УДК 517.9:519.46

А. Г. НИКИТИН, д-р физ.-мат. наук (Ин-т математики АН УССР, Киев)

Обобщенные тензоры Киллинга произвольного ранга и порядка

Дано определение тензоров Киллинга и конформных тензоров Киллинга произвольного ранга и порядка, естественно обобщающее понятие вектора Киллинга. Найден явный вид соответствующих тензоров для плоского пространства де Ситтера размерности $p+q=m$, $m \leqslant 4$, что позволило вичислить полные наборы операторов симметрии произвольного порядка n для скалярного волнового уравнения с m независимыми переменными.

Дається означення тензорів Кіллінга та конформних тензорів Кіллінга довільного рангу та порядку, яке природньо узагальнює поняття вектора Кіллінга. Знайдено явний вигляд відповідних тензорів для плоского простору де Сіттера розмірності $p+q=m$, $m \leqslant 4$, що дозволило знайти повні набори операторів симетрії довільного порядку n для скалярного хвильового рівняння з m незалежними змінними.

1. Введение. В последние годы классический теоретико-групповой подход [1] все чаще уступает место более современным методам исследования симметрии дифференциальных уравнений. В частности, все большее внимание уделяется изучению операторов симметрии высших порядков, являющихся естественным обобщением генераторов групп Ли и несущих важную информацию о скрытой симметрии уравнения. Эти операторы используются при описании систем координат, в которых уравнение допускает решения в разделяющихся переменных [1—4], при исследовании ненетеровских законов сохранения и т. д. [5].

Известно, что описание операторов симметрии первого порядка (генераторов групп Ли) базируется на вычислении явного вида вектора Киллинга [6, 7], соответствующего пространству независимых переменных. Операторам симметрии высших порядков соответсвуют более сложные структуры, которые будем называть тензорами (или конформными тензорами) Киллинга ранга j и порядка s (j, $s = 1, 2, \ldots$).

В настоящей статье дается определение упомянутых тензоров как полного набора линейно независимых решений некоторой переопределенной системы уравнений в частных производных, и найден их явный вид для всех случаев, когда число независимых переменных m не превышает четырех.

Полученные результаты могут быть использованы при исследовании высших симметрий широкого класса уравнений математической физики, включающих m независимых переменных. В качестве примера (представляющего самостоятельный интерес) в статье найден полный набор операторов симметрии произвольного порядка n для скалярного волнового уравнения в m-мерном пространстве.

2. Операторы симметрии волнового уравнения. Для того чтобы естественно подойти к определениям тензоров Киллинга произвольного ранга и порядка, сформулируем задачу описания операторов симметрии произвольного порядка $n = 1, 2, \ldots$ для волнового уравнения

$$L\varphi \equiv (g_{\mu\nu}\partial^\mu\partial^\nu - \varkappa^2)\,\varphi = 0, \quad \partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu}, \tag{1}$$

где $\varkappa$ — вещественный параметр, $g_{\mu\nu}$ — метрический тензор, ненулевые элементы которого равны $g_{00} = -g_{11} = -g_{22} = \ldots = 1$, μ, $\nu = 0, 1, \ldots,$

..., $m-1$, $m \leqslant 4$, по повторяющимся индексам подразумевается суммирование.

Для поставленных целей достаточно рассмотреть только такие решения уравнений (1), которые определены на некотором открытом множестве D m-мерного многообразия R_m, состоящего из точек с координатами $(x_0, x_1, \dots$, $\dots, x_{m+1})$, и аналитичны относительно вещественных переменных $x_0, \dots$, $\dots, x_{m+1}$. Пространство решений уравнения (1) при фиксированном D обозначим символом $\mathcal{F}_0$.

Пусть $\mathcal{F}$ — векторное пространство всех комплекснозначных функций, которые определены на D и являются вещественно-аналитическими, а L — линейный дифференциальный оператор (1), определенный на $\mathcal{F}$. Тогда $L\varphi \in \mathcal{F}$, если $\varphi \in \mathcal{F}$, а $\mathcal{F}_0$ — нуль-пространство (ядро) оператора L.

Пусть $\mathfrak{M}_n$ — множество (класс) линейных дифференциальных операторов порядка n, определенных на $\mathcal{F}$. Тогда оператор симметрии $Q \in \mathfrak{M}_n$ уравнения (1) определяется следующим образом.

Определение 1. *Линейный дифференциальный оператор Q порядка n*

$$Q = \sum_{i=0}^{n} h_{a_1 a_2 \dots a_i} \partial^{a_1} \partial^{a_2} \dots \partial^{a_i}, \quad h_{a_1 a_2 \dots a_i} \in \mathcal{F}, \tag{2}$$

называется оператором симметрии уравнения (1) *в классе* $\mathfrak{M}_n$ (*или оператором симметрии порядка* n), *если*

$$[Q, L] = \alpha_Q L, \quad \alpha_Q \in \mathfrak{M}_{n-1}, \tag{3}$$

где $[Q, L] = QL - LQ$ — *коммутатор операторов* L *и* Q.

В случае $n = 1$ определенные выше операторы симметрии могут интерпретироваться как генераторы группы инвариантности уравнения (1). Операторы симметрии порядка $n > 1$ не являются генераторами группы Ли и определяют обобщенную (нелиевскую) симметрию. Задача описания полного набора операторов симметрии порядка n для уравнения (1) сводится к нахождению общего решения операторных уравнений (3).

