УДК 512.547.21

А. В. РОМАНОВСКИЙ, д-р физ.-мат. наук,
А. А. ЯДЧЕНКО, канд. физ.-мат. наук (Гомел. отд-ние Ин-та математики АН БССР)

Мономиальные характеры и нормальные подгруппы конечных групп

Получен критерий мономиальности характеров π-обособленных групп, с помощью которого доказана теорема о существовании нормальной холловской подгруппы в линейной группе.

Одержано критерій мономіальності характерів π-обособлених груп, за допомогою якого доведена теорема про існування нормальної холовської підгрупи в лінійній групі.

Комплексный характер группы G называется мономиальным, если он получается индуцированием на G некоторого линейного характера некоторой (не обязательно собственной) подгруппы группы G. Известно ([1], следствие 5.13), что конечная группа, все комплексные неприводимые характеры которой мономиальны, является разрешимой. С другой стороны, можно указать пример разрешимой группы, не все неприводимые характеры которой мономиальны. Такой группой, например, является одна из групп 24-го порядка, полученная в результате расширения группы кватернионов с помощью автоморфизма третьего порядка. Поэтому представляет интерес теорема 1, являющаяся критерием мономиальности характеров π-обособленных групп, в частности, и разрешимых. С помощью теоремы 1 получается теорема 2, а также теорема 3 о существовании инвариантной холловской подгруппы в линейной группе, продолжающая исследования авторов [2—4].

Все используемые обозначения и определения можно найти, например, в [1, 5]; всюду под характером группы будем понимать комплексный характер, а под группой — конечную группу.

Группа называется π-обособленной, если каждый ее главный фактор есть либо π-группа, либо π'-группа.

Теорема 1. *В π-обособленной группе G с S_π-подгруппой M любая неприводимая компонента χ характера 1_M^G группы G, степень которой есть π-число, является мономиальной, и для нее существует такой линейный характер λ $S_{\pi'}$-подгруппы H группы G, что χ будет также неприводимой компонентой λ^G и $(1_M^G, \lambda^G)_G = \{1\}$.*

Доказательство. Допустим, что существуют π-обособленные группы с такой S_π-подгруппой M, что некоторая неприводимая компонента χ характера 1_M^G группы G, степень которой есть π-число, не является мономиальной. Будем считать, что G имеет наименьший порядок из таких групп.

Обозначим ядро характера χ группы G через K. Допустим, что $K \neq \{1\}$. Учитывая, что

$$(1_{MK/K}^{G/K}, \chi)_{G/K} = (\chi_{MK/K}, 1_{MK/K})_{MK/K} = \frac{1}{|MK/K|} \sum_{gK \in MK/K} \chi_{MK/K}(gK) \times$$

$$\times 1_{MK/K}(gK) = \frac{|M \cap K|}{|K||M|} \sum_{g \in MK} \chi(g) = \frac{|M \cap K|}{|M|} \sum_{g \in M \setminus (M \cap K)^\#} \chi(g) =$$

$$= \frac{|M \cap K|}{|M|} \sum_{g(M \cap K) \in M/M \cap K} \chi_{M/M \cap K}(g(M \cap K)) = \frac{1}{|M|} \sum_{g \in M} \chi_M(g) =$$

$$= \frac{1}{|M|} \sum_{g \in M} \chi_M(g)\, 1_M(g) = (\chi_M, 1_M)_M = (1_M^G, \chi)_G \neq 0,$$

а также $|G/K| < |G|$, видим, что для G/K по отношению неприводимой компоненты χ характера $1_{MK/K}^{G/K}$ группы G/K верно, что характер χ группы G/K мономиален. Очевидно, будет χ также мономиальным и для группы G. Получили противоречие. Следовательно, $K = \{1\}$. Предположим сначала, что $O_\pi(G) \neq \{1\}$. Заметим, что $O_\pi(G) \subseteq M$. Очевидно, $1_{O_\pi(G)}$, будучи ограничением 1_M на $O_\pi(G)$, ввиду $(\chi_M, 1_M)_M \neq 0$ будет неприводимой компонентой $\chi_{O_\pi(G)}$. Тогда согласно теореме Клифферда $\chi_{O_\pi(G)} = x(1) 1_{O_\pi(G)}$. Стало быть, $O_\pi(G) \subseteq K = \{1\}$, а это противоречит предположению. Следовательно, $O_{\pi'}(G) \neq \{1\}$.

