УДК 517.53

Н. И. Гречанюк

О поведении максимального члена кратного ряда Дирихле, задающего целую функцию

1. Введение. Известно [1], что для целой функции f, представленной степенным рядом,

$$\ln M(r, f) = (1 + o(1)) \ln \mu(r, f) \tag{1}$$

при $r \to +\infty$ вне некоторого множества конечной логарифмической меры, где $M(r, f) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$, $\mu(r, f) = \max\{|a_n| r^n : n \geqslant 0\}$. Это утверждение, имеющее важные применения, неоднократно обобщалось на различные классы целых функций. Так, в [2—4] с помощью методики типа Вимана—Валирона, развитой Хейманом [5] и модифицированной М. Н. Шереметой [3, 6, 7], получены аналоги соотношения (1) для класса целых функций, представленных абсолютно сходящимися в $\mathbb{C}$ рядами Дирихле. Работы [8—11] посвящены доказательству аналогов соотношения (1) для целой функции $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ конечного порядка по совокупности переменных [12, с. 210], представленной кратным степенным рядом. В частности, в [9, 10] доказана асимптотическая эквивалентность логарифмов максимума модуля $M(r, f)$ и максимального члена $\mu(r, f)$, $r = (r_1, r_2, \ldots, r_n)$, когда $r_j \to +\infty$, $r_j = |z_j|$, $j = 1, 2, \ldots, n$, а в [11] дано описание (в логарифмических координатах) конуса направлений роста максимума модуля $M(r, f)$, внутри которого $\ln M(r, f) \sim \ln \mu(r, f)$ при $|r| \to \infty$.

Настоящая статья посвящена получению аналога соотношения (1) для целых функций $F(z_1, z_2)$, $z_j = x_j + iy_j$, $j = 1, 2$, представленных абсолютно сходящимися в $\mathbb{C}^2$ кратными рядами Дирихле

$$F(z_1, z_2) = \sum_{n,m=0}^{\infty} a_{n,m} \exp\{z_1\lambda_n^{(1)} + z_2\lambda_m^{(2)}\}, \quad |a_{0,0}| = 1, \tag{2}$$

где $0 = \lambda_0^{(j)} < \lambda_1^{(j)} < \ldots < \lambda_n^{(j)} \uparrow +\infty$, $n \to \infty$, $j = 1, 2$. Метод доказательства теоремы является модификацией методов из [3, 4]. Для описания исключительных множеств, вне которых выполняется доказываемые нами соотношения, используем методику из [13].

Пусть $\mathbf{M}(x_1, x_2, F) = \sup\{|F(x_1 + iy_1, x_2 + iy_2)| : y_1, y_2 \in \mathbb{R}\}$ и $\mu(x_1, x_2, F) = \max\{|a_{n,m}| \exp\{x_1\lambda_n^{(1)} + x_2\lambda_m^{(2)}\} : n, m \geqslant 0\}$. Пару чисел $\nu_1, \nu_2 \in \mathbb{Z}_+$, $\nu_j = \nu_j(x_1, x_2)$, $j = 1, 2$, будем называть центральной парой ряда (2) в точке (x_1, x_2), если $|a_{\nu_1,\nu_2}| \exp\{x_1\lambda_{\nu_1}^{(1)} + x_2\lambda_{\nu_2}^{(2)}\} = \mu(x_1, x_2, F)$. Вместо a_{ν_1,ν_2}, $\lambda_{\nu_j}^{(j)}$, $\lambda_{\nu_j(x_1,x_2)}^{(j)}$ будем писать a, $\lambda^{(j)}$, $\lambda^{(j)}(x_1, x_2)$ соответственно ($j = 1, 2$). Пусть $\gamma_F(x_1, x_2) = \lim\limits_{t\to\infty} (\ln \mu(tx_1, tx_2, F))/t$, $G_F = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \gamma_F(x_1, x_2) = \infty\}$, K — замыкание произвольного угла в $\mathbb{R}^2$ с вершиной в 0 такое, что $K \setminus \{0\} \subset G_F$, $|x| = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$. Под мерой mes E измеримого множества E на прямой понимаем его меру Лебега. Через C обозначим класс множеств E в $\mathbb{R}^2$ таких, что для каждого из них существуют постоянные k_1, $k_2 > 0$, для которых проекции множеств $E_1 = E \cap \{x_1, x_2) : r \leqslant x_1 \leqslant r + k_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$ и $E_2 = E \cap \{x_1, x_2) : r \leqslant x_2 \leqslant r + k_2, x_1 \in \mathbb{R}\}$ соответственно на оси x_2 и x_1 имеют там дополнения конечной меры для любого $r \in \mathbb{R}$.

