УДК 512.544

|Д. И. ЗАЙЦЕВ|, д-р физ.-мат. наук (Ин-т математики АН УССР, Киев),
Л. А. КУРДАЧЕНКО, канд. физ.-мат. наук (Днепропетр. ун-т)

Группы с условием максимальности для неабелевых подгрупп

Изучаются локально почти разрешимые группы с условием максимальности для неабелевых подгрупп. Такие группы не обязательно удовлетворяют условию максимальности для всех подгрупп. Но они конечнопорождены и почти метабелевы.

Вивчаються локально майже розв'язні групи з умовою максимальності для неабелевих підгруп. Такі групи не обов'язково задовольняють умову максимальності для всіх підгруп. Але вони породжуються скінченною множиною елементів та майже метабелеві.

Пусть G — группа, $\mathfrak{S}$ — некоторое семейство ее подгрупп. Будем говорить, что G удовлетворяет условию максимальности для $\mathfrak{S}$-подгрупп, если всякая возрастающая цепочка подгрупп из семейства $\mathfrak{S}$ обрывается. Двойственным образом определяется условие минимальности для $\mathfrak{S}$-подгрупп. Группы с различными условиями максимальности и минимальности — это один из самых старых и классических объектов исследований. Изучение групп с условием максимальности для всех подгрупп — условием Max — было начато Хиршем [1], а изучение групп с условием минимальности — Min — С. Н. Черниковым [2]. Разрешимые группы с условием Max оказались полициклическими, а локально разрешимые группы с условием Min — черниковскими (см. [3], теорема 1.1). Полициклические и черниковские группы изучались различными авторами с различных точек зрения. Этим группам посвящена обширнейшая литература. Многие важные результаты о них содержатся в монографиях [3—7]. Следует отметить, что полициклическими группами и их конечными расширениями не исчерпываются группы с условиями Max, а черниковскими группами не исчерпываются группы с условиями Min (см. [8], § 28).

Важным семейством подгрупп группы является семейство ее абелевых подгрупп. Группы с условием минимальности для абелевых подгрупп — Min—ab — начал изучать С. Н. Черников (см. [3], гл. 4), а группы с условием максимальности для абелевых подгрупп — Max—ab — А. И. Мальцев [9]. Оказалось, что для многих классов групп (локально разрешимых, локально конечных) условия Min и Min-ab совпадают, а условия Max и Max—ab совпадают для локально нильпотентных и разрешимых групп. Однако существуют локально полициклические группы с условием Max-ab, не удовлетворяющие Max (Ю. И. Мерзляков, см [10], пример 25.3.1).

Двойственным к условию Min—ab является условие минимальности для неабелевых подгрупп — условие Min—$\overline{\text{ab}}$. Группы с условием Min—$\overline{\text{ab}}$ начал изучать С. Н. Черников. Оказалось, что неабелева группа с условием Min—$\overline{\text{ab}}$, обладающая субнормальной системой с конечными факторами, черниковская (см. [3], гл. 6, § 1). В работе В. П. Шункова [11] аналогичный результат получен для локально конечных групп. Однако для условия максимальности ситуация иная, условие максимальности для неабелевых подгрупп — Max—$\overline{\text{ab}}$ — не равносильно Max даже в классе разрешимых групп. В этом легко можно убедиться на следующем простом примере. Рассмотрим групповую алгебру $K = \mathbf{F}_p\langle x\rangle$ бесконечной циклической группы $\langle x\rangle$ над простым полем $\mathbf{F}_p$ порядка p. Для любого $y \in K$ идеал yK имеет конечный индекс в K. Если $g = x^k$ — произвольный элемент $\langle x\rangle$, то $yK = \bigoplus_{1\leqslant i\leqslant k} A_i$, где $A_i \cong \mathbf{F}_p\langle g\rangle$, $1 \leqslant i \leqslant k$. Отсюда уже нетрудно получить, что группа $G = K_+ \leftthreetimes \langle x\rangle$ удовлетворяет условию Max—$\overline{\text{ab}}$. Но K_+ — бесконечная элементарная абелева группа.

