n} \binom{3n-j}{n} (-x)^j . \tag{11}$$

Доказательство. Введем преобразование Меллина

$$R(s) = \int_0^1 Q_{n,n}(t)\, t^{s-n-1} dt.$$

Запишем многочлен $Q_{n,n}$ с неопределенными коэффициентами

$$Q_{n,n}(t) = \sum_{j=0}^{2n} q_j t^j .$$

Тогда

$$R(s) = \sum_{j=0}^{2n} \frac{q_j}{s-n-j} = \frac{N(s)}{sM(s)}, \quad M(s) = \prod_{j=1}^{n} (s^2 - j^2),$$

$N(s)$ — некоторый многочлен степени $2n$. В силу (10) $N(s)$ — четный многочлен. Ввиду (9) $s = n+1, \ldots, s = 2n$ — нули этого многочлена. Отсюда

$$N(s) = A \prod_{j=1}^{n} (s^2 - (n+j)^2),$$

где A — нормировочная постоянная. Вычисляя коэффициенты q_j как вычеты функции $R(s)$ и полагая $A = (-1)^n \binom{2n}{n}$, получаем (11), где $\binom{a}{b}$ — биномиальные коэффициенты.

Отметим, что старший коэффициент многочлена $Q_{n,n}$ равен $\binom{3n}{n}$.

Лемма 2. *Справедливо соотношение*

$$Q_{n,n}(x) = Q_{n,n}(x, 1),$$

где однородный многочлен $Q_{n,n}(x, y)$ определяется формулой Родрига

$$Q_{n,n}(x, y) = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x^n} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial y^n} (x^n y^n (x-y)^{2n}). \tag{12}$$

Доказательство. Применяя в (12) формулу бинома Ньютона и выполняя дифференцирование, получаем (11).

По аналогии с (12) можно написать формулу Родрига для весов Якоби и произвольных индексов n, m. Многочлены (12) связаны с ортогональными в треугольнике многочленами Аппеля.

Отметим, что первый результат об асимптотике совместных аппроксимаций, где также применялась формула Родрига, принадлежит В. А. Калягину [4].

5. Для изучения асимптотического поведения многочленов $Q_{n,n}(x)$ применим двумерный метод перевала. Перепишем формулу Родрига (12) в соответствии с интегральной формулой Коши

$$Q_{n,n}(x) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \iint_{\gamma_x \times \gamma_1} \frac{\xi^n \eta^n (\xi-\eta)^{2n}}{(\xi-x)^{n+1} (\eta-1)^{n+1}}\, d\xi d\eta,$$

где γ_x и γ_1 — произвольные окружности в ξ-плоскости и η-плоскости с центрами x и 1 соответственно.

Стационарные точки функции

$$f(\xi, \eta) = \frac{\xi\eta (\xi-\eta)^2}{(\xi-x)(\eta-1)}$$

находим из системы уравнений

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\ln f(\xi,\eta)=0,\quad \frac{\partial}{\partial\eta}\ln f(\xi,\eta)=0$$

или после преобразований

$$4\xi^3-12x\xi^2+3x(1+3x)\xi-4x^2=0, \tag{13}$$

$$4\eta^3-12\eta^2+3(x+3)\eta-4x=0. \tag{14}$$

Уравнение (13) решается методом Кардано. Существуют и единственны функции $\xi_0(x)$, $\xi_\infty(x)$, $\xi_*(x)$, голоморфные в областях D_0, D_∞, D_* соответственно и удовлетворяющие уравнению (13). На противоположных краях разреза Δ_0 одинаковые значения принимают функции ξ_0 и ξ_*, на противоположных берегах разреза Δ_∞ одинаковые значения принимают функции ξ_∞ и ξ_*. Уравнение (14) обладает аналогичными свойствами. Стационарными точками функции f будут три точки пространства $\mathbb{C}^2$: (ξ_j,η_j), $j=0,\infty,*$. Обозначим $u_j=f(\xi_j,\eta_j)$. Тогда функции $u_j(x)$ голоморфны в областях D_j и являются ветвями трехзначной алгебраической функции. Коэффициенты уравнения, которому удовлетворяют u_j, вычисляются по формулам Виета. Получаем уравнение (3).