3. Тензоры Киллинга ранга j и порядка s. Все операторы, входящие в уравнение (3), удобно представить в виде суммы j-кратных антикоммутаторов

$$Q = \sum_{j=0}^{n} \hat{Q}_j, \quad \alpha_Q = \sum_{j=0}^{n-1} \hat{\alpha}_j, \quad \alpha_Q L = \frac{1}{4} [[\alpha_Q, \partial^\mu]_+, \partial_\mu]_+ + \frac{1}{2} [(\partial^\mu \alpha_Q), \partial_\mu]_+, \tag{4}$$

где

$$\begin{gathered} \hat{Q}_j = [[\dots [F^{a_1 a_2 \dots a_j}, \partial_{a_1}]_+, \partial_{a_2}]_+, \dots, \partial_{a_j}]_+, \\ \hat{\alpha}_j = [[\dots [\alpha^{a_1 a_2 \dots a_j}, \partial_{a_1}]_+, \partial_{a_2}]_+, \dots, \partial_{a_j}]_+, \\ [A, B]_+ = AB + BA, \end{gathered} \tag{5}$$

$F^{a_1 a_2 \dots a_j}$ и $\alpha^{a_1 a_2 \dots a_j}$ — неизвестные функции, представляющие собой симметричные тензоры ранга j. Раскрывая антикоммутаторы и перенося операторы коммутирования вправо, операторы (4) всегда можно свести к эквивалентной форме (2).

Подставляя (4), (5) в (3) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях операторов дифференцирования, приходим при $x^2 \neq 0$ к следующей системе уравнений:

$$\partial^{(a_{j+1}} F^{a_1 a_2 \dots a_j)} = 0; \tag{6}$$

$$\alpha^{a_1 a_2 \dots a_{j-1}} = 0, \tag{7}$$

где $F^{a_1 a_2 \dots a_j}$ и $\alpha^{a_1 a_2 \dots a_{j-1}}$ — симметричные тензоры ранга j, под индексами заключенными в круглые скобки, подразумеваем симметризацию: $\partial^{(a_{j+1}} F^{a_1 a_2 \dots a_j)} = \partial^{a_{j+1}} F^{a_1 a_2 \dots a_j} + \partial^{a_1} F^{a_{j+1} a_2 \dots a_j} + \partial^{a_2} F^{a_1 a_{j+1} a_3 \dots a_j} + \dots + \partial^{a_j} \times$ $\times F^{a_1 a_2 \dots a_{j-1} a_{j+1}}$.

Если же $\varkappa^2 = 0$, то уравнения для коэффициентов оператора симметрии принимают вид

$$\partial^{(a_{j+1}}\widetilde{F}^{a_1a_2\dots a_j)} - \frac{2}{m+2(j-1)}\,\partial_b\widetilde{F}^{b(a_1a_2\dots a_{j-1}}g^{a_ja_{j+1})} = 0, \qquad (8)$$

$$\widetilde{\alpha}^{a_1a_2\dots a_{j-1}} = \frac{2}{m+2(j-1)}\,\partial_b\widetilde{F}^{b(a_1a_2\dots a_{j-1}}g^{a_ja_{j+1})}, \qquad (9)$$

где $\widetilde{F}^{a_1a_2\dots a_j}$ и $\widetilde{\alpha}^{a_1a_2\dots a_{j-1}}$ — симметричные бесследовые тензоры, m — число независимых переменных.

Итак, задача описания операторов симметрии порядка n, допускаемых волновым уравнением (1), сводится к нахождению общего решения системы (6) или (8). В случае $j = 1$ системы (6), (8) совпадают с уравнениями Киллинга [6, 7].

При исследовании операторов симметрии высших порядков, допускаемых системами уравнений в частных производных, возникают более общие, чем (6), (8), уравнения для коэффициентов таких операторов [5]:

$$\partial^{(a_{j+1}}\partial^{a_{j+2}}\dots\partial^{a_{j+s}}F^{a_1a_2\dots a_j)} = 0 \qquad (10)$$

и

$$[\partial^{(a_{j+1}}\partial^{a_{j+2}}\dots\partial^{a_{j+s}}\widetilde{F}^{a_1a_2\dots a_j)}]^{SL} = 0, \qquad (11)$$

где символ $[\cdot]^{SL}$ обозначает бесследовую часть тензора в квадратных скобках

$$[G^{(a_1a_2\dots a_R)}]^{SL} = G^{(a_1a_2\dots a_R)} + \sum_{\alpha=1}^{\{R/2\}}(-1)^\alpha K_\alpha\left(\prod_{i=1}^{\alpha} g^{(a_{2i-1}a_{2i}}\right)\times$$
$$\times G^{a_{2\alpha+1}\dots a_R)b_1b_2\dots b_{2\alpha}}g_{b_1b_2}g_{b_3b_4}\dots g_{b_{2\alpha-1}b_{2\alpha}}, \qquad (12)$$

$$K_\alpha = \frac{n!}{(n-2\alpha)!\,2^{\alpha-1}}\prod_{i=1}^{\alpha}\frac{1}{2(n-i)+m-2}, \qquad (13)$$

где $\{R/2\}$ — целая часть числа $R/2$.

В случае $s = 1$ уравнения (10) и (11) сводятся к уравнениям (6) и (8) соответственно.