Настоящая работа посвящена рассмотрению локально почти разрешимых групп с условием Max—$\overline{\text{ab}}$. Условие локальной почти разрешимости является достаточно естественным обобщением условий локальной разрешимости и локальной конечности. Отметим, что сочетание результатов

С. Н. Черникова и В. П. Шункова о группах с условием $\mathrm{Min}-\overline{\mathrm{ab}}$, отмеченных выше, показывает, что неабелева локально почти разрешимая группа с условием $\mathrm{Min}-\overline{\mathrm{ab}}$ является черниковской.

Лемма 1. *Пусть G — неабелева группа с условием $\mathrm{Max}-\overline{\mathrm{ab}}$. Если A — элементарная абелева подгруппа $H \leqslant G$, причем $A \lhd H$, индекс $|H : C_H(A)|$ конечен, $H \neq C_H(A)$, то A конечна.*

Доказательство. Предположим, что A бесконечна. Пусть $1 \neq a_1 \in A$, $A_1 = \langle a_1 \rangle^H$. Так как индекс $|H : C_H(A)|$ конечен, то подгруппа A_1 конечна. Кроме того элемент a_1 можно выбрать так, чтобы $a_1 \notin \zeta(H)$. Имеем $A = A_1 \times B_1$. Подгруппа B_1 имеет в H конечное множество сопряженных и B_1^x имеет в A конечный индекс для любого $x \in H$. Поэтому подгруппа $C_1 = \bigcap\limits_{x \in H} B_1^x$ имеет в A конечный индекс. Так как $C_1 \leqslant B_1$, то $C_1 \cap A_1 = \langle 1 \rangle$. Из бесконечности A следует бесконечность подгруппы C_1. Пусть $1 \neq a_2 \in C_1$, $A_2 = \langle a_2 \rangle^H$. Снова A_2 конечна. Имеем $A = A_1 A_2 \times B_2$. Опять $C_2 = \bigcap\limits_{x \in H} B_2^x$ имеет в A конечный индекс, в частности C_2 бесконечна. Аналогично рассуждая, строим бесконечное семейство таких конечных H-допустимых подгрупп A_n, что $\langle A_n \mid n \in \mathbb{N} \rangle = \underset{n \in \mathbb{N}}{\times} A_n$. Так как $a_1 \notin \zeta(H)$, то найдется элемент $x \in H$, для которого подгруппа $\langle a_1, x \rangle$ неабелева. Но тогда неабелевой будет и подгруппа $\langle A_1, x \rangle$. Теперь подгруппы $\langle A_1 \times \times \ldots \times A_n, x \rangle$ составят бесконечную строго возрастающую последовательность неабелевых подгрупп. Полученное противоречие доказывает конечность A. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть G — локально почти разрешимая неабелева группа с условием Max-$\overline{\mathrm{ab}}$. Если G не удовлетворяет Max, то она включает в себя такую нормальную абелеву подгруппу $A = C_G(A)$, что G/A — почти полициклическая группа без кручения. Кроме того, G конечнопорождена.*

Доказательство. Так как G неабелева, то она включает в себя неабелеву конечнопорожденную подгруппу F. Поскольку всякая подгруппа, включающая в себя F, неабелева, то из условия $\mathrm{Max}-\overline{\mathrm{ab}}$ нетрудно получить, что G конечнопорождена. В частности, G почти разрешима. Обозначим через A ее локально нильпотентный радикал. Если A неабелева, то A конечнопорождена. Но всякая конечнопорожденная нильпотентная группа удовлетворяет Max. Из некоммутативности A получаем, что G/A удовлетворяет Max, т. е. и G удовлетворяет Max. Но это противоречит условию. Таким образом, подгруппа A абелева. Предположим, что $A \neq C_G(A)$. Из выбора A и того факта, что G почти разрешима, получаем, что $C_G(A)/A$ — конечная полупростая группа. Обозначим через L конечнопорожденную подгруппу со свойством $C_G(A) = L \cdot A$. Тогда $L \cap A \leqslant \zeta(L)$, т. е. L конечна над центром. Будучи конечнопорожденной, L удовлетворяет Max. Из изоморфизма $L/L \cap A \cong LA/A = C_G(A)/A$ получаем, что фактор-группа $L/L \cap A$ неабелева, в частности, L неабелева. Отсюда снова можно получить, что LA удовлетворяет Max, т. е. и G удовлетворяет Max. Полученное противоречие доказывает равенство $C_G(A) = A$.

