УДК 519.41/47

Ф. Н. ЛИМАН, канд. физ.-мат. наук (Сум. пед. ин-т)

О группах, все абелевы нециклические pd-подгруппы которых нормальны

Изучаются группы, в которых нормальны все абелевы нециклические pd-подгруппы для некоторого простого числа p при условии существования таких подгрупп в группе ($pd\overline{HA}$-группы). Получены необходимые и достаточные условия принадлежности группы классу $pd\overline{HA}$-групп. Устанавливаются связи класса $pd\overline{HA}$-групп с классом групп, у которых нормальны все абелевы нециклические подгруппы, и классом групп, в которых нормальны все pd-подгруппы.

Вивчаються групи, в яких нормальні всі абелеві нециклічні pd-підгрупи для деякого простого числа p при умові існування таких підгруп в групі ($pd\overline{HA}$-групи). Одержані необхідні і достатні умови належності групи класу $pd\overline{HA}$-груп. Установлюються зв'язки класу $pd\overline{HA}$-груп з класом груп, в яких нормальні всі абелеві нециклічні підгрупи, і класом груп, в яких нормальні всі pd-підгрупи.

Пусть p-некоторое простое число. Группу G, содержащую отличные от единицы p-элементы, будем называть pd-группой. Если при этом любая pd-подгруппа из G нормальна в ней, то группу G будем называть pdI-группой. Класс pdI-групп описан автором в работе [1].

Группу G будем называть $\overline{HA}$-группой, если она содержит абелевы нециклические подгруппы и все они нормальны в ней. Класс $\overline{HA}$-групп достаточно подробно изучен автором в работах [2, 3].

В настоящей работе изучаются $pd\overline{HA}$-группы. Группу G будем называть $pd\overline{HA}$-группой, если она содержит абелевы нециклические pd-подгруппы и все они нормальны в ней. В теоремах 1—3 характеризуются периодические $pd\overline{HA}$-группы и устанавливаются их связи с $\overline{HA}$-группами. В теореме 4 описано строение и свойства непериодических $pd\overline{HA}$-групп. Сопоставляя теорему 4 с описанием непериодических $\overline{HA}$-групп из [3], легко получить дополнительные условия в каждом из пп. 1—7 теоремы 4, при которых та или иная $pd\overline{HA}$-группа не будет $\overline{HA}$-группой.

1. Периодические $pd\overline{HA}$-группы.

Теорема 1. *Периодическая локально нильпотентная $pd\overline{HA}$-группа G является $\overline{HA}$-группой.*

Доказательство. Пусть G — периодическая локально нильпотентная $pd\overline{HA}$-группа. Так как ее силовская p-подгруппа G_p отлична от единицы, то для любой абелевой нециклической p'-подгруппы A справедливо утверждение $G_pA \lhd G$ и потому $A \lhd G$. Значит, G является $\overline{HA}$-группой и теорема доказана.

Аналогичным образом доказывается следующее утверждение.

Лемма 1. *Если центр периодической $pd\overline{HA}$-группы G содержит отличные от единицы p-элементы, то G является $\overline{HA}$-группой.*

Поскольку любая $pd\overline{HA}$-группа содержит абелеву нециклическую нормальную pd-подгруппу, то отсюда следует, что в G имеется минимальная нормальная подгруппа A экспоненты p и порядка p или p^2.

Теорема 2. *Периодическая группа G, содержащая абелеву нециклическую pd-подгруппу и нормальную подгруппу A порядка p тогда и только тогда является $pd\overline{HA}$-группой, но не $\overline{HA}$-группой, когда $p \neq 2$ и $G \neq C_G(A) = C$. Подгруппа C удовлетворяет следующим условиям: 1) C является $\overline{HA}$-группой и содержит все абелевы нециклические pd-подгруппы группы G; 2) все абелевы нециклические подгруппы из C нормальны в G; 3) хотя бы одна абелева нециклическая p'-подгруппа группы G не содержится в C.*

Доказательство. Достаточность условий теоремы очевидна. Докажем их необходимость.

Пусть G — периодическая $pd\overline{HA}$-группа, содержащая нормальную подгруппу A порядка p и не принадлежащая $\overline{HA}$-группам. Ввиду леммы 1 $G \neq C_G(A) = C$ и потому $p \neq 2$.