Определение 2. *Симметричный тензор* $F^{a_1a_2\dots a_j}$, *удовлетворяющий системе* (10), *будем называть тензором Киллинга ранга j и порядка s. Симметричный бесследовый тензор* $\widetilde{F}^{a_1a_2\dots a_j}$, *удовлетворяющий системе уравнений* (11), *будем называть конформным тензором Киллинга ранга j и порядка s.*

В случае $s = 1$ сформулированные определения сводятся к приведенным в [8].

4. Явный вид тензоров Киллинга произвольного ранга j и порядка $s = 1$. Найдем общее решение системы (6). Эта система переопределена, включая C_{j+m}^{j+1} уравнений для C_{j+m-1}^{j} неизвестных (C_b^a — число сочетаний из b элементов по a).

Рассмотрим набор дифференциальных следствий системы (6), получаемых последовательным дифференцированием каждого члена по $x_{b_1}, x_{b_2}, \dots$:

$$\partial^{b_1}\partial^{b_2}\dots\partial^{b_k}\partial^{(a_{j+1}}F^{a_1a_2\dots a_j)} \equiv F^{(a_1a_2\dots a_j,a_{j+1})b_1b_2\dots b_k} = 0 \qquad (14)$$

(индексы после запятой обозначают производные по соответствующему аргументу).

Формула (14) задает систему линейных однородных алгебраических уравнений для неизвестных $F^{a_1a_2\dots a_j,a_{j+1}b_1b_2\dots b_k}$, причем количества уравнений (N_y^k) и неизвестных (N_H^k) равны

$$N_y^k = C_{j+m}^{j+1}C_{k+m-1}^{k}, \quad N_H^k = C_{j+m-1}^{j}C_{m+k}^{k+1}.$$

Очевидно, $N_y^k < N_n^k$, $k < j$; $N_y^k = N_H^k$, $k = j$.

Лемма 1. *Система линейных алгебраических уравнений* (14) *невырождена.*

Доказательство приведено в [9].

В силу изложенного выше заключаем, что при $k = j$ система (14) имеет только тривиальные решения, следовательно, $F^{a_1 a_2 \ldots a_j}$ являются полиномами порядка j. Согласно (15) такие полиномы включают $\hat{N}_j^m$ произвольных параметров, где

$$\hat{N}_j^m = \sum_{k=0}^{j} (N_H^k - N_y^k) = \frac{1}{m} C_{j+m-1}^{m-1} C_{j+m}^{m-1}. \tag{16}$$

Лемма 2. *Общее решение уравнений* (6) *можно представить в виде*

$$F^{a_1 a_2 \ldots a_j} = \sum_{c=0}^{j} \lambda^{a_1 a_2 \ldots a_c [a_{c+1} b_1] \ldots [a_j b_{j-c}]} x_{b_1} x_{b_2} \ldots x_{b_{j-c}}, \tag{17}$$

где $\lambda^{a_1 \ldots [a_j b_{j-c}]}$ — *произвольные параметры, представляющие собой тензоры, симметричные относительно перестановок индексов* a_μ *и* a_ν, $\mu, \nu = 1, 2, \ldots, c$, *антисимметричные относительно перестановок индексов* a_{c+i} и b_i, $1 \leqslant i \leqslant j - c$, *и, кроме того, циклическая перестановка по любой тройке индексов равна нулю.*

Доказательство сводится к проверке справедливости уравнений (6) для функций (17) и подсчету числа независимых параметров $\lambda^{a_1 a_2 \ldots a_c [a_{c+1} b_1] \ldots [a_j b_{j-c}]}$, которое совпадает с задаваемым формулой (16).

Разлагая тензоры $\lambda^{a_1 \ldots a_c [a_{c+1} b_1] \ldots [a_j b_{j-c}]}$ на неприводимые (т. е. в дополнение к перечисленным в лемме 2 свойствам имеющие нулевые следы по любой паре индексов), приходим к следующему представлению решений системы (6):

$$F^{a_1 a_2 \ldots a_j} = g^{(a_{j-1} a_j} F^{a_1 a_2 \ldots a_{j-2})} + f^{a_1 a_2 \ldots a_j}, \tag{18}$$

где $F^{a_1 a_2 \ldots a_{j-2}}$ — общее решение уравнений (6) для $j \to j - 2$, а $f^{a_1 \ldots a_j}$ — решение уравнений (6), зависящее от $\hat{N}_j^m - \hat{N}_{j-2}^m$ произвольных параметров, явный вид которого приведен далее.

1. $m = 1$, $f^{a_1 a_2 \ldots a_j}$ сводится к скаляру, не зависящему от единственной имеющейся переменной.

2. $m = 2$, число линейно независимых решений $f^{a_1 a_2 \ldots a_j}$ равно $N_j^2 - N_{j-2}^2 = 2j + 1$. Решения нумеруются целыми числами c, $0 \leqslant c \leqslant j$, и включают при $c = 0$ один, а при $c > 0$ два произвольных параметра, задающих независимые компоненты симметричного бесследового тензора $\lambda^{a_1 a_2 \ldots a_{j-c}}$ ранга $j - c$. Явный вид $f^{a_1 a_2 \ldots a_j}$ задается формулой

$$f^{a_1 a_2 \ldots a_j} = \varepsilon_c \hat{f}_c^{a_1 a_2 \ldots a_j} + (1 - \varepsilon_c)\, \hat{f}_c^{(a_1 a_2 \ldots a_{j-1} \varepsilon^{a_j) b}} x_b,$$