Из этого равенства получаем, что для любого элемента $g \in G \setminus A$ подгруппа $\langle g, A \rangle$ неабелева. Отсюда следует, что фактор-группа G/A удовлетворяет Max. Будучи почти разрешимой, она почти полициклическая. Предположим, наконец, что G/A содержит элемент yA конечного порядка. Пусть $1 \neq a \in A$ и $[a, y] \neq 1$. Положим $A_1 = \langle a \rangle \langle y \rangle$. Из конечности $|yA|$ следует, что A_1 — конечнопорожденная подгруппа, а $B_1 = \langle A_1, y \rangle$ — неабелева полициклическая подгруппа. Теперь нетрудно получить, что $\langle A, y \rangle$ удовлетворяет Max, что снова приводит к противоречию. Лемма доказана.

Пусть H — почти полициклическая группа. Подгруппу P назовем плинтусом H (см., например, [12], 12.3), если она удовлетворяет условиям:

1) $H_0 = N_H(P)$ — подгруппа конечного индекса;
2) P — абелева подгруппа без кручения;
3) H_0 и всякая ее подгруппа конечного индекса действует на P рационально неприводимо (т. е. $P \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbf{Q}$ — простой $\mathbf{Q}S$-модуль для всякой подгруппы S, имеющей в H_0 конечный индекс).

Существование плинтуса в почти полициклической группе вытекает например, из леммы 12.1.4 книги [12].

Лемма 3. *Пусть G — конечнопорожденная группа, включающая в себя периодическую абелеву нормальную подгруппу $A = C_G(A)$, для которой G/A — почти полициклическая группа без кручения. Если G удовлетворяет* Max—ab, *но не удовлетворяет* Max, *то G/A почти абелева и $\mathbb{Z}\langle g\rangle$-модуль A конечнопорожден для любого $g \in G \setminus A$.*

Доказательство. Положим $H = G/A$. На A можно смотреть как на $\mathbb{Z}H$-модуль. Поскольку G конечнопорождена, а G/A — почти полициклическая группа, то $\mathbb{Z}H$-модуль A конечно-порожден (см., например, [5], лемма 1.43 и ее следствия). Ввиду теоремы Ф. Холла (см., например, [5], следствие леммы 5.35), кольцо $\mathbb{Z}H$ нетерово. Отсюда следует, что $\mathbb{Z}H$-модуль A нетеров. Будем считать, что A—элементарная абелева p-подгруппа, p — простое число, т. е. A — $\mathbf{F}_p H$-модуль. Кроме того, рассмотрим сначала случай, когда $\mathbf{F}_p H$-модуль A порождается одним элементом a. Обозначим через P плинтус группы H, а через P_1 — полный прообраз в G подгруппы P. Так как строение H описывается с точностью до подгрупп конечного индекса, то можно считать подгруппу P нормальной. Положим $A_1 = C_A(P)$. Тогда подгруппа A_1 — H-допустима. Предположим, что $C_{G/A_1}(A/A_1) \neq A/A_1$. Пусть $gA_1 \in C_{G/A_1}(A/A_1) \setminus (A/A_1)$. Так как $g \notin C_G(A)$, то найдется элемент $u \in A$, для которого подгруппа $U = \langle u, g\rangle$ неабелева. Положим $V = \langle u\rangle^{\langle g\rangle}$. Так как g централизует фактор A/A_1, то $VA_1/A_1 = \langle uA_1\rangle$. Предположим, что фактор A/A_1 бесконечен, $A/A_1 = \bigtimes_{n\in\mathbb{N}} \langle v_n A_1\rangle$, и положим $V_n = \langle A_1, u, v_1, \ldots, v_n\rangle$. Тогда неабелевы подгруппы $\{\langle g, V_n\rangle \mid n \in \mathbb{N}\}$ составят строго возрастающую последовательность, что противоречит условию Max — ab. Это означает конечность фактора A/A_1. Но тогда $C_P(A/A_1) \neq \langle 1\rangle$. Пусть $1 \neq h_1 \in C_P(A/A_1)$, $h_1 = g_1 A_1$. Так как $g_1 \in C_G(A)$, то найдется элемент $v \in A$, для которого подгруппа $\langle g_1\, v\rangle$ неабелева, а из выбора g_1 следует равенство $[g_1, A_1] = \langle 1\rangle$. Так что $v \notin A_1$ и $[g_1, v] \neq 1$, а $1 = [g_1, [g_1, v]]$, т. е. $\langle g_1, v\rangle$ — двуступенно нильпотентная подгруппа. Эта подгруппа централизует A_1, поэтому из бесконечности A_1 получаем опять возрастающую цепочку неабелевых подгрупп. Полученное противоречие доказывает равенство $A/A_1 = C_{G/A_1}(A/A_1)$.