Теорема. *Для того чтобы для каждой целой функции вида* (2) *выполнялось соотношение*

$$\ln \mathrm{M}(x_1, x_2 F) = (1 + o(1)) \ln \mu(x_1, x_2, F) \tag{3}$$

при $|x| \to \infty$, $(x_1, x_2) \in K \cap E$ *для любого* K *такого, что* $K \setminus \{0\} \subset G_F$, *и для некоторого множества* $E \in C$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1/(n\,\lambda_n^{(j)}) < \infty, \quad j = 1, 2. \tag{4}$$

2. Вспомогательные утверждения. Пусть $(\alpha_n^{(j)})$, $\alpha_n^{(j)} > 0$, $(\tau_n^{(j)})$, $\tau_n^{(j)} \in \mathbb{R}$, $n \geqslant 0$, — последовательности чисел такие, что $\varkappa_n^{(j)} = (\ln \alpha_n^{(j)} - \ln \alpha_{n+1}^{(j)})/\lambda_{n+1}^{(j)} - \lambda_n^{(j)})$ монотонно возрастает с ростом n, а

$$-\infty < \tau_0^{(j)} < \varkappa_0^{(j)} < \ldots < \tau_n^{(j)} < \varkappa_n^{(j)} < \tau_{n+1}^{(j)} < \ldots, \quad j = 1, 2. \tag{5}$$

В дальнейшем вместо $\alpha_{\nu_j}^{(j)}$, $\varkappa_{\nu_j}^{(j)}$, $\tau_{\nu_j}^{(j)}$ и $\tau_{\nu_j(x_1,x_2)}^{(j)}$ будем писать $\alpha^{(j)}$, $\varkappa^{(j)}$, $\tau^{(j)}$ и $\tau^{(j)}(x_1, x_2)$, соответственно ($j = 1, 2$). По аналогии с [6] будем называть точку (x_1, x_2) нормальной (относительно последовательностей $(a_{n,m})$, $(\lambda_n^{(j)})$, $(\alpha_n^{(j)})$ и $(\tau_n^{(j)})$, $j = 1, 2$), если существуют числа $\nu_1, \nu_2 \in \mathbb{Z}_+$ такие, что для любых $n, m \geqslant 0$

$$(|a_{n,m}| / |a|) \exp\{(\lambda_n^{(1)} - \lambda^{(1)}) x_1 + (\lambda_m^{(2)} - \lambda^{(2)}) x_2\} \leqslant (\alpha_n^{(1)}\alpha_m^{(2)}/\alpha^{(1)}\alpha^{(2)}) \times$$
$$\times \exp\{(\lambda_n^{(1)} - \lambda^{(1)}) \tau^{(1)} + (\lambda_m^{(2)} - \lambda^{(2)}) \tau^{(2)}\}. \tag{6}$$

Покажем, что при $n \neq \nu_j$, $j = 1, 2$, $(\alpha_n^{(j)}/\alpha^{(j)}) \exp\{\lambda_n^{(j)}\tau^{(j)} - \lambda^{(j)}\tau^{(j)}\} < 1$. Пусть, например, $n > \nu_j$ (в случае $n < \nu_j$ доказательство аналогично). Тогда, используя (5), получаем

$$\ln(\alpha_n^{(j)}/\alpha^{(j)}) = \ln(\alpha_n^{(j)}/_{n-1}^{(j)}) + \ldots + \ln(\alpha_{\nu_j+1}^{(j)}/\alpha^{(j)}) = -(\lambda_n^{(j)} - \lambda_{n-1}^{(j)})\varkappa_{n-1}^{(j)} - \ldots$$
$$\ldots - (\lambda_{\nu_j+1}^{(j)} - \lambda^{(j)})\varkappa^{(j)} < -(\lambda_n^{(j)} - \lambda_{n-1}^{(j)})\varkappa^{(j)} - \ldots - (\lambda_{\nu_j+1}^{(j)} - \lambda^{(j)})\varkappa^{(j)} = -$$
$$-\varkappa^{(j)}(\lambda_n^{(j)} - \lambda^{(j)}) < \tau^{(j)}(\lambda^{(j)} - \lambda_n^{(j)}),$$

откуда и следует доказываемое неравенство. Таким образом, если $|n - \nu_1| + |m - \nu_2| > 0$, то правая часть (6) меньше единицы. Поэтому, если (x_1, x_2) — нормальная точка, то соответствующие ν_1, ν_2 — центральная индексная пара ряда (2). Точку (x_1, x_2), которая не является нормальной, назовем исключительной.