Если B — любая абелева нециклическая pd-подгруппа из G, то $B = B_p \times B_{p'}$ и $B \lhd G$. Отсюда $B_p \lhd G$ и $[A, B] = 1$. Значит, подгруппа C содержит все абелевы нециклические pd-подгруппы группы G.

Пусть H — произвольная абелева нециклическая подгруппа из C. Если $p \in \pi(H)$, то $H \lhd G$ по определяющему условию для $pd\overline{HA}$-групп. Если же $p \notin \pi(H)$, то $AH \lhd G$ и потому $H \lhd G$. Следовательно, группа C является $\overline{HA}$-группой и все ее абелевы нециклические подгруппы нормальны в G.

Так как G не является $\overline{HA}$-группой, то в ней имеется хотя бы одна абелева нециклическая p'-подгруппа, не содержащаяся в C. Теорема доказана.

Теорема 3. *Периодическая группа G, содержащая абелеву нециклическую pd-подгруппу и не содержащая нормальной подгруппы порядка p тогда и только тогда является $pd\overline{HA}$-группой, но не $\overline{HA}$-группой, когда она конечна и $G = G_p \leftthreetimes B$. Подгруппы G_p и B удовлетворяют следующим условиям: 1) G_p — силовская минимальная нормальная элементарная абелева подгруппа группы G порядка p^2; 2) подгруппа B содержит хотя бы одну абелеву нециклическую подгруппу; 3) подгруппа $C_G(G_p)$ содержит все абелевые нециклические pd-подгруппы из G и $C_G(G_p) = G_p \times B_1$, причем B_1 — дедекиндова группа, все абелевы подгруппы которой циклические и нормальны в G.*

Доказательство. Достаточность условий теоремы очевидна. Докажем их необходимость.

Пусть G — периодическая $pd\overline{HA}$-группа, не содержащая нормальной подгруппы порядка p и не принадлежащая $\overline{HA}$-группам. В этом случае G содержит минимальную нормальную элементарную абелеву подгруппу A порядка p^2.

Покажем сначала, что группа G конечна. Из определяющего условия $pd\overline{HA}$-групп следует, что подгруппа A содержит все элементы порядка p группы G. Если силовская подгруппа G_p группы G абелева, то, очевидно, $G_p = A$. Если она неабелева, то является $\overline{HA}$-группой. Из описания таких p-групп в работе [2] следует, что $|G_p| = p^3$ и $p \neq 2$. Очевидно, что любая p'-подгруппа из $C_G(A)$ нормальна в G и $C_G(A)$, не содержит абелевых нециклических p'-подгрупп. Отсюда следует, что подгруппа $C_G(A)$ конечна, а значит, конечна и группа G.

Покажем теперь, что $G_p = A$. Допустим противное. Тогда $|G_p| = p^3$, $p \neq 2$ и G_p — неабелева метациклическая подгруппа. По теореме 1.5 из [4] группа G содержит такую нормальную подгруппу N, что $|G/N| = p$. Тогда $A \subset N$ и $N = A \leftthreetimes M$. Пусть $g \in G$. Сопряжение G посредством g отображает N в себя и поэтому M^g — одно из дополнений A в N. Но дополнения A в N сопряжены в N. Поэтому существует такой элемент $a \in A$, что $M^g = M^a$. Отсюда $ga^{-1} \in N_G(M)$ и $g \in AN_G(M)$, т. е. $G = AN_G(M)$. Так как A недополняема в G_p, то $A \cap N_G(M) \neq 1$. Если $A \cap N_G(M) = \langle a_1 \rangle$, то $a_1 \in Z(N)$ и $\langle a_1 \rangle \lhd G$, что невозможно. Значит, $A \subset N_G(M)$. Следовательно, $M \lhd G$. Если теперь $x \in G_p$ и $|x| = p^2$, то $[x^p, M] = 1$. Это означает, что $x^p \in Z(G)$ и потому $\langle x^p \rangle \lhd G$, что невозможно. Таким образом доказано, что $G_p = A$.

Так как $G_p = A$, то $G = G_p \leftthreetimes B$. При этом $C_G(G_p)$ содержит любую абелеву нециклическую pd-подгруппу группы G. В самом деле, если H — одна из таких подгрупп, то $H = H_p \times H_{p'}$. Так как $H \lhd G$, то $H_p \lhd G$ и $H_{p'} \lhd G$. Значит, $H_p = G_p$ и $H \subset C_G(G_p)$. Отсюда следует также, что $C_G(G_p) = G_p \times B_1$, где B_1 — дедекиндова группа, все абелевы подгруппы которой циклические и нормальны в G.