Пусть $U_1 < U_2 < \ldots < U_n < \ldots$ — строго возрастающая цепочка P-допустимых подгрупп A, включающих в себя A_1. Для любого $n \in \mathbb{N}$ подгруппа U_n содержит элемент, не централизуемый P, поэтому подгруппа $\langle U_n, P_1\rangle$ неабелева. Это означает, что цепочка подгрупп $\{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ должна оборваться. Другими словами, $\mathbf{F}_p P$-модуль A/A_1 нетеров. Чтобы не усложнять обозначений, положим $A_1 = \langle 1\rangle$.

Покажем, что модуль A не имеет $\mathbf{F}_p P$-кручения. Если I—идеал кольца $\mathbf{F}_p P$, то положим $\mathrm{Ann}_A I = \{a \in A \mid aI\ \langle 0\rangle\}$. Ясно, что $\mathrm{Ann}_A\ I = \mathbf{F}_p P$-подмодуль. Если предположить противное, то для некоторого ненулевого идеала I кольца $\mathbf{F}_p P$ его аннулятор ненулевой. Так как кольцо $\mathbf{F}_p P$ нетерово, то I можно включить в максимальный идеал M со свойством $B = \mathrm{Ann}_A M \neq \langle 0\rangle$. Предположим, что существуют идеалы M_1, M_2 в кольце $\mathbf{F}_p P$, для которых $M_1 \geqslant M$, $M_2 \geqslant M$ и $M_1 M_2 = M$. Если $b \in B$, то $bM_1 M_2 = \langle 0\rangle$. Отсюда следует, что хотя бы один из подмодулей $\mathrm{Ann}_A M_1$, $\mathrm{Ann}_A M_2$ ненулевой. Из выбора M получаем тогда, что соответствующий идеал M_i совпадает с M. Это означает, что M — простой идеал. Для любого $x \in H$ справедливо равенство $Bx = \mathrm{Ann}_A M^x$. Положим $L = N_H(M)$, тогда для любого $x \in L$ выполняется равенство $Bx = B$, т. е. B — $\mathbf{F}_p L$-подмодуль. Обозначим через X множество представителей всех различных смежных классов H по L. Тогда $B\mathbf{F}_p H = \sum_{x\in X} Bx$. Из леммы 3 работы [13] следует равенство $B\mathbf{F}_p H = \bigoplus_{x\in X} Bx$. Так как $P \lhd H$, то Bx — $\mathbf{F}_p P$-подмодуль A. Выше отмечалось, что A удовлетворяет условию Max — $\mathbf{F}_p P$. Отсюда следует конечность множества X, т. е. подгруппа $N_H(M)$ имеет конечный индекс. Из теоремы Бергмана (см., например,