Лемма. *Если для функции (2) выполняются условия (4), то для всех (x_1, x_2) из некоторого множества $E \in C$ и для любых $n, m \geqslant 0$, $A > 0$ выполняются неравенства*

$$(|a_{n,m}| \exp\{\lambda_n^{(1)} x_1 + \lambda_m^{(2)} x_2\})/\mu(x_1, x_2, F) \leqslant \exp\Big\{-\int_{\lambda^{(1)}}^{\lambda_n^{(1)}} t^{-2}(\lambda_n^{(1)} - t) \ln n_1(At) c_1(t)\, dt - \int_{\lambda^{(2)}}^{\lambda_m^{(2)}} t^{-2}(\lambda_m^{(2)} - t) \ln n_2(At) c_2(t)\, dt\Big\}, \tag{7}$$

где $n_j(t) = \sum_{\lambda_n^{(j)} \leqslant t} 1$, $c_j(t) \uparrow +\infty$, $t \to +\infty$, $j = 1, 2$.

Доказательство. Поскольку условия (4) эквивалентны условиям [4] $\int_0^\infty t^{-2} \ln n_j(t)\, dt < \infty$, $j = 1, 2$, то отсюда следует, что существуют функции $c_j(t) \uparrow +\infty$, $t \to +\infty$, такие, что для любого $A > 0$

$$\int_0^\infty t^{-2} \ln n_j(At) c_j(t)\, dt < \infty, \quad j = 1, 2, \tag{8}$$

причем можно считать справедливыми равенства $c_j(0) = 1$, $j = 1, 2$. Положим

$$\alpha_j(t) = \int_0^t u^{-2} \ln n_j(Au) c_j(u)\, du, \quad \alpha_n^{(j)} = \exp\Big\{-\int_0^{\lambda_n^{(j)}} \alpha_j(t)\, dt\Big\},$$

$$\tau_n^{(j)} = \alpha_j(\lambda_n^{(j)}), \quad j = 1, 2. \tag{9}$$

Заметим, что $\alpha_j(t)$, $j = 1, 2$,— возрастающие положительные и ограниченные (благодаря (8)) на $[0, +\infty)$ функции для любого $A > 0$. Из (9) получаем при $n \geqslant 0$ $\tau_n^{(j)} = \alpha_j(\lambda_n^{(j)}) < \varkappa_n^{(j)} = (1/(\lambda_{n+1}^{(j)} - \lambda_n^{(j)})) \int_{\lambda_n^{(j)}}^{\lambda_{n+1}^{(j)}} \alpha_j(t)\, dt <$
$< \alpha_j(\lambda_{n+1}^{(j)}) = \tau_{n+1}^{(j)}$,
т. е. для (9) условия (5) выполняются. Таким образом, для любой нормальной точки (x_1, x_2) из (6) и (9) имеем

$$(|a_{n,m}| \exp\{\lambda_n^{(1)} x_1 + \lambda_m^{(2)} x_2\})/\mu(x_1, x_2, F) \leqslant \exp\Big\{-\int_{\lambda^{(1)}}^{\lambda_n^{(1)}} (\alpha_1(t) - \alpha_1(\lambda^{(1)}))\, dt - \int_{\lambda^{(2)}}^{\lambda_m^{(2)}} (\alpha_2(t) - \alpha_2(\lambda^{(2)}))\, dt\Big\} = \exp\Big\{-\int_{\lambda^{(1)}}^{\lambda_n^{(1)}} (\lambda_n^{(1)} - t)\alpha_1'(t)\, dt - \int_{\lambda^{(2)}}^{\lambda_m^{(2)}} (\lambda_m^{(2)} - t)\alpha_2'(t)\, dt\Big\} = \exp\Big\{-\int_{\lambda^{(1)}}^{\lambda_n^{(1)}} t^{-2}(\lambda_n^{(1)} - t) \ln n_1(At) c_1(t)\, dt - \int_{\lambda^{(2)}}^{\lambda_m^{(2)}} t^{-2}(\lambda_m^{(2)} - t) \ln n_2(At) c_2(t)\, dt\Big\}.$$

Покажем, что множество E нормальных точек принадлежит классу C. Рассмотрим кратный ряд Дирихле

$$\Phi(w_1, w_2) = \sum_{n,m=0}^{\infty} (|a_{n,m}|/(\alpha_n^{(1)}\alpha_m^{(2)})) \exp\{\lambda_n^{(1)}w_1 + \lambda_m^{(2)}w_2\}, \quad w_j = u_j + iv_j, \tag{10}$$