Поскольку G не является $\overline{HA}$-группой, то подгруппа B содержит хотя бы одну абелеву нециклическую подгруппу. Теорема доказана.

Следствие. *Любая периодическая неразрешимая $pd\overline{HA}$-группа конечна.*

Примером неразрешимой $pd\overline{HA}$-группы, не принадлежащей $\overline{HA}$-группам, является группа $G=(A\rightthreetimes B)\times\langle c\rangle$, где $A\rightthreetimes B$ — неразрешимая $\overline{HA}$-группа (см. [2]), $|c|=q^n$, $n\geqslant 1$ и $q\in\pi(B)\setminus\pi(C_B(A))$.

2. Непериодические $pd\overline{HA}$-группы. Теорема 4. *Непериодическая неабелева группа G, содержащая абелеву нециклическую pd-подгруппу, тогда и только тогда будет $pd\overline{HA}$-группой, когда она является группой одного из следующих типов:*

1) *G — непериодическая неабелева pdI-группа;*

2) *$p=2$ и $G=C\langle b\rangle$, где C — непериодическая абелева группа, $|b|=4$, $b^{-1}cb=c^{-1}$ для любого элемента $c\in C$ и b^2 — единственная инволюция в G;*

3) *$p=2$ и $G=C\langle b\rangle$, где C — непериодическая группа, все $2d$-подгруппы которой нормальны в G, $|b|=8$, $\langle b^2\rangle$ — силовская 2-подгруппа группы C и в фактор-группе $G/\langle b^4\rangle=\overline{G}$ $\overline{b}^{-1}\overline{c}\overline{b}=\overline{c}^{-1}$ для любого элемента $\overline{c}\in\overline{C}$;*

4) *$p\neq 2$ и $G=\langle a\rangle\times C_1\langle b\rangle$, где $|a|=|G_p|=p$, C_1 — абелева непериодическая группа, $b^4=1$, $b^{-1}cb=c^{-1}$ для любого элемента $c\in C_1$ и при $|b|=2$ C_1 не содержит инволюций, а при $|b|=4$ инволюция b^2 единственная в G;*

5) *$p\neq 2$ и $G=C\langle b\rangle$, где $|G_p|=p$, C — неабелева непериодическая pdI-группа, $b^4=1$ и $\overline{b}^{-1}\overline{c}\overline{b}=\overline{c}^{-1}$ для любого элемента $\overline{c}\in\overline{C}$ в фактор-группе $\overline{G}=G/G_p$. Если $|b|=2$, то C не содержит инволюций, а если $|b|=4$, то b^2 — единственная инволюция в G. При этом C содержит любую абелеву нециклическую подгруппу группы G и любая pd-подгруппа из C нормальна в G;*

6) *$p\neq 2$ и $G=C\langle b\rangle$, где C — абелева непериодическая pd-подгруппа, $b^4=1$ и $b^{-1}cb=c^{-1}$ для любого элемента $c\in C$;*

7) *$p\neq 2$, $G=\langle a\rangle\rightthreetimes C_1\langle b\rangle$, где $|a|=|G_p|=p$, C_1 — непериодическая абелева группа, $\langle a\rangle\rightthreetimes C_1$ — неабелева pdI-группа, являющаяся централизатором любой бесконечной циклической нормальной подгруппы группы G, $b^{2^n}=1$, $n\geqslant 1$ и $b^2\in C_1$. При этом любая абелева нециклическая pd-подгруппа группы G содержится в $C_G\langle a, x\rangle$, где $|x|=\infty$ и $\langle x\rangle\lhd G$, и любая pd-подгруппа из $C_G\langle a, x\rangle$ нормальна в G.*

Каждая из указанных в теореме групп является $pd\overline{HA}$-группой. В леммах 2—10 содержится доказательство необходимости условий теоремы.

Лемма 2. *Если непериодическая $pd\overline{HA}$-группа G содержит подгруппу $A=\langle a_1\rangle\times\langle a_2\rangle$, где $|a_1|=|a_2|=p$ и $a_1\in Z(G)$, то группа G абелева.*

Для доказательства леммы 2 достаточно показать, что в группе G нормальны все циклические подгруппы.