[12], следствие 9.3.9) получаем конечность фактора $\mathbf{F}_pP/M$. Выберем в B ненулевой элемент b и положим $B_1 = b\mathbf{F}_pP$. Так как $\mathrm{Ann}_{\mathbf{F}_pP}\, b \geqslant M$, то B_1 конечен. Из равенства $B\mathbf{F}_pH = \bigoplus_{x\in X} Bx$ и конечности X получаем конечность $B_2 = B_1\mathbf{F}_pH$. Поскольку $B_2 \nleqslant C_A(H)$, то найдется элемент $h_2 = g_2A$, для которого подгруппа $\langle g_2, B_2\rangle$ неабелева. Но, очевидно, $\langle g_2, B_2\rangle = B_2\lambda\langle g_2\rangle$, т. е. $\langle g_2, B_2\rangle$ удовлетворяет Max. Отсюда нетрудно получить, что группа G удовлетворяет Max. Полученное противоречие и доказывает, что A не имеет $\mathbf{F}_pP$-кручения.

Положим $C_1 = a\mathbf{F}_pP$ и пусть $P = \langle d_1\rangle \times \ldots \times \langle d_k\rangle$. Предположим что $k > 1$. Пусть $C_2 = a\mathbf{F}_p\langle d_1\rangle$, $C_3 = aF_p(\langle d_1\rangle \times \langle d_2\rangle)$. Тогда $C_3 \cong \mathbf{F}_p(\langle d_1\rangle \times \langle d_2\rangle)$, т. е. $C_3 = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} C_2d_2^n$. Так как подгруппа P абелева, то $C_2d_2^n - \mathbf{F}_p\langle d_1\rangle$-подмодуль. Так как A не имеет $\mathbf{F}_pP$-кручения, то $\mathrm{Ann}_{\mathbf{F}_pP}\, a = \langle 0\rangle$. Это означает, что $C_p(a) = \langle 1\rangle$, в частности, элементы a и d_1 неперестановочны. Но тогда подгруппы $\langle C_2 \oplus C_2d_2 \oplus \ldots \oplus C_2d_2^n, d_1\rangle$ неабелевы и составят строго возрастающую последовательность. Полученное противоречие показывает, что $P = \langle d_1\rangle$ — бесконечная циклическая подгруппа. Положим $H_1 = C_H(P)$. Подгруппа H_1 обладает рядом субнормальных подгрупп $P \lhd P_1 \lhd \ldots \lhd P_l = H_1$, факторы которого конечны или бесконечные циклические. Положим $C_4 = a\mathbf{F}_pP_1$. Если индекс $|P : P_1|$ конечен, то C_4 — сумма конечного множества $\mathbf{F}_pP$-подмодулей. Пусть $P_1 = P \leftthreetimes \langle w\rangle$, где $|w|$ бесконечен. Тогда $C_4 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} C_1w^n$. Так как $P \leqslant \zeta(H_1)$, то $C_1w^n - \mathbf{F}_pP$-подмодуль. Так как G удовлетворяет условию $\mathrm{Max} - \overline{\mathrm{ab}}$, то существует конечное подмножество $\sigma \subset \mathbb{Z}$ со свойством $C_4 = \sum_{n\in\sigma} C_1w^n$. Рассуждая аналогично, через конечное число шагов покажем, что $C_5 = a\mathbf{F}_pH_1$ — конечнопорожденный $\mathbf{F}_pP$-модуль. По теореме Мальцева [9] некоторая подгруппа конечного индекса из H_1 сопряжена с подгруппой $T_m(F_1)$, где F_1 — некоторое конечное расширение поля частных кольца $\mathbf{F}_pP$. Но $\mathrm{char}\, F_1 = p$, поэтому $UT_m(F_1)$ — периодическая p-подгруппа, а $T_m(F_1)/\,\mathrm{U}\,T_m(F_1) \cong \underbrace{F_1^x \times \ldots \times F_1^x}_{m}$. Так как H_1 не имеет кручения, то отсюда следует, что H_1 почти абелева, т. е. и H почти абелева.