и покажем, что он абсолютно сходится всюду в $\mathbb{C}^2$ и, значит, представляет там целую функцию двух переменных. Действительно, поскольку $\sup\{\alpha_j(t) : t \geqslant 0\} = d_j < +\infty$, $j = 1, 2$, то

$$(|a_{n,m}|/(\alpha_n^{(1)}\alpha_m^{(2)})) \exp\{\lambda_n^{(1)}u_1 + \lambda_m^{(2)}u_2\} = |a_{n,m}| \exp\Big\{\int_0^{\lambda_n^{(1)}} \alpha_1(t)\,dt +$$

$$+ \int_0^{\lambda_m^{(2)}} \alpha_2(t)\,dt + \lambda_n^{(1)}u_1 + \lambda_m^{(2)}u_2\Big\} \leqslant |a_{n,m}| \exp\{\lambda_n^{(1)}(d_1 + u_1) + \lambda_m^{(2)}(d_2 + u_2)\},$$

и осталось заметить, что ряд (2) абсолютно сходится всюду в $\mathbb{C}^2$.

Пусть при $\operatorname{Re} w_1 = u_1$, $\operatorname{Re} w_2 = u_2$ максимальным членом функции $\Phi(w_1, w_2)$ будет

$$(|a|/(\alpha^{(1)}\alpha^{(2)})) \exp\{\lambda^{(1)}x_1 + \lambda^{(2)}x_2\} \geqslant (|a_{n,m}|/(\alpha_n^{(1)}\alpha_m^{(2)})) \exp\{\lambda_n^{(1)}u_1 + \lambda_m^{(2)}u_2\}, \tag{11}$$

причем, если в данном случае у функции $\Phi(w_1, w_2)$ будет несколько максимальных членов, то можно взять любой из них. Положив в (11) $x_1 = u_1 + \tau^{(1)}$, $x_2 = u_2 + \tau^{(2)}$, получим

$$(|a|/(\alpha^{(1)}\alpha^{(2)})) \exp\{\lambda^{(1)}(x_1 - \tau^{(1)}) + \lambda^{(2)}(x_2 - \tau^{(2)})\} \geqslant$$
$$\geqslant (|a_{n,m}|/(\alpha_n^{(1)}\alpha_m^{(2)})) \exp\{\lambda_n^{(1)}(x_1 - \tau^{(1)}) + \lambda_m^{(2)}(x_2 - \tau^{(2)})\},$$

откуда получаем (6). Значит, $|a| \exp\{\lambda^{(1)}x_1 + \lambda^{(2)}x_2\}$ — максимальный член для $F(z_1, z_2)$ при $\operatorname{Re} z_1 = x_1$, $\operatorname{Re} z_2 = x_2$, причем (x_1, x_2) — нормальная точка.

Докажем сначала, что для любого $r \in \mathbb{R}$ проекция множества $E_2 = E \cap \{(x_1, x_2) : r \leqslant x_2 \leqslant r + d_2,\ x_1 \in \mathbb{R}\}$ на ось x_1 имеет там дополнение конечной меры, т. е. проекция исключительных точек полосы $\{(x_1, x_2) : r \leqslant x_2 \leqslant r + d_2,\ x_1 \in \mathbb{R}\}$ на ось x_1 принадлежит множеству конечной меры. Пусть ν_1 — наибольшее число среди тех n, для которых $|a_{n,m}| \exp\{\lambda_n^{(1)}x_1 + \lambda_m^{(2)}x_2\} = \mu(x_1, x_2, F)$, а ν_2 — наибольшее среди m, для которых $|a_{\nu_1,m}| \times \exp\{\lambda^{(1)}x_1 + \lambda_m^{(2)}x_2\} = \mu(x_1, x_2, F)$. Покажем, что при фиксированном $x_2 = x_2^0$ $\nu_1 = \nu_1(x_1, x_2^0)$ и $\mu = \mu(x_1, x_2^0, F)$ — неубывающие функции от x_1. Действительно, обозначив $|a_{n,m}| \exp\{\lambda_m^{(2)}x_2^0\} \exp\{\lambda_n^{(1)}x_1\} = |a_{n,m}^*| \exp\{\lambda_n^{(1)}x_1\}$, $|a_n^{**}| = \max\{|a_{n,m}^*|\ m \geqslant 0\}$, рассмотрим целую функцию, представленную абсолютно сходящимся всюду в $\mathbb{C}$ рядом Дирихле

$$g(z_1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{**} \exp\{\lambda_n^{(1)}z_1\}. \tag{12}$$