Лемма 3. *Если центр непериодической неабелевой $pd\overline{HA}$-группы G содержит подгруппу $\langle a, x\rangle$, где $|a|=p$, $|x|=\infty$, то G является pdI-группой.*

Для доказательства леммы 3 достаточно показать, что в группе $G/\langle a\rangle$ нормальны все циклические подгруппы.

Лемма 4. *Если в непериодической неабелевой группе G нормальны все бесконечные циклические подгруппы, то $G=C\langle b\rangle$, где C-непериодическая абелева подгруппа, $b^4=1$ и $b^{-1}cb=c^{-1}$ для любого элемента $c\in C$.*

Для доказательства леммы 4 необходимо сначала показать, что централизатор любого элемента бесконечного порядка абелев и содержит все элементы бесконечного и нечетного порядков.

Лемма 5. *Если неабелева непериодическая $pd\overline{HA}$- группа G содержит элементы порядка p^n, где $n\geqslant 2$ и $p\in\pi(Z(G))$, то при $p\neq 2$ G является pdI-группой.*

Доказательство. Пусть $p\neq 2$, $a\in Z(G)$ и $|a|=p$. Ввиду леммы 2 элемент a содержится в любой p-подгруппе группы G. Так как группа G содержит бесконечную циклическую нормальную подгруппу $\langle x\rangle$ и $p\neq 2$, то любой p-элемент $h\in C_C(x)$ и потому $\langle h\rangle\lhd G$.

Так как $a\in Z(G)$, то в группе $\overline{G}=G/\langle a\rangle$ нормальны все бесконечные циклические подгруппы. Предположим, что группа $\overline{G}$ неабелева. Тогда по лемме 4 $\overline{G}=\overline{C}\langle\overline{b}\rangle$, где $\overline{C}$ — непериодическая абелева группа, $\overline{b}^4=1$ и

$\overline{b}^{-1}\overline{c}\overline{b}=\overline{c}^{-1}$ для любого элемента $\overline{c}\in\overline{C}$. Пусть $h\in G$ и $|h|=p^n>p$. Тогда $\overline{h}\in\overline{C}$ и потому $\overline{b}^{-1}\overline{h}\overline{b}=\overline{h}^{-1}$. Отсюда $b^{-1}hb=h^{-1}a^{\alpha}$. Значит, $b^{-1}h^{p^{n-1}}b=h^{-p^{n-1}}=h^{p^{n-1}}$, так как $\langle h^{p^{n-1}}\rangle=\langle a\rangle$. Поэтому $h^{2p^{n-1}}=1$, что невозможно. Следовательно, группа $\overline{G}$ абелева и лемма доказана.

Лемма 6. *Если неабелева непериодическая $2d\overline{HA}$-группа G с центральной инволюцией содержит элементы порядка 4, то она является группой одного из типов 1—3 теоремы 4.*

Доказательство. Группа G имеет единственную инволюцию по лемме 2. Покажем, что в G нормальны все разложимые в прямое произведение $2d$-подгруппы. Пусть $H=H_1\times H_2$ — такая подгруппа. Для определенности будем считать, что инволюция $a\in H_1$.

Если в H все максимальные абелевы подгруппы нециклические, то они нормальны в G, так как являются $2d$-подгруппами, и потому $H\lhd G$.

Допустим, что среди максимальных абелевых подгрупп группы H имеется такая подгруппа B, что $B\ntriangleleft G$. Тогда B — циклическая группа. Пусть $B=\langle b_1, b_2\rangle$, где $|b_1|=2^n$, $n\geqslant 1$, $(|b_2|, 2)=1$. Если $\langle x\rangle\lhd G$ и $|x|=\infty$, то $|b_2, x]=1$ и потому $\langle a, b_2, x\rangle\lhd G$. Отсюда $\langle b_2\rangle\lhd G$. Тогда $\langle b_1\rangle\ntriangleleft G$ и поэтому $b_1^{-1}xb_1=x^{-1}$. Так как в группе $\overline{G}_1=\langle B, x\rangle/\langle a\rangle$ нормальны все бесконечные циклические подгруппы, то по лемме 4 $\overline{b}_1^{-1}\overline{b}_2\overline{b}_1=\overline{b}^{-1}=\overline{b}_2$, Отсюда $b_2=1$. Значит, $B=\langle b_1\rangle$ и $B\subset H_1$. Но тогда для любого элемента $h\in H_2$ подгруппа $\langle b_1, h\rangle$ абелева, что противоречит выбору подгруппы B. Следовательно, все максимальные абелевы подгруппы из H нормальны в G и потому $H\lhd G$.