Пусть теперь A не является элементарной абелевой. Так как $A = a\mathbb{Z}H$, то A имеет конечный период. Поэтому A обладает рядом $\langle 1\rangle = E_0 \leqslant E_1 \leqslant \ldots \leqslant E_q = A$ G-допустимых подгрупп, факторы которого элементарные абелевы и циклические $\mathbb{Z}H$-модули. Из доказанного выше следует, что $H/C_H(E_i/E_{i-1})$ почти абелева, $1 \leqslant i \leqslant q$. Пересечение $\bigcap_{1\leqslant i\leqslant q} C_H(E_i/E_{i-1})$ централизует все факторы приведенного выше ряда, а потому имеет конечный период. Так как H не имеет кручения, то $\bigcap_{1\leqslant i\leqslant q} C_H(E_i/E_{i-1}) = \langle 1\rangle$. Но тогда H изоморфна подгруппе $\bigtimes_{1\leqslant i\leqslant q} H/C_H(E_i/E_{i-1})$ ввиду теоремы Рэмака (см., [10], теорема 4.3.9) т. е. H почти абелева.

Пусть, наконец, A порождается как $\mathbb{Z}H$-модуль конечным множеством элементов. Тогда A обладает конечным рядом G-допустимых подгрупп $\langle 1\rangle = R_0 \leqslant R_1 \leqslant \ldots \leqslant R_t = A$, факторы которого — циклические $\mathbb{Z}H$-модули. Из доказанного выше следует, что фактор-группы $H/C_H(R_j/R_{j-1})$ почти абелевы, $1 \leqslant j \leqslant t$, а поскольку $\bigcap_{1\leqslant j\leqslant t} C_H(R_j/R_{j-1}) = \langle 1\rangle$, то и H почти абелева. Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть G — конечнопорожденная группа, включающая в себя такую нормальную абелеву подгруппу $A = C_G(A)$ без кручения, что G/A — почти полициклическая группа без кручения. Если G удовлетворяет $\mathrm{Max} - \overline{\mathrm{ab}}$, но не удовлетворяет Max, то G/A почти абелева и $\mathbb{Z}\langle g\rangle$-модуль A конечнопорожден для любого элемента $g \in G \setminus A$.*

Доказательство. Положим $H = G/A$. В доказательстве леммы 3 отмечалось, что $\mathbb{Z}H$-модуль A конечнопорожден. Существует такое простое число p, что $A \neq A^p$ (см., например, [6], следствие 1 леммы 9.53). Положим $A_0 = A$, $A_n = A_{n-1}^p = A^{p^n}$, $n \in \mathbb{N}$. Из того же результата получаем равенство $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \langle 1 \rangle$. Положим $H_1 = C_H(A/A_1)$, $H_{k+1} = H_k \cap \cap C_H(A_k/A_{k+1})$, $k \in \mathbb{N}$. Подгруппы H_k составят убывающую последовательность, а так как H почти полициклическая, то найдется такой номер l, что факторы H_l/H_{l+k} конечны при любом $k \in \mathbb{N}$.