Пусть $\nu(x_1)$ — центральный индекс ряда (12). Тогда, очевидно, $\nu(x_1) = \nu_1(x_1, x_2^0)$ и $\mu(x_1, g) = \mu(x_1, x_2^0, F)$, что и доказывает наше утверждение, поскольку $\nu(x_1)$ и $\mu(x_1, g)$, — как известно, функции неубывающие. Заметим, что прямая $\{(u_1, u_2) : u_2 = r,\ u_1 \in \mathbb{R}\}$ при преобразовании

$$x_1 = u_1 + \tau^{(1)}(u_1, u_2), \quad x_2 = u_2 + \tau^{(2)}(u_1, u_2) \tag{13}$$

переходит в множество S точек, которое полностью размещено в полосе $\{(x_1, x_2) : r \leqslant x_2 \leqslant r + d_2,\ x \in \mathbb{R}\}$. Ясно, что $S \subset E$. Поэтому достаточно показать, что проекция S на ось x_1 имеет там дополнение конечной меры. Если $\nu_1(u_1, u_2)$ на прямой $\{(u_1, u_2) : u_2 = r,\ u_1 \in \mathbb{R}\}$ имеет конечное число точек скачка, то утверждение леммы очевидное. В противном случае обозначим через $(u_1^{(k)})$ последовательность точек скачка функции $\nu_1(u_1, r)$, т. е. $\nu_1(u_1, r) = k$ при $u_1 \in [u_1^{(k)}, u_1^{(k+1)})$ и, если при переходе через точку $u_1^{(k+1)}$ значение $\nu_1\ (u_1, r)$ меняется с k на $k+p$, то положим $u_1^{(k+1)} = u_1^{(k+2)} = \ldots \ldots = u_1^{(k+p)}$. Тогда проекция множества S на ось x_1 составит систему отрезков $S_{x_1} = \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} [u_1^{(k)} + \tau_k^{(1)}, u_1^{(k+1)} + \tau_k^{(1)}) \bigcup (-\infty, u_1^{(0)})$. Значит, непокрытой останется система отрезков $\mathbb{R} \setminus S_{x_1} = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} [u_1^{(k)} + \tau_{k-1}^{(1)}, u_1^{(k)} + \tau_k^{(1)})$, которая имеет конечную меру, поскольку $\operatorname{mes}(\mathbb{R} \setminus S_{x_1}) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} (\tau_k^{(1)} - \tau_{k-1}^{(1)}) = = \int\limits_0^{\infty} u^{-2} \ln n_1(Au)\, c_1(u)\, du < \infty$.

Аналогично доказывается утверждение относительно проекции множества нормальных точек на ось x_2, но при этом надо принять, что ν_2 — наибольшее число среди тех m, для которых $|a_{n,m}| \exp\{\lambda_n^{(1)} x_1 + \lambda_m^{(2)} x_2\} = \mu(x_1, x_2, F)$, а ν_1 — наибольшее среди n, для которых $|a_{n,\nu_2}| \exp\{\lambda_n^{(1)} x_1 + \lambda^{(2)} x_2\} = \mu(x_1, x_2, F)$. Положим $k_j = d_j$, $j = 1, 2$. Лемма доказана.

3. Доказательство достаточности. Введем в рассмотрение множества $H_1 = \{n \in \mathbb{Z}_+ : \lambda_n^{(1)} \leqslant \eta\lambda^{(1)}\}$, $H_2 = \{n \in \mathbb{Z}_+ : \lambda_n^{(1)} > \eta\lambda^{(1)}\}$, $H_3 = \{m \in \mathbb{Z}_+ : \lambda_m^{(2)} \leqslant \eta\lambda^{(2)}\}$, $H_4 = \{m \in \mathbb{Z}_+ : \lambda_m^{(2)} > \eta\lambda^{(2)}\}$ и обозначим $A_{n,m} = |a_{n,m}| \exp\{\lambda_n^{(1)} x_1 + \lambda_m^{(2)} x_2\}$, $\sigma_1(x_1, x_2) = \sum\limits_{H_1 \times H_3} A_{n,m}$, $\sigma_2(x_1, x_2) = \sum\limits_{H_2 \times H_4} A_{n,m}$, $\sigma_3(x_1, x_2) = \sum\limits_{H_2 \times H_3} A_{n,m}$, $\sigma_4(x_1, x_2) = \sum\limits_{H_1 \times H_4} A_{n,m}$. Очевидно, что $\sum\limits_{n,m=0}^{\infty} A_{n,m} = \sum\limits_{k=1}^{4} \sigma_k(x_1, x_2)$, $\sigma_1(x_1, x_2) \leqslant n_1(\eta\lambda^{(1)})\, n_2(\eta\lambda^{(2)})\, \mu(x_1, u_2, F)$.