Из описания непериодических групп, все разложимые pd-подгруппы которых нормальны для некоторого простого числа p в работе [5], следует, что при $p=2$ G является группой одного из типов 1—3 доказываемой теоремы. Лемма доказана.

Лемма 7. *Если силовская p-подгруппа G_p неабелевой непериодической $pd\overline{HA}$-группы G имеет порядок p и содержится в ее центре, то G является группой одного из типов* 1, 4, 5 *теоремы* 4.

Доказательство. Пусть $pd\overline{HA}$-группа G удовлеворяет условиям леммы. Обозначим через $\langle a\rangle$ ее силовскую p-подгруппу порядка p. По условию $a\in Z(G)$. Тогда в фактор-группе $\overline{G}=G/\langle a\rangle$ нормальны все бесконечные циклические подгруппы. Если группа $\overline{G}$ абелева, то G является pdI-группой. Предположим, что группа $\overline{G}$ неабелева. Тогда по лемме 4 $\overline{G}=\overline{G}\langle\overline{b}\rangle$, где $\overline{C}$ — непериодическая абелева группа, $\overline{b}^4=1$, $\overline{b}^{-1}\overline{c}\overline{b}=\overline{c}^{-1}$ для любого элемента $\overline{c}\in\overline{C}$ и $\overline{b^2}\in\overline{C}$.

Следовательно, в этом случае $p\neq 2$ и группа G представима в виде произведения $G=C\langle b_1\rangle$, где C — прообраз $\overline{C}$ и являегся абелевой группой или неабелевой pdI-группой, $b_1\neq 1$ и $b_1^4=1$.

Уточним строение группы G в зависимости от свойств ее подгруппы C. Допустим сначала, что подгруппа C абелева. Так как $\langle a\rangle$ является силовской p-подгруппой периодической части группы C, то она сервантна в C. Являясь конечной, $\langle a\rangle$ дополняема в C. Так как $p\neq 2$, то из каждого элемента подгруппы $\langle a\rangle$ однозначно извлекается корень второй степени. Кроме этого $[G:C]=2$. Тогда по теореме 1 из работы [6] подгруппа $\langle a\rangle$ дополняема в группе G. Значит, $G=\langle a\rangle\times G_1$ и в группе G_1 нормальны все бесконечные циклические подгруппы, т. е. $G_1=C\langle b\rangle$, $b^4=1$ и $b^{-1}cb=c^{-1}$ для любого элемента $c\in C_1$. Покажем, что $|Z(G_1)|\leqslant 2$. Возьмем $z\in Z(G_1)$. Тогда $b^{-1}zb=z^{-1}=z$. Отсюда $z^2=1$. Покажем, что $z\in\langle b\rangle$. Действительно, иначе $\langle a, z, b\rangle\lhd G$ и если $\langle x\rangle\lhd G$ и $|x|=\infty$, то $[b, x]=1$. Тогда $\langle a, b, x\rangle\lhd G$ и потому $\langle b\rangle\lhd G$, что невозможно. Поэтому если $|b|=2$, то $|Z(G_1)|=1$. Если $|b|=4$, то b^2 — единственная инволюция группы G_1. Значит, в этом случае G является группой типа 4 теоремы 4.

Теперь рассмотрим случай, когда подгруппа C неабелева. Так как $C/\langle a\rangle$ — абелева группа, то C является pdI-группой. Как и в предыдущем случае, легко устанавливается, что если $|b|=2$, то в подгруппе C нет инволюций, а в случае $|b|=4$ инволюция b^2—единственная во всей группе G.

Из свойств подгруппы C и фактор-группы $G/\langle a\rangle$ следует, что любая абелева нециклическая подгруппа группы G содержится в подгруппе C и любая pd-подгруппа из C нормальна в G. Значит, в этом случае G является группой типа 5 теоремы 4. Лемма доказана.

Лемма 8. *Если центр неабелевой непериодической $pd\overline{HA}$-группы G непериодический и не содержит отличных от единицы p-элементов, то $p \neq 2$ и G является pdI-группой, силовская p-подгруппа которой имеет порядок p и дополняема в G.*

Доказательство. Пусть $x \in Z(G)$ и $|x| = \infty$, $a \in G$, $|a| = p$ и $a \notin Z(G)$. Так как $\langle a, x\rangle \lhd G$, то $\langle a\rangle \lhd G$. Значит, $p \neq 2$.