Предположим сначала, что фактор-группа A/A^p бесконечна. Так как A не имеет кручения, то отображение $\varphi : a \mapsto a^p$, $a \in A$, будет вложением. Поэтому $A \cong A^p$. Поскольку $A^p\varphi = A^{p^2}$, то отсюда следует бесконечность фактора $A^p/A^{p^2} = A_1/A_2$. Аналогично доказывается бесконечность факторов A_k/A_{k+1} для любого $k \in \mathbb{N}$. Предположим, что $H_l \neq H_{l+1}$. Из леммы 1 получаем тогда конечность A_l/A_{l+1}. Полученное противоречие доказывает равенство $H_l = H_{l+k}$ для любого $k \in \mathbb{N}$. Другими словами, подгруппа H_l централизует все факторы ряда $A = A_0 \geqslant A_1 \geqslant \ldots \geqslant A_l \geqslant \ldots$. Обозначим через C полный прообраз в G подгруппы H_l. Тогда $A/A_{l+k} \leqslant \leqslant \xi(C/A_{l+k})$. Пусть E/A_{l+k} — конечнопорожденная подгруппа C/A_{l+k}, $E_1/A_{l+k} = E/A_{l+k} \cap A/A_{l+k}$. Так как E/E_1 — почти полициклическая группа, то $\mathbb{Z}(E/E_1)$-модуль E_1/A_{l+k} конечнопорожден. Но $E_1/A_{l+k} \leqslant \xi(C/A_{l+k})$, так что E_1/A_{l+k} — конечнопорожденная абелева подгруппа, т. е. E/A_{l+k} — почти полициклическая подгруппа. Итак, C/A_{c+k} — локально почти полициклическая группа. Но она включает в себя бесконечную абелеву подгруппу A/A_{c+k} конечного периода. Поскольку G/A_{c+k} удовлетворяет условию Max — $\overline{\text{ab}}$, то отсюда следует, что C/A_{c+k} абелева при любом $k \in \mathbb{N}$. Но из равенства $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_{c+k} = \langle 1 \rangle$ следует тогда коммутативность подгруппы C. Из равенства $A = C_G(A)$ получаем тогда $C = A$ и $H_l = \langle 1 \rangle$. Так как $C_H(A/A_1) \leqslant H_l$, то и $C_H(A/A_1) = \langle 1 \rangle$. Из леммы 3 получаем тогда, что H почти абелева.

Пусть теперь фактор-группа A/A^p конечна для любого простого числа p. Из уже упоминавшегося результата Ф. Холла (см., например, [6], следствие 1 леммы 9.53) получаем, что подгруппа A минимаксна. Обозначим через H_0 максимальную нормальную разрешимую подгруппу H. Тогда A обладает конечным рядом H_0-допустимых подгрупп $\langle 1 \rangle = D_0 \leqslant D_1 \leqslant \ldots \leqslant \leqslant D_t = A$, на факторах которого H_0 действует рационально неприводимо. Но тогда фактор-группа $H_0/C_{H_0}(D_i/D_{i-1})$ почти абелева по теореме А. И. Мальцева [9]. Положим $K = \bigcap_{1\leqslant i\leqslant t} C_{H_0}(D_i/D_{i-1})$ и пусть L — полный прообраз в G подгруппы K. Подгруппа K нильпотентна, а потому и L нильпотентна. Если $L \neq A$, то L неабелева, а потому включает в себя конечнопорожденную неабелеву подгруппу. Отсюда нетрудно получить, что G удовлетворяет Max. Следовательно, $L = A$, т. е. $K = \langle 1 \rangle$. Но тогда $H_0 \leqslant \mathsf{X}_{1\leqslant i\leqslant t} H_0/C_{H_0}(D_i/D_{i-1})$, в частности, H_0 почти абелева. Лемма доказана.

Теорема. *Пусть G — локально почти разрешимая неабелева группа, не удовлетворяющая* Max. *Группа G тогда и только тогда удовлетворяет условия* Max-$\overline{\text{ab}}$, *когда она включает в себя нормальную абелеву подгруппу A со следующими свойствами*:

1) $A = C_G(A)$;
2) *G/A почти абелева конечнопорожденная группа без кручения*;
3) *$\mathbb{Z}\langle g \rangle$-модуль A конечнопорожден для любого элемента $g \in G \setminus A$.*