Пусть $A > \eta > \delta > 1$. Тогда можем записать для $j = 1, 2$

$$\sum_{H_2} \exp\Big\{-\int\limits_{\lambda^{(j)}}^{\lambda_n^{(j)}} t^{-2} (\lambda_n^{(j)} - t) \ln n_j(At)\, c_j(t)\, dt\Big\} \leqslant \sum_{H_2} \exp\Big\{-\int\limits_{\lambda_n^{(j)}/\delta}^{\lambda_n^{(j)}} t^{-2} (\lambda_n^{(j)} - t) \times$$

$$\times \ln n_j(At)\, c_j(t)\, dt\Big\} \leqslant \sum_{H_2} \exp\Big\{-c_j(\lambda_n^{(j)}/\delta) \ln n_j(\lambda_n^{(j)}) \int\limits_{\lambda_n^{(j)}/\delta}^{\lambda_n^{(j)}} t^{-2} (\lambda_n^{(j)} - t)\, dt\Big\} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{H_2} \exp\{-(\delta - 1 - \ln\delta) \ln(n+1)\} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} 1/((n+1)^{\delta - 1 - \ln\delta}) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=3}^{\infty} \int\limits_{n-1}^{n} t^{-\delta + 1 + \ln\delta} dt + 2^{-\delta + 1 + \ln\delta} < 1, \quad \delta > e^2.$$

Используя (7), имеем

$$\sigma_2(x_1, x_2)/\mu(x_1, x_2, F) \leqslant \sum_{H_2} \exp\Big\{-\int\limits_{\lambda^{(1)}}^{\lambda_n^{(1)}} t^{-2} (\lambda_n^{(1)} - t) \ln n_1(At)\, c_1(t)\, dt\Big\} \times$$

$$\times \sum_{H_4} \exp\Big\{-\int\limits_{\lambda^{(2)}}^{\lambda_m^{(2)}} t^{-2} (\lambda_m^{(2)} - t) \ln n_2(At)\, c_2(t)\, dt\Big\} < 1.$$

Аналогично получаем $\sigma_3(x_1, x_2)/\mu(x_1, x_2, F) < n_2(\eta\lambda^{(2)})$, $\sigma_4(x_1, x_2)/\mu(x_1, x_2, F) < n_1(\eta\lambda^{(1)})$. Значит, имеет место неравенство $\sum_{n,m=0}^{\infty} A_{n,m} \leqslant 4n_1(\eta\lambda^{(1)}) \times n_2(\eta\lambda^{(2)})\ \mu(x_1, x_2, F)$ откуда следует $M(x_1, x_2, F) \leqslant \sum_{n,m=0}^{\infty} A_{n,m} \leqslant 4n_1(\eta\lambda^{(1)})\ n_2(\eta\lambda^{(2)})\ \mu(x_1, x_2, F)$ или

$$\ln M(x_1, x_2, F) \leqslant \ln\mu(x_1, x_2, F) + \ln n_1(\eta\lambda^{(1)}) + \ln n_2(\eta\lambda^{(2)}) + \ln 4. \quad (14)$$

Из (7) при $n = m = 0$ следует

$$\ln\mu(x_1, x_2, F) \geqslant \int_0^{\lambda^{(1)}} t^{-1} \ln n_1(At)\, c_1(t)\, dt + \int_0^{\lambda^{(2)}} t^{-1} \ln n_2(At)\, c_2(t)\, dt, \quad (15)$$

откуда получаем

$$\ln\mu(x_1, x_2, F) \geqslant \int_{\eta\lambda^{(1)}/A}^{\lambda^{(1)}} t^{-1} \ln n_1(At)\, c_1(t)\, dt + \int_{\eta\lambda^{(2)}/A}^{\lambda^{(2)}} t^{-1} \ln n_2(At)\, c_2(t)\, dt \geqslant$$

$$\geqslant c_1(\eta\lambda^{(1)}/A) \ln n_1(\eta\lambda^{(1)}) \ln(A/\eta) + c_2(\eta\lambda^{(2)}/A) \ln n_2(\eta\lambda^{(2)}) \ln(A/\eta). \quad (16)$$