где $\varepsilon^{a_j b}$ — единичный антисимметричный тензор, $\varepsilon_c = \frac{1}{2}(1 - (-1)^c)$,

$$\hat{f}_c^{a_1 a_2 \ldots a_j} = \lambda^{(a_1 a_2 \ldots a_{j-c}} \sum_{\mu=0}^{\{c/2\}} \Big(\prod_{i=j-c+1}^{j-c+2\mu} x^{a_i} \Big)^{*} \Big(\prod_{k=(j-c)/2+\mu+1}^{\min(\{j/2\}, \{(j+1)/2\} - l)} g^{a_{2k} a_{2k+l})} \Big)^{*} \times$$
$$\times (-1)^\mu C_{\{c/2\}}^{\mu} (x^2)^{\{c/2\} - \mu}, \tag{19}$$

$$x^2 = g^{ab} x_a x_b, \quad l = (-1)^{j+c+1}, \ \Big(\prod_{\lambda=A}^{B} \varphi_\lambda \Big)^{*} = \begin{cases} \prod_{\lambda=A}^{B} \varphi_\lambda, & B \geqslant A, \\ 1, & B < A, \end{cases}$$

по индексам $(a_1, a_2 \ldots a_j)$ в правой части (19) подразумевается симметризация.

3. $m=3$, число независимых решений равно $\hat{N}_j^3 - \hat{N}_{j-2}^3 = \frac{1}{3}(j+1)(2j^2+4j+3)$. Решения нумеруются парами целых чисел $c=(c_1, c_2)$, удовлетворяющих условиям

$$0 \leqslant c_1 \leqslant 2\{j/2\}, \quad \varepsilon_{c_1} \leqslant c_2 \leqslant j - 2\{(c_1+1)/2\} \tag{20}$$

и включают при каждом c набор $2j-2c_1+1$ произвольных параметров, задающих независимые компоненты симметричного бесследового тензора $\lambda_c^{a_1a_2\ldots a_{j-c_1}}$ ранга $j-c_1$. Явный вид соответствующих решений задается формулой

$$f_c^{a_1a_2\ldots a_j} = \varepsilon_{c_2}\hat{f}_{c_1c_2}^{a_1a_2\ldots a_j} + (1-\varepsilon_{c_2})\hat{f}_{c_1c_2}^{b(a_1a_2\ldots a_{j-1}}\varepsilon_b^{a_j)c}x_c,$$

где $\varepsilon_b^{a_jc}$ — единичный антисимметричный тензор,

$$\hat{f}_{c_1c_2}^{a_1a_2\ldots a_j} = \sum_{\mu} K_\mu \lambda_c^{B_\mu, A_\mu}\Big(\prod_{i=A_\mu+1}^{A_\mu+L_\mu} x^{a_i}\Big)^* (x^2)^{F_\mu}\Big(\prod_{k=\{(A_\mu+L_\mu)/2\}+1}^{\min(\{j/2\},\{(j+1)/2\}-l)} g^{a_{2k}a_{2k+l}}\Big)^*. \tag{21}$$

Здесь

$$\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5), \quad x^2 = g^{ab}x_ax_b,$$

$$K_\mu = (-1)^{\mu_1+\mu_3+\mu_5}2^{\mu_3}\frac{r!}{\mu_2!\,\mu_3!\,\mu_4!}C_{\{c_1/2\}}^{\mu_1}, \quad r=\{c_2/2\},$$

$$A_\mu = j - c_1 - B_\mu, \quad B_\mu = 2\mu_2+\mu_3+\mu_5, \quad l=(-1)^{c_2+j+1}, \tag{22}$$

$$L_\mu = c_1+\mu_3-2\mu_1-\mu_5, \quad F_\mu = \mu_1+\mu_4,$$

$$\lambda^{B_\mu, A_\mu} = \lambda^{b_1b_2\ldots b_{B_\mu}a_1a_2\ldots a_{A_\mu}}x_{b_1}x_{b_2}\ldots x_{b_{B_\mu}}.$$

Суммирование в (21) ведется по всем возможным неотрицательным целым значениям μ, удовлетворяющим условиям

$$0 \leqslant \mu_1 \leqslant \{c_1/2\}, \quad \mu_2+\mu_3+\mu_4 = \{c_2/2\}, \quad 0 \leqslant \mu_5 \leqslant \varepsilon_{c_1}. \tag{23}$$

4. $m=4$, число независимых решений равно $\hat{N}_j^4 - \hat{N}_{j-2}^4 = \frac{1}{4!}(j+1)\times(j+2)(2j+3)(j^2+3j+4)$. Решения нумеруются тройками целых чисел, $c=(c_1, c_2, c_3)$, удовлетворяющих условиям (20), $0 \leqslant c_3 \leqslant j - 2\times\left\{\frac{c_1+1}{2}\right\} - 2c_2$, и включают при каждом c набор N_c произвольных параметров (задающих независимые компоненты неприводимого тензора $\lambda^{b_1b_2\ldots a_1a_2\ldots[a_{A_\mu+D_c}d_{D_c}]}$), где

$$N_c = \begin{cases} (j-c_1-c_2+1)^2, & c_3=0; \\ 2(j-c_1-c_2+1)(j-c_1-c_2+2c_3+1), & c_3 \neq 0. \end{cases}$$