Доказательство. Из леммы 2 получаем существование в G такой нормальной абелевой подгруппы $A = C_G(A)$, что G/A — почти полициклическая группа без кручения. Кроме того, группа G конечно-порождена. Обозначим через T периодическую часть подгруппы A. Если $A = T$, то утверждение вытекает из леммы 3. Поэтому предположим, что $A \neq T$. Так как A — конечнопорожденный $\mathbb{Z}H$-модуль, $H = G/A$ (см., например, [5], лемма 1.43 и ее следствия), то A — нетеров $\mathbb{Z}H$-модуль (см., например, [5], следствие леммы 5.35). Отсюда следует, что период подгруппы T конечен. Поэтому $A^k \cap T = \langle 1 \rangle$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$. Предположим, что подгруппа T бесконечна и рассмотрим фактор-группу G/B, где $B = A^k$. Пусть $gB \in C_{G/B}(A/B) \setminus (A/B)$. Так как B не имеет кручения, то отсюда следует $g \in C_G(T)$. Если предположить, что $g \in C_G(B)$, то из однозначности извлечения корня в абелевой группе без кручения, получаем, что g централизует A/T. Итак, элемент g централизует факторы ряда $\langle 1 \rangle \leqslant T \leqslant A$. Но тогда $g^k \in C_G(A) = A$. В то же время G/A не имеет кручения. Это означает, что в B найдется элемент $b \neq 1$, для которого $[g, b] \neq 1$. Положим $B_1 = b\,\mathbb{Z}\langle g \rangle$. $\mathbb{Z}\langle g \rangle$-модуль A/B_1 уже нетеров (ведь $\langle g, b \rangle$ — неабелева подгруппа), $B_1 \cap T = \langle 1 \rangle$ и g централизует TB_1/B_1. Отсюда получаем конечность подгруппы T. Полученное противоречие доказывает равенство $C_{G/B}(A/B) = A/B$.

Пусть теперь T конечна, $gT \in C_{G/T}(A/T)$ и $g \in G \diagup A$. Тогда $g^t \in C_G(T)$ для некоторого $t \in \mathbb{N}$. Поэтому g^t централизует факторы ряда $\langle 1 \rangle \leqslant T \leqslant A$, в частности, $g^{tk} \in A$. Но это невозможно. Итак, $C_{G/T}(A/T) = A/T$.

Осталось применить леммы 3 и 4. Теорема доказана.

Результаты настоящей работы были анонсированы в [14].

1. *Hirsch K. A.* On infinite soluble groups. I // Proc. London Math. Soc.— 1938.— **44**.— P. 35—60.
2. *Черников С. Н.* Бесконечные специальные группы // Мат. сб.— 1939.— **6**, № 2.— С. 199—214.
3. *Черников С. Н.* Группы с заданными свойствами подгрупп.— М. : Наука, 1980.— 384 с.
4. *Segal D.* Polycyclic groups.— Cambridge: Cambridge Univ. press, 1983.— 289 p.
5. *Robinson D. J. S.* Finiteness condition and generalized soluble groups, Pt. 1.— Berlin: Springer , 1972.— 210 p.
6. *Robinson D. J. S.* Finiteness condition and generalized soluble groups, Pt. 2.— Berlin: Springer, 1972.— 254 p.
7. *Kegel O. H., Wehrfritz B. A. F.* Locally finite groups.— Amsterdam: North-Holland Publ. Co., 1973.— 210 p.
8. *Ольшанский А. Ю.* Геометрия определяющих соотношений в группах.— М.: Наука, 1989.— 448 с.
9. *Мальцев А. И.* О некоторых классах бесконечных разрешимых групп // Мат. сб.— 1951.— **28**, № 3.— С. 567—588.
10. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп.— М. : Наука, 1982.— 288 с.
11. *Шунков В. П.* Об абстрактных характеризациях некоторых линейных групп // Алгебра. Матрицы и матричные группы.— Красноярск: Ин-т физики АН СССР, 1970.— С. 5—54.
12. *Passman D. S.* The algebraic structure of group rings.— New York: Wiley, 1977.— 720 p.
13. *Roseblade J. E.* Group rings of polycyclic groups // J. Pure and Appl. Algebra.— 1973.— 3, N 4.— P. 307—328.
14. *Зайцев Д. И., Курдаченко Л. А.* Группы с условием максимальности для неабелевых подгрупп // XI Всесоюзн. симп. по теории групп: Тез. сообщ.—Свердловск: Ин-т математики и механики УрО АН СССР, 1989.— С. 43—44.

Получено 20.08.90