Из (14) и (16) имеем при $\nu_1 + \nu_2 \to +\infty$

$$(\ln M(x_1, x_2, F))/(\ln\mu(x_1, x_2, F)) \leqslant 1 + o(1) + (\ln n_1(\eta\lambda^{(1)}) + \ln n_2(\eta\lambda^{(2)}))/$$

$$/(c_1(\eta\lambda^{(1)}/A) \ln n_1(\eta\lambda^{(1)}) + c_2(\eta\lambda^{(2)}/A) \ln n_2(\eta\lambda^{(2)})) \ln(A/\eta).$$

Нетрудно убедиться в том, что третье слагаемое в правой части последнего неравенства стремится к 0, если $\nu_1 + \nu_2 \to +\infty$. Это можно сделать, например, рассмотрев отдельно случаи $\nu_1 \to +\infty$, $\nu_2 \leqslant q_2 < +\infty$; $\nu_1 \leqslant q_1 < +\infty$, $\nu_2 \to +\infty$; $\nu_1 \to +\infty$, $\nu_2 \to +\infty$.

По определению максимального члена $\mu(0, 0, F) \geqslant \mu(tx_1, tx_2, F) \times \exp\{-\lambda^{(1)}(tx_1, tx_2)\, tx_1 - \lambda^{(2)}(tx_1, tx_2)\, tx_2\}$. Отсюда при $t \to +\infty$ $(\ln\mu \times (tx_1, tx_2, F))/t + o(1) \leqslant \lambda^{(1)}(tx_1, tx_2)\, x_1 + \lambda^{(2)}(tx_1, tx_2)\, x_2$. Из последнего неравенства следует, что, если для фиксированных $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ при удалении в бесконечность вдоль луча $\{(r_1, r_2) \in \mathbb{R}^2 : r_1 = tx_1, r_2 = tx_2,\ t > 0\}$ отношение $(\ln\mu(tx_1, tx_2, F))/t$ стремится к бесконечности, то к бесконечности стремится и сумма $\nu_1(tx_1, tx_2) + \nu_2(tx_1, tx_2)$. Поскольку при $|u| \to \infty$

$$(\ln\mu(u_1, u_2, F))/|u| = (\ln|a| + \lambda^{(1)}u_1 + \lambda^{(2)}u_2)/|u| \leqslant O(1) +$$

$$+ (\lambda^{(1)}u_1 + \lambda^{(2)}u_2)/|u| \leqslant O(1) + \lambda^{(1)} + \lambda^{(2)},$$

то для завершения доказательства достаточности осталось показать, что при $(u_1, u_2) \in K$

$$(\ln\mu(u_1, u_2), F))/|u| \to \infty, |u| \to \infty. \quad (17)$$

Прежде всего заметим, что точки (u_1, u_2), для которых $\max\{u_1, u_2\} \leqslant 0$, углу K принадлежать не могут, поскольку в этом случае $\mu(tu_1, tu_2, F) = 0(1)$, $t \to \infty$. Обозначим через α и β угловые коэффициенты лучей, ограничивающих угол K. Выше было показано, что при фиксированной одной переменной $\mu(u_1, u_2, F)$ — неубывающая функция от другой переменной.

Пусть $u_1 \geqslant u_2$. Положим $u_1 = t$, $\gamma_1 = \max\{|\alpha|, 1\}$. Поскольку $(1, \alpha) \in K$, то, используя определение угла K, получаем

$$\frac{\ln\mu(u_1, u_2, F)}{|u|} = \frac{\ln\mu(u_1, (u_2/u_1)\, u_1, F)}{u_1\sqrt{1 + u_2^2/u_1^2}} \geqslant \frac{\ln\mu(u_1, \alpha u_1, F)}{u_1\sqrt{1 + \gamma_1^2}} =$$

$$= \frac{\ln\mu(t, \alpha t, F)}{t\sqrt{1 + \gamma_1^2}} \to \infty,\ t \to \infty.$$

Если же $u_1 < u_2$, то, как легко видеть, $\beta \neq 0$. Очевидно, что $(1/\beta, 1) \in K$. Обозначив $u_2 = t$, $\gamma_2 = \max\{1/|\beta|, 1\}$, будем иметь, пользуясь определением угла K,

$$\frac{\ln \mu(u_1, u_2, F)}{|u|} = \frac{\ln \mu((u_1/u_2)u_2, u_2, F)}{u_2\sqrt{1 + u_1^2/u_2^2}} \geqslant \frac{\ln \mu((1/\beta)u_2, u_2, F)}{u_2\sqrt{1+\gamma_2^2}} =$$

$$= \frac{\ln \mu((1/\beta)t, t, F)}{t\sqrt{1+\gamma_2^2}} \to \infty, \ t \to \infty.$$