Явные выражения соответствующих решений задаются формулами

$$f_c^{a_1a_2\ldots a_j} = \sum_\mu K_\mu \lambda^{B_\mu, A_\mu, c_3}\Big(\prod_{i=A_\mu+c_3+1}^{A_\mu+L_\mu+c_3} x^{a_i}\Big)^* \times$$

$$\times\Big(\prod_{k=\{(A_\mu+L_\mu+c_3)/2\}+1}^{\{j/2\}} g^{a_{2k}a_{2k+l}}\Big)^*(x^2)^{F_\mu}, \tag{24}$$

где μ, x^2, K_μ, B_μ, L_μ, F_μ приведены в (22), (23),

$$l=(-1)^{j+1}, \; A_\mu = j - c_1 - b_\mu - c_3,$$

$$\lambda^{B_\mu, A_\mu, c_s} = x_{b_1} x_{b_2} \ldots x_{b_{B_\mu}} x_{d_1} x_{d_2} \ldots x_{d_{c_s}} \times$$
$$\times \lambda^{b_1 b_2 \ldots b_{B_\mu} (a_1 a_2 \ldots a_{A_\mu} [a_{A_\mu+1} d_1][a_{A_\mu+2} d_2] \ldots [a_{A_\mu+c_s} d_{c_s}]},$$

по индексам $a_1 a_2 \ldots a_j$ в правой части (24) подразумевается симметризация.

Приведенные результаты сформулируем в виде следующего утверждения.

Теорема. *Уравнения* (6) *имеют* $\hat{N}_j^m$ *линейно независимых решений, являющихся полиномами порядка j. Явный вид этих решений задается формулами* (18)—(24), *а* $\hat{N}_j^m$ — *формулой* (16).

Итак, мы нашли в явном виде все линейно независимые тензоры Киллинга первого порядка и произвольного ранга, зависящие от m переменных ($m \leqslant 4$).

Обратимся теперь к конформным тензорам Киллинга первого порядка и произвольного ранга, которые по определению являются решениями уравнений (8). Поскольку анализ этих уравнений в принципе аналогичен анализу систем (6), приведем без доказательства явный вид общего решения этих уравнений для $m \leqslant 4$.

Случай $m = 1$ тривиален: соответствующее решение сводится к произвольной константе.

В случае $m = 2$ соотношения (8) сводятся к уравнениям Коши — Римана. Соответствующие решения определены с точностью до произвольных аналитических функций $\varphi(x_0, x_1)$, $\tilde{\varphi}(x_0, x_1)$:

$$j = 0, \quad \tilde{F} = \varphi_0; \qquad j > 0, \quad \tilde{F}^{11\ldots1} = (\varphi_j + \varphi_j^*) + i(\tilde{\varphi}_j + \tilde{\varphi}_j^*),$$
$$\tilde{F}^{11\ldots12} = \tilde{\varphi}_j - \tilde{\varphi}_j^* + i(\varphi_j - \varphi_j^*), \tag{25}$$

остальные компоненты $F^{a_1 a_2 \ldots a_j}$ выражаются через (25) с использованием свойств бесследовости и симметричности.

Для $m = 3$ число независимых решений равно $\frac{1}{3}(j+1)(2j+1)(2j+3)$. Решения нумеруются парами целых чисел $c = (c_1, c_2)$, где $0 \leqslant c_1 \leqslant j$, $0 \leqslant c_2 \leqslant 2c_1$ и содержат $2c_1 + 1$ произвольных параметров, задающих независимые компоненты симметричного бесследового тензора $\lambda^{a_1 \ldots a_j}$. Явный вид соответствующих решений задается формулой

$$\tilde{F}_c^{a_1 a_2 \ldots a_j} = [\varepsilon_{c_2} f_{c_1 c_2}^{a_1 a_2 \ldots a_j} + (1 - \varepsilon_{c_2}) f_{c_1 c_2 - 1}^{b(a_1 a_2 \ldots a_{j-1} a_j)} \varepsilon_b^c x_c]^{SL}, \tag{26}$$

где

$$f_{c_1 c_2}^{a_1 a_2 \ldots a_j} = \sum_{k=0}^{\{c_2/2\}} (-2)^k C_k^{\{c_2/2\}-k} \lambda^{b_1 b_2 \ldots b_k (a_1 a_2 \ldots a_{c_1 - k}} x^{a_{c_1-k+1}} x^{a_{c_1-k+2}} \ldots$$
$$\ldots x^{a_j)} x_{b_1} x_{b_2} \ldots x_{b_k} (x^2)^{(\{c_2/2\}-k)}. \tag{27}$$

Для $m = 4$ число независимых решений уравнений (8) равно $\frac{1}{12}(j+1)^2 (j+2)^2 (2j+3)$. Решения нумеруются тройками целых чисел $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, c_3)$, удовлетворяющих условиям

$$0 \leqslant c_1 \leqslant j, \quad -c_1 \leqslant c_2 \leqslant c_1, \quad 0 \leqslant c_3 \leqslant \{(c_1 - |c_2|)/2\}, \tag{28}$$

и содержат при каждом c N_c произвольных параметров, где

$$N_c = \begin{cases} (|c_2| + 1)^2, & c_1 = |c_2|, \\ 2(|c_2| + 2c_3 + 1)(2c_1 - |c_2| - 2c_3 + 1), & c_1 \neq |c_2|. \end{cases}$$

Эти параметры задают независимые компоненты неприводимого тензора

$\lambda^{b_1 \ldots [a_{c_1-m+i+2c_3} d_{c_1-|c_2|}]}$ ранга R_1+2R_2, где $R_1=|c_2|+2c_3$, $R_2=c_1-|c_2|-2c_3$.