6. Введем логарифмическую производную

$$W(x)=\frac{d}{dx}\ln u_0(x).$$

Функция $W(x)$ принадлежит классу $\mathcal{R}[0,1]$, т. е. 1) она голоморфна в D_0; 2) отображает верхнюю полуплоскость в верхнюю полуплоскость; 3) $W(x)>0$ при $x<0$, $W(x)<0$ при $x>1$. Кроме того, $W(x)\sim-1/x$ при $x\to\infty$. Следовательно, $W(x)$ — марковская функция

$$W(x)=\int_0^1\frac{d\bar\nu(t)}{t-x},$$

где $\bar\nu$ — вероятностная мера на Δ_0. По формуле обращения Стилтьеса — Перрона

$$\frac{d\bar\nu(t)}{dt}=\frac{1}{\pi}\operatorname{Im}W(t+i\cdot 0)$$

или

$$\bar\nu(t)=\frac{1}{\pi}\arg u_0(t+i\cdot 0),\quad 0\leqslant t\leqslant 1.$$

Положим $\bar\mu(t)=-\bar\nu(1/t)$, $1\leqslant t\leqslant+\infty$. Тогда

$$|u_0(x)|=C_0\exp\{V_{\bar\nu}(x)\},\quad |u_\infty(x)|=C_\infty|x|^3\exp\{V_{\bar\mu}(x)\},$$

где $C_0=4^5/3^6$, $C_\infty=3^3/4$.

Лемма 3. *Справедливы тождества*

$$2V_{\bar\nu}(x)+V_{\bar\mu}(x)=\ln(3^{18}/4^{12}),\quad x\in\Delta_0, \tag{15}$$

$$2V_{\bar\mu}(x)+V_{\bar\nu}(x)+3\ln x=0,\quad x\in\Delta_\infty. \tag{16}$$

Доказательство. Из соотношения Виета

$$u_0(x)\,u_\infty(x)\,u_*(x)=-64x^3 \tag{17}$$

вытекает равенство

$$\exp\{2V_{\bar\nu}(x)+V_{\bar\mu}(x)\}=\frac{1}{C_0^2C_\infty}\left|\frac{u_0^2(x)\,u_\infty(x)}{x^3}\right|=\frac{64}{C_0^2C_\infty}\left|\frac{u_0(x)}{u_*(x)}\right|,$$

где $u_j(x)$ — предельные значения из верхней полуплоскости. Числа $u_0(x)$ и $u_*(x)$ комплексно сопряжены, если $x\in\Delta_0$. Следовательно, $|u_0(x)|$

$|u_*(x)|=1$. Соотношение (15) доказано. Соотношение (16) доказывается аналогично.

Из леммы 3 с учетом п. 3 вытекают, в частности, формулы (4) и (5).

Лемма 4. *Если* $x \in D_*$, *то* $|u_j(x)/u_*(x)| < 1$, *где* $j = 0, \infty$.

Доказательство. При $x \in \Delta_0$ имеем $|u_0(x)/u_*(x)| = 1$. На интервале $(1, +\infty)$ функция $|u_0(x)|$ строго убывает. Из (17) при $x \in \Delta_\infty$ получаем

$$|u_*(x)|^2 = |u_*(x)\, u_\infty(x)| = 64x^3/|u_0(x)|.$$

Следовательно, на интервале $(1, +\infty)$ функция $|u_*(x)|$ строго возрастает. Таким образом, $|u_0(x)/u_*(x)| \leqslant 1$ для всех $x \in \Delta_*$. По принципу максимума модуля для всех $x \in D_*$ выполняется неравенство $|u_0(x)/u_*(x)| < 1$. Неравенство $|u_\infty(x)/u_*(x)| < 1$ доказывается аналогично. Из леммы 4 следует сходимость аппроксимаций. Теорема доказана.

1. *Гончар А. А., Рахманов Е. А.* О сходимости совместных аппроксимаций Паде для системы функций марковского типа // Тр. Мат. ин-та АН СССР.— 1981.— 157.— С. 31—48.
2. *Гончар А. А., Рахманов Е. А.* Равновесная мера и распределение нулей экстремальных многочленов // Мат. сб.— 1984.— 125.— С. 117—127.
3. *Гончар А. А., Рахманов Е. А.* О задаче равновесия для векторных потенциалов // Успехи мат. наук.— 1985.— 40, вып. 4.— С. 155—156.
4. *Калягин В. А.* Об одном классе полиномов, определяемых двумя соотношениями ортогональности // Мат. сб.— 1979.— 110.— С. 609—627.

Получено 23,04,90