4. Доказательство необходимости. Покажем, что, если хотя бы одно из условий (4) не выполняется, то существует функция F вида (2) и существует угол K, определенный выше, внутри которого при $|u| \to \infty$ равенство (3) не может выполнятся, какое бы ни было множество $E \subset C$. Пусть, например, первое из условий (4) не выполняется. Рассмотрим целую функцию $F(z_1, z_2) = F_1(z_1) F_2(z_2)$, где $F_1(z_1)$ определена в [4] (§ 4), а $F_2(z_2)$ — произвольная целая функция с положительными коэффициентами и такая, что

$$\ln \mu(x_1, F_2) = o(\ln \mu(x_1, F_1)), \ x_1 \to +\infty. \tag{18}$$

Поскольку $M(x_1, x_2, F) = M(x_1, F_1) M(x_2, F_2)$, $\mu(x_1, x_2, F) = \mu(x_1, F_1)\mu(x_2, F_2)$ и [4] (§ 4) $\ln M(x_1, F_1) > (1+h)\ln \mu(x_1, F_1)$, $h > 0$, то

$$\ln M(x_1, x_2, F) = \ln M(x_1, F_1) + \ln M(x_2, F_2) > (1+h)\ln \mu(x_1, F_1) +$$

$$+ \ln \mu(x_2, F_2) = (1+h)\ln \mu(x_1, x_2, F) - h\ln \mu(x_2, F_2),$$

откуда в силу (18) получаем при $(x_1, x_2) \in K = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 \leqslant x_1, x_1 > 0\}$, $x_1 \to +\infty$

$$(\ln M(x_1, x_2, F))/(\ln \mu(x_1, x_2, F)) > 1 + h - h/(1 + \ln \mu(x_1, F_1)/\ln \mu(x_2, F_2)) \geqslant$$

$$\geqslant 1 + h - h/(1 + \ln \mu(x_1, F_1)/\ln \mu(x_1, F_2)) = 1 + h + o(1).$$

Заметим, что

$$(\ln \mu(tx_1, tx_2, F))/t = (\ln \mu(tx_1, F_1))/t + (\ln \mu(tx_2, F_2))/t \geqslant O(1) +$$

$$+ ((\ln \mu(tx_2, F_2))/tx_2)x_2 \to \infty, \ t \to \infty.$$

На этом доказательство необходимости и всей теоремы завершается.

1. *Borel E.* Leçons sur les fonctions entières.— Paris: Gauthier — Villars, 1921.
2. *Sugimura K.* Übertagung einiger Sätze aus der Theorie der ganzen Funktionen auf Dirichletsche Reihe // Math. Z.— 1929.— **29**,— S. 264—277.
3. *Шеремета М. Н.* Аналоги теоремы Вимана для рядов Дирихле // Мат. сб.— 1979.— **110**, № 1.— С. 102—116.
4. *Скаскив О. Б.* О поведении максимального члена ряда Дирихле, задающего целую функцию // Мат. заметки.— 1985.— **37**, № 1.— С. 41—47.
5. *Hayman W. K.* The local growth of power series: a survey of the Wiman—Valiron method // Can. Math. Bull.— 1974.— **17**, N 3.— P. 317—358.
6. *Шеремета М. Н.* Метод Вимана — Валирона для рядов Дирихле // Укр. мат. журн.— 1978.— **30**, № 4.— С. 89—98.
7. *Шеремета М. О.* Асимптотические свойства целых функций, заданных рядами Дирихле, и их производных // Там же.— 1979.— **31**, № 6.— С. 723—730.
8. *Valiron G.* Sur un théorème de M. Hadamard // Bull. Sci. math.— 1923.— **47**, N 1.— P. 177—192.
9. *Gopala Krishna J.* Maximum term of a power series in one and several complex variables// Pasif. J. Math.— 1969.— **29**, N 3.— P. 609—622.
10. *Gopala Krishna J.* Probabilistic techniques leading to a Valiron type theorem in several complex variables // Ann. Math. Statist.— 1970.— **41**, N 6.— P.2126—2129.
11. *Маергойз Л. С.* Об одном результате Валирона // Теория функций, функцион. анализ и их прил.— 1978.— Вып. 29.— С. 89—98.
12. *Ронкин Л. И* Введение в теорию целых функции многих переменных.— М.: Наука, 1971.— 432 с.
13. *Битлян И. Ф., Гольдберг А. А.* Теорема Вимана—Валирона для целых функций многих комплексных переменных // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. мат., мех. и астрон.— 1959.— Вып. 2, № 13.— С. 27—41.

Львов

Получено 13.10.86