Явные выражения для соответствующих решений имеют вид

$$\widetilde{F}_c^{a_1a_2\ldots a_j}=\Big[\sum_{i=0}^{k+2c_3}(-1)\,C^i_{k+2c_3}x^{2i}\times$$

$$\times\lambda^{b_1b_2\ldots b_{k+2c_3-i}(a_1a_2\ldots a_{|c_2|-k+i}[a_{|c_2|-k+i+1}d_1]\ldots[a_{|c_1|-k-2c_3+i}d_{c_1-|c_2|}]}\times$$

$$\times x^{a_{c_1-k+i+1}}x^{a_{c_1-k+i+2}}\ldots x^{a_j)}x_{b_1}x_{b_2}\ldots x_{k+2c_3+i}x_{d_1}x_{d_2}\ldots x_{d_{c_1-|c_2|}}\Big]^{SL},\qquad(29)$$

где $k=-c_2$, $c_2<0$ и $k=0$, $c_2\geqslant 0$. По индексам $a_1\ldots a_j$ в правой части (29) подразумевается симметризация.

5. Явный вид тензоров Киллинга произвольного порядка. Для полного описания тензоров Киллинга произвольного порядка необходимо найти общее решение системы (10). По аналогии с изложенным в предыдущем пункте для уравнения (6) (подробности см. в [9]) заключаем, что каждое такое решение является полиномом порядка не выше $\hat{N}^{sj}$ и содержит N^{sj}_m произвольных параметров, где

$$\hat{N}^{sj}=j+s-1,\quad N^{sj}_m=\frac{s}{m}C^{m-1}_{j+m-1}C^{m-1}_{j+s+m-1}.$$

Явный вид соответствующих решений может быть задан формулой [9]

$$F^{a_1a_2\ldots a_j}_{(s)}=\sum_{\alpha=1}^{s}F^{a_1a_2\ldots a_{j+\alpha-1}}x^{a_{j+1}}x^{a_{j+2}}\ldots x^{a_{j+\alpha-1}}+g^{(a_{j-1}a_j}F^{a_1a_2\ldots a_{j-2})}_{(s)}+$$

$$+\varepsilon_j\hat{f}^{a_1a_2\ldots a_j},\qquad(30)$$

где $F^{a_1a_2\ldots a_{j+\alpha-1}}$ — тензоры Киллинга ранга $j+\alpha-1$ первого порядка, явный вид которых задается в приведенной выше теореме, $F^{a_1a_2\ldots a_{j-2}}_{(s)}$ — тензор Киллинга ранга $j-2$ и порядка s,

$$\hat{f}^{a_1a_2\ldots a_j}=\sum_{\mu=0}^{\{j/2\}-1}(-1)^\mu C^\mu_{\{j/2\}-1}x^{(a_1}x^{a_2}\ldots x^{a_{2\mu}}g^{a_{2\mu+1}a_{2\mu+2}}g^{a_{2\mu+3}a_{2\mu+4}}\ldots$$

$$\ldots g^{a_{j-2}a_{j-1}}\lambda^{[a_j)c]}x_c,$$

$\lambda^{[a_jc]}$ — произвольный антисимметричный тензор второго ранга.

Формула (30) задает рекуррентные соотношения для вычисления явного вида тензора Киллинга порядка s и ранга j по известным тензорам ранга $j+\alpha-1$ первого порядка и ранга $j-2$ и порядка s. Такое вычисление нетрудно провести, используя явные выражения тензоров Киллинга первого порядка, приведенные в предыдущем пункте.

Приведем явные выражения для векторов Киллинга порядка $s\leqslant 3$ в трехмерном пространстве, получаемые из соотношений (30):

$$F^a_{(1)}=\lambda^a+\varepsilon^{abc}\eta_bx_c;$$

$$F^a_{(2)}=F^a_{(1)}+\lambda^{ab}x_b+\lambda x^a+\xi^ax^2-x^a\xi^bx_b+\varepsilon^{abc}\eta_{bd}x_cx^d;$$

$$F^a_{(3)}=F^a_{(2)}+\lambda^{abc}x_bx_c+x^a\eta^bx_b+\varepsilon^{abc}x_b\eta_cx^2+\varepsilon^{abc}\eta_{bdf}x_cx^dx^f+$$

$$+\xi^{ab}x_bx^2-x^a\xi^{bc}x_bx_c.$$

Здесь ε^{abc} — единичный антисимметричный тензор, другими греческими буквами обозначены произвольные параметры, образующие симметричные бесследовые тензоры.

Конформные тензоры произвольного ранга j и порядка s определяются как общие решения системы (11). Аналогично изложенному в п. 4 можно показать, что такие тензоры являются полиномами по x_a порядка $2(j+s-1)$. Приведем без доказательства явный вид этих тензоров для произвольных j, s и $m \leqslant 4$.

Количество линейно независимых решений для $m = 3, 4$ задаются формулами

$$m=3, \quad N_3^{sj} = \frac{s}{6}(2j+1)(2j+2s+1)(2j+s+1);$$

$$m=4, \quad N_4^{sj} = \frac{s}{12}(j+1)^2(j+s+1)^2(2j+s+2),$$

а для $m = 2$ решений оказывается бесконечно много. Явные выражения решений имеют вид [9]

$$\widetilde{F}_{(s)}^{a_1a_2\ldots a_j} = \sum_{i=0}^{s}\left(\widetilde{F}_i^{a_1a_2\ldots a_j}x^{2(i-1)} + \sum_{\alpha=0}^{s-i} f_{i-1\alpha}^{a_1a_2\ldots a_j}x^{2\alpha}\right), \tag{31}$$

где $\widetilde{F}_i^{a_1a_2\ldots a_j}$ — конформные тензоры первого порядка, задаваемые формулами (26), (29), $f_{i-1\alpha}^{a_1a_2\ldots a_j}$ — тензоры ранга j, явный вид которых приведен далее.