Покажем, что группа G содержит единственную подгруппу порядка p. Пусть $G \supset \langle a_1\rangle \times \langle a_2\rangle$ и $|a_1| = |a_2| = p$. Возьмем элемент $g \in G \setminus C_G\langle a_1, a_2\rangle$. Но $\langle xa_i, a_k\rangle \lhd G$ $(i = 1,2;\ k = 1,2)$. Поэтому при $i \neq k$

$$[g, xa_i] = [g, a_i] \in \langle xa_i, a_k\rangle \cap \langle a_i\rangle = 1,$$

что противоречит выбору элемента g. Следовательно, в группе G подгруппа порядка p единственная.

Покажем теперь, что в G нет элементов порядка p^2. Допустим, что $b \in G$ и $|b| = p^2$. Очевидно, $\langle b\rangle \lhd G$. Возьмем элемент $g \in G \setminus C_G(b^p)$. Если $|g| < \infty$, то $(|g|, p) = 1$. Тогда в неабелевой подгруппе $\langle b, g\rangle$ все силовские подгруппы циклические и ее коммутант совпадает с подгруппой $\langle b\rangle$. Но с другой стороны, из условия $\langle xb, b^p\rangle \lhd G$ следует

$$[g, xb] = [g, b] \in \langle xb, b^p\rangle \cap \langle b\rangle = \langle b^p\rangle,$$

что невозможно. Если $|g| = \infty$ и $g^n \in C_G(b)$, то $\langle g^n b, b^p\rangle \lhd G$. Отсюда $\langle g^{np} b^p\rangle \lhd G$. Поэтому

$$\langle g, g^{np} b^p] = [g, b^p] \in \langle g^{np} b^p\rangle \cap \langle b^p\rangle = 1,$$

что снова невозможно. Значит, в группе G нет элементов порядка p^2.

Обозначим через T периодическую часть подгруппы $C = C_G(a)$. По лемме 3 группа C нильпотентна, а ее подгруппа $T = \langle a\rangle \times T_1$ абелева, причем все подгруппы из T нормальны в G.

Возьмем произвольные элементы $g \in G$ и $t \in T_1$. Если $|g| < \infty$ и $(|g|, p) = 1$, то из условия $\langle xt, a\rangle \lhd G$ имеем

$$[g, xt] = [g, t] \in \langle xt, a\rangle \cap \langle t\rangle = 1.$$

Если $|g| = \infty$ и $g^n \in C_G(t)$, то $\langle g^n t, a\rangle \lhd G$ и поэтому

$$[g, g^n t] = [g, t] \in \langle g^n t, a\rangle \cap \langle t\rangle = 1.$$

Этим доказано, что $T_1 \subset Z(G)$.

Таким же образом доказывается, что любая бесконечная циклическая нормальная подгруппа группы G содержится в ее центре.

Докажем теперь, что подгруппа C абелева. Допустим, что в C существует неперестановочные элементы c и h. Тогда по доказанному выше $|c| = |h| = \infty$ и $h^{-1}ch = ca^{\lambda}$, где $\lambda \not\equiv 0 \pmod p$. Возьмем элемент $g \in G \setminus C$ и рассмотрим подгруппу $G_1 = \langle a, c, h, g\rangle$. В ней $g^{-1}ag = a^{\alpha}$, $\alpha \not\equiv 1 \pmod p$. Так как $\langle a, c\rangle \lhd G$, то $g^{-1}cg = a^{\beta}c^{\delta}$. Но $\langle c^p\rangle \lhd G$ и потому $c^p \in Z(G)$. Тогда $g^{-1}c^p g = c^{\delta p} = c^p$. Отсюда $\delta = 1$, т. е. $g^{-1}cg = ca^{\beta}$. Аналогично получим $g^{-1}hg = ha^{\gamma}$. Далее имеем

$$g^{-1}(ch)^2 g = c^2h^2a^{2(\beta+\gamma)-\lambda} = c^2h^2a^{2(\beta+\gamma)-\alpha\lambda}.$$

Отсюда $a^{-\lambda} = a^{-\alpha\lambda}$. Поэтому $\lambda(\alpha - 1) \equiv 0 \pmod p$. Так как $\lambda \not\equiv 0 \pmod p$, то $\alpha \equiv 1 \pmod p$, что противоречит выбору элемента g. Следовательно, подгруппа C абелева.