В случае $m = 2$ $f_{i-1\alpha}^{a_1a_2\ldots a_j} = 0$. Для $m = 3$ независимые функции $f_{i-1\alpha}^{a_1a_2\ldots a_j}$ нумеруются целыми числами c, $0 \leqslant c \leqslant 2j$, и определяются с точностью до произвольного симметричного бесследового тензора $\lambda^{a_1\ldots a_{2c+2j-1}}$. Явный вид этих функций задается формулой

$$f_{i\alpha}^{a_1a_2\ldots a_j} = [\varepsilon_c\hat{f}_{i\alpha c}^{a_1a_2\ldots a_j} + (1-\varepsilon_c)\hat{f}^{b(a_1a_2\ldots a_{j-1}}\varepsilon_b^{a_j)c}x_c]^{SL}, \tag{32}$$

где

$$\hat{f}_{i\alpha c}^{a_1a_2\ldots a_j} = \sum_{n=0}^{\{c/2\}}(-2)^nC_n^{\{c/2\}-n}\lambda^{b_1b_2\ldots b_{\alpha+n}(a_1a_2\ldots a_{j-n}}x^{a_{j-n+1}}x^{a_{j-n+2}}\ldots$$

$$\ldots x^{a_j)}x_{b_1}x_{b_2}\ldots x_{b_{\alpha+n}}(x^2)^{(\{c/2\}-n)}.$$

В случае $m = 4$ функции $f_{i\alpha}^{a_1a_2\ldots a_j}$ характеризуются парой дополнительных целых чисел $c = (c_1, c_2)$, $-j \leqslant c_1 \leqslant j$, $0 \leqslant c_2 \leqslant \{(j-|c_1|)/2\}$, и определяются с точностью до произвольного неприводимого тензора $\lambda^{b_1\ldots[a_{j-n+i}d_{j-|c_1|}]}$ ранга $R_1 + 2R_2$, где $R_1 = |c_1| + 2c_2 + \alpha$, $R_2 = j - [c_1]$. Явный вид этих функций задается формулой

$$f_{i\alpha}^{a_1a_2\ldots a_j} = \Big[\sum_{\alpha=0}^{n+2c_2}(-1)^\alpha C_{n+2c_2}^\alpha x^{2\alpha}\times$$

$$\times\lambda^{b_1b_2\ldots b_{n+2c_2-i+\alpha}(a_1a_2\ldots a_{|c_1|-n+i}[a_{|c_1|-n+i}d_1]\ldots[a_{j-n+i}d_{j-|c_1|}]}x^{a_{j-n+i+1}}x^{a_{j-n+i+2}}\ldots$$

$$\ldots x^{a_j)}x_{b_1}x_{b_2}\ldots x_{b_{n+2c_2+\alpha-i}}x_{d_1}x_{d_2}\ldots x_{d_{j-|c_1|}}, \tag{33}$$

где $n = -c_1$, $c_1 < 0$ и $n = 0$, $c_1 \geqslant 0$, по индексам $a_1 \ldots a_j$ в правой части (33) подразумевается симметризация.

Приведем явный вид конформных векторов Киллинга порядка $s \leqslant 3$, для $m = 3$, получаемых из (32):

$$\widetilde{F}_{(1)}^a = \lambda_{(1)}^a + \varepsilon_b^{ac}\eta_{(1)}^bx_c + \xi_{(1)}^ax^2 - 2x^a\xi_{(1)}^bx_b + \mu_{(1)}x^a,$$

$$\widetilde{F}_{(2)}^a = \widetilde{F}_{(1)}^a + \widetilde{F}'^a_{(1)}x^2 + \lambda_{(2)}^{ab}x_b + \varepsilon_b^{ac}\eta_{(2)}^{bd}x_cx_d + \xi_{(2)}^{ab}x_bx^2 - 2x^a\xi_{(2)}^{bc}x_bx_c,$$

$$\widetilde{F}^a_{(3)} = \widetilde{F}^a_{(2)} + \widetilde{F}'^a_{(1)} x^4 + x^2 (\lambda^{ab}_{(3)} x_b + \varepsilon^{ac}_b \eta^{bd}_{(3)} x_c x_d + \xi^{ab}_{(3)} x_b x^2 - 2x^a \xi^{bc}_{(3)} x_b x_c) +$$
$$+ \lambda^{abc}_{(3)} x_b x_c + \varepsilon^{ac}_b \eta^{b\alpha k}_{(3)} x_c x_d x_k + \xi^{abc}_{(3)} x_b x_c x^2 - 2x^a \xi^{bca}_{(3)} x_b x_c x_d.$$

6. Явный вид операторов симметрии волнового уравнения. Мы нашли в явном виде все линейно независимые решения уравнений (6), (8), (10), (11), описывающих тензоры Киллинга и конформные тензоры Киллинга произвольного ранга и порядка. Эти решения позволяют описать операторы симметрии широкого класса уравнений математической физики. В частности, для волнового уравнения (1) такое описание сводится к подстановке решений уравнений (6), (8) в формулу (4), определяющую общий вид оператора симметрии произвольного порядка. Для $\chi^2 \neq 0$, $j = 1$ получаем из (4), (18)—(23) следующий полный набор операторов симметрии:

$$Q_a = P_a = i\partial_a, \quad Q_{ab} = J_{ab} = x_a P_b - x_b P_a. \tag{34}$$

Формулы (34) задают генераторы группы Пуанкаре. Используя представление (17) для общего решения, нетрудно убедиться, что каждый оператор симметрии (4) уравнения (1) представляет собой полином от операторов (34). Иными словами, все операторы симметрии произвольного конечного порядка для волнового уравнения принадлежат обертывающей алгебре, порождаемой генераторами группы Пуанкаре (34).