Установим дополняемость подгруппы $\langle a\rangle$ в группе G. Так как $\langle a\rangle$ — силовская p-подгруппа группы C, то она сервантна в C. Являясь конечной, $\langle a\rangle$ дополняема в C. По условию $[G : C] = n \neq 1$ и n делит $p - 1$. Поэтому из каждого элемента подгруппы $\langle a \rangle$ однозначно извлекается корень n-й степени. По теореме 1 из работы [6] подгруппа $\langle a \rangle$ дополняема в G.

Покажем, что $G' = \langle a \rangle$. Если $G = C\langle g \rangle$, то для этого достаточно установить, что $[c, g] \in \langle a \rangle$ для любого элемента $c \in C$. Если $|c| = \infty$ и $\langle c \rangle \lhd G$, то $[c, g] = 1$. Если $\langle c \rangle \ntriangleleft G$, то из условий $\langle a, c \rangle \lhd G$, $\langle c^p \rangle \lhd G$ и $c^p \in Z(G)$ получаем $[c, g] \in \langle a \rangle$. Если $|c| < \infty$, то $[c, g] \in \langle a \rangle$ по доказанному выше. Лемма доказана.

Лемма 9. *Если центр непериодической $pd\overline{HA}$-группы G периодический и не содержит отличных от единицы p-элементов, но $a \in Z(C_G(x))$, где $|a| = p$, $|x| = \infty$ и $\langle x \rangle \lhd G$, то $p \neq 2$ и G является группой типа 6 теоремы 4.*

Доказательство. Пусть $a \in G$, $|a| = p$, $a \in Z(C_G(x))$, где $|x| = \infty$ и $\langle x \rangle \lhd G$. Тогда по условию $G \neq C_G(x)$ и $G \neq C_G(a)$. Поэтому $G = C_G(x)\langle b \rangle$ и $b^2 \in C_G(x)$. Очевидно также, что $p \neq 2$. Заметим также, что все периодические подгруппы из $C_G(x)$ нормальны в G. Поэтому если $\langle y \rangle \lhd G$, где $|y| = \infty$, то $y \in Z(G_G(x))$. В самом деле, если $c \in C_G(x)$ и $|c| < \infty$, то $[c, y] \in \langle c \rangle \cap \langle y \rangle = 1$. Если $|c| = \infty$ и $\langle c \rangle \cap \langle y \rangle \neq 1$, то $[c, y] = 1$. Если $\langle c \rangle \cap \langle y \rangle = 1$, то $[c, y] \in \langle y \rangle \cap \langle c, a \rangle = 1$. Поэтому $b^{-1}yb = y^{-1}$.

Покажем, что $|b| < \infty$. Пусть $|b| = \infty$. Тогда $[a, b^2] = 1$ и $\langle a, b^2 \rangle \lhd G$. Значит, $\langle b^{2p} \rangle \lhd G$ и $b^{2p} \in Z(C_G(x))$. Отсюда $b^{2p} \in Z(G)$, что невозможно. Следовательно, подгруппа $C_G(x)$ содержит все элементы бесконечного порядка, $|b| < \infty$ и можно считать $|b| = 2^n$, $n \geqslant 1$.

Покажем, что в группе G нормальны все бесконечные циклические подгруппы. Пусть $c \in C_G(x)$, $|c| = \infty$ и $\langle c \rangle \ntriangleleft G$. Тогда $\langle a, c \rangle \lhd G$, $\langle c^p \rangle \lhd G$. Значит, $b^{-1}c^pb = c^{-p}$. Если $b^{-1}cb = a^{\alpha}c^{\beta}$, то $a^{\alpha p}c^{\beta p} = c^{-p}$, отсюда $\beta = -1$, т. е. $b^{-1}cb = a^{\alpha}c^{-1}$. Далее, так как $\langle b^2 \rangle \lhd G$, то $b^{-1}ab = a^{\delta}$, $1 < \delta < p$, и $b^{-2}ab^2 = a^{\delta^2} = a$. Отсюда $\delta \equiv -1 \pmod p$ и потому $b^{-1}ab = a^{-1}$. Кроме этого $[b^2, c] \in \langle b^2 \rangle \cap \langle a, c \rangle = 1$. Значит, $b^{-2}cb^2 = (c^{-1}a^{\alpha})^{-1}a^{-\alpha} = c$. Отсюда $a^{-2\alpha} = 1$ и $\alpha = 1$, т. е. $b^{-1}cb = c^{-1}$.

Пусть теперь $h \in C$ и $|h| < \infty$. Тогда $|hx| = \infty$ и $b^{-1}hxb = h^{-1}x^{-1}$. Значит, $b^{-1}hb = h^{-1}$. Отсюда легко следует, что подгруппа $C_G(x)$ абелева и G является группой типа 6 теоремы 4. Лемма доказана.

Лемма 10. *Если центр непериодической $pd\overline{HA}$-группы G периодический и центр подгруппы $C_G(x)$, где $|x| = \infty$ и $\langle x \rangle \lhd G$ не содержит элементов порядка p, то G является группой типа 7 теоремы 4.*

Доказательство. Пусть группа G удовлетворяет условиям леммы. Тогда, очевидно, $p \neq 2$. Рассмотрим подгруппу $C = C_G(x)$, где $|x| = \infty$ и $\langle x \rangle \lhd G$. По условию $G \neq C$ и $Z(C)$ не содержит элементов порядка p. Тогда по лемме 8 C является неабелевой pdI-группой, силовская p-подгруппа которой имеет порядок p и дополняема в C. Пусть $G_p = \langle a \rangle$. По условию $C_C(a) = D$ — абелева группа и $D \neq C$. Тогда $[C : D] = m$ и делит $p - 1$, а $[G : D] = 2m$ и $(p, 2m) = 1$. Подгруппа $\langle a \rangle$ дополняема в D и по теореме 1 из [6] она дополняема в G, т. е. $G = \langle a \rangle \leftthreetimes B$.

Не нарушая общности рассуждений можно считать $x \in B$. Тогда $C_G(x) = \langle a \rangle C_B(x)$, причем $C_B(x) \neq B$ и $C_B(x) \lhd B$. Следовательно, $G = \langle a \rangle C_1 \langle b \rangle$, где $C_1 = C_B(x)$ — абелева группа и $b^2 \in C_1$. Если допустить, что $|b| = \infty$, то $b^k \in Z(G)$ для некоторого натурального числа k, что невозможно. Значит, $|b| < \infty$. Поэтому можно считать $|b| = 2^n$, где $n \geqslant 1$.

Покажем, что $C_G(x) = C_G(y)$ для любой бесконечной циклической нормальной подгруппы $\langle y \rangle$ из G. Пусть $h \in C_G(x)$, но $h \notin C_G(y)$. Тогда $[h, x] = 1$ и $h^{-1}yh = y^{-1}$. Отсюда $\langle x \rangle \cap \langle y \rangle = 1$. Из условия $\langle xy, a \rangle \lhd G$ следует $\langle x^py^p \rangle \lhd G$. Значит, либо $[h, x^py^p] = 1$, либо $h^{-1}x^py^ph = x^{-p}y^{-p}$ и потому или $y^{2p} = 1$, или $x^{2p} = 1$, что невозможно. Так как $[G : C_G(x)] = 2$, то $C_G(x) = C_G(y)$.

Очевидно, что подгруппа $C_G\langle a, x \rangle$ содержит любую абелеву нециклическую pd-подгруппу и любая pd-подгруппа из $C_G\langle a, x \rangle$ нормальна в G. Значит, G является группой типа 7 теоремы 4. Лемма доказана.

1. *Лиман Ф. Н.* Группы с некоторыми системами инвариантных *pd*-подгрупп // Группы и системы их подгрупп.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1983.— С. 100—118.
2. *Лиман Ф. Н.* Периодические группы, все абелевы нециклические подгруппы которых инвариантны // Группы с ограничениями для подгрупп.— Киев : Наук. думка, 1971.— С. 65—95.
3. *Лиман Ф. Н.* Непериодические группы с некоторыми системами инвариантных подгрупп// Алгебра и логика.— 1968.— 7, № 4.— С. 70—86.
4. *Huppert B.* Gruppen mit modularer Sylow-gruppe // Math. Z.— 1961.— 75.— P. 140—153.
5. *Лиман Ф. Н.* Непериодические группы, все разложимые *pd*-подгруппы которых нормальны // Укр. мат. журн.— 1988.— 40, № 3.— С. 330—335.
6. *Dixon I. D.* Complements of normal subgroups in infinite groups // Pros. London. Math. Soc.— 1967.— 17, N 3.— P. 431—446.

Получено 08.01,91