Подсчитаем количество $N(n, m)$ линейно независимых операторов симметрии порядка n. Анализ формулы (18), первый член в правой части которой соответствует полному набору операторов симметрии порядка $j - 2$, позволяет сделать вывод, что $N(n, m)$ равно числу линейно независимых решений системы (6) для $j = n$ и $j = n - 1$. Согласно (16)

$$N(n, m) = \hat{N}^n_m + \hat{N}^{n-1}_m = \frac{2n^2 + 2nm + m(m-1)}{m(m-1)} C^{m-2}_{n+m-2} C^{m-2}_{m+n-1}. \tag{35}$$

Формула (35) задает количество линейно независимых операторов симметрии порядка n для волнового уравнения с m переменными. В частности, для $m = 4$

$$N(n, 4) = \frac{1}{72}(n+1)(n+2)^2(n+3)(n^2+4n+b). \tag{36}$$

Явный вид соответствующих операторов симметрии получаем, подставляя (18)—(23) в (4).

В случае $\varkappa = 0$ число операторов симметрии порядка n равно

$$N(n, 4) = \frac{1}{12}\sum_{j=0}^{n} (j+1)^2 (j+2)^2 (2j+3);$$

$$N(n, 3) = \frac{1}{3} = \sum_{j=0}^{n} (2j+1)(j+1)(2j+3), \quad N(n, 2) = \infty.$$

Явный вид операторов симметрии задается формулами (4), (29). Можно показать, что все такие операторы полиномиально зависят от генераторов конформной группы $D = ix^\mu\partial_\mu + i$, $K_\mu = 2x_\mu D + x_\nu x^\nu i\partial_\mu$ и P_μ, $J_{\mu\nu}$ (34).

7. Заключение. Мы определили понятия тензора Киллинга и конформного тензора Киллинга произвольного ранга и порядка и нашли их явный вид для m независимых переменных, $m \leqslant 4$.

Уравнения (10), (11), определяющие тензоры Киллинга произвольного порядка, являются естественным обобщением уравнений Киллинга [6, 7]. Они возникают в задачах описания операторов симметрии порядка s для систем уравнений в частных производных — в частности, уравнения Максвелла [5].

Полученные обобщенные тензоры Киллинга могут найти применение при исследовании высших симметрий уравнений математической физики.

В настоящей статье они использованы для полного описания операторов симметрии волнового уравнения.

Понятие (конформного) тензора Киллинга произвольного ранга (и первого порядка в нашей терминологии) введено в [8]. Общее решение уравнений (6) для $j = 2$ имеется в [10]. Решение уравнений (6), (8), (10), (11) с техническими подробностями и многочисленными примерами приведены в [9]. Использованию операторов симметрии высших порядков для описания систем координат, в которых уравнения допускают решения в разделяющихся переменных, посвящены работы [2—4; 11].

1. Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений.— М. : Наука, 1978.— 400 с.
2. *Шаповалов В. Н., Экле Г. Г.* Алгебраические свойства уравнения Дирака.— Элиста : Калм. ун-т, 1972.— 69 с.
3. *Миллер У.* Симметрия и разделение переменных.— М. : Мир, 1981.— 342 с.
4. *Kalnins E. L., Miller W. Jr., Williams G. C.* Matrix operator symmetries of the Dirac equation and separation of variables // J. Math. Phys.— 1986.— **27**, N 7.— P. 1893—1900.
5. *Фущич В. И., Никитин А. Г.* Симметрия уравнений квантовой механики.— М. : Наука, 1990.— 400 с.
6. *Killing W.* Über die Grundlagen der Geometrie // J. fur den reine und anguv. Math.— 1892.— **109**.— P. 121—186.
7. *Ибрагимов Н. Х.* Группы преобразований в математической физике.— М. : Наука, 1983.— 280 с.
8. *Walker M., Penrose R.* On quadratic first integrals of the geodesic equation for type 22 spacetimes // Commun. Math. Phys.— 1970.— **18**, N 4.— P. 265—274.
9. *Никитин А. Г., Прилипко А. И.* Обобщенные тензоры Киллинга и симметрия уравнения Клейна — Гордона — Фока.— Киев, 1990.— С. 2—60.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 90.26).
10. *Katrin G. H., Levin T.* Quadratic first integrals of the geodesics in spaces of constant curvature // Tensor.— 1965.— **16**, N 1.— P. 97—103.
11. *Коммутативные* подалгебры операторов симметрии волнового уравнения, содержащие оператор второго порядка, и разделение переменных / В. Г. Багров, Б. Ф. Самсонов, А. В. Шаповалов, И. В. Широков.— Томск, 1990.— С. 3—60.— (Препринт / СО АН СССР. Том. науч. центр; 90.27).

Получено 04,10,90