По теореме Клифферда $\chi_{O_{\pi'}(G)} = e \sum_{i=1}^{t} \varphi_i$, где $\varphi_i \in \mathrm{Irr}(O_{\pi'}(G))$, а e —

натуральное число. Заметим, что $t = |G : I_G(\varphi_i)|$ [1, с. 82]. Так как $\chi(1)$ есть π-число, а $\varphi_i(1)$ делит $|O_{\pi'}(G)|$, то $\varphi_i(1) = 1$. Учитывая, что характер χ является точным, согласно следствию 2.23 из [1] имеем

$$(O_{\pi'}(G))' \subseteq \bigcap_{i=1}^{t} \operatorname{Ker} \varphi_i = \{1\}.$$

Следовательно, подгруппа $O_{\pi'}(G)$ абелева, а так как $O_{\pi}(G) = \{1\}$, то

$$C_G(O_{\pi'}(G)) = O_{\pi'}(G). \qquad (1)$$

Предположим, что $I_G(\varphi_1) = G$. Тогда $\chi_{O_{\pi'}(G)} = \chi(1)\varphi_1$, т. е. $|\chi(g)| = \chi(1)$ для $g \in O_{\pi'}(G)$. Следовательно, по лемме 2.27 (*f*) [1] в силу точности характера χ будет $O_{\pi'}(G) \subseteq Z(\chi) = Z(G)$. Тогда $G = O_{\pi'}(G)$ ввиду (1), стало быть, G — абелева π'-группа, все неприводимые характеры которой мономиальные. Таким образом, в рассматриваемом случае χ также мономиален. Получили противоречие.

Следовательно, $T = I_G(\varphi_1) \neq G$. По теореме 6.11 [1] существует неприводимый характер ψ подгруппы T такой, что $\psi^G = \chi$.

Так как t делит π-число $\chi(1)$, то t также есть π-число. Значит, T содержит некоторую $S_{\pi'}$-подгруппу группы G. Поэтому $G = TM$. Теперь видно, что $T \cap M$ будет S_{π}-подгруппой подгруппы T.

Согласно упражнению 5.2 [1] справедливо

$$(\psi^G)_M = (\psi_{T \cap M})^M.$$

Тогда

$$(1_{T\cap M}^T, \psi)_T = (\psi_{T\cap M}, 1_{T\cap M})_{T\cap M} = ((\psi_{T\cap M})^M, 1_M)_M = (\chi_M, 1_M)_M = (1_M^G, \chi)_G \neq 0.$$

Так как $\chi(1) = \psi^G(1) = |G:T|\,\psi(1)$, то $\psi(1)$ есть π-число. Ввиду того, что $T \neq G$, и условие теоремы для подгруппы T выполняется по отношению к неприводимой компоненте ψ характера $1_{T\cap M}^T$ подгруппы T, для подгруппы T рассматриваемое утверждение теоремы справедливо, т. е. характер ψ мономиален, значит, для некоторого линейного характера μ одной из подгрупп T будет $\mu^T = \psi$. Но тогда $\chi = \psi^G = (\mu^T)^G = \mu^G$, т. е. χ мономиален. Получили противоречие.

Итак, мы убедились, что неприводимая компонента характера 1_M^G группы G, степень которой есть π-число, является мономиальной. Следовательно, существует такая подгруппа S группы G, содержащая H, что для некоторого ее линейного характера μ будет $\mu^G = \chi$. Значит, $(\chi_S, \mu)_S \neq 0$, но тогда и $(\chi_H, \mu_H)_H \neq 0$, где $\lambda = \mu_H$ есть линейный характер подгруппы H.

Так как $1_M^G(g) = 0$, если $g \in H^{\#}$, то по теореме 4.2.7 (*ii*) [6] будет $(1_M^G)_H = \rho$, где ρ — регулярный характер подгруппы H. Теперь с учетом леммы 2.11 [1] убеждаемся, что

$$(1_M^G, \lambda^G)_G = ((1_M^G)_H, \lambda)_H = (\rho, \lambda)_H = 1.$$

Теорема доказана.

Теорема 2. *В π-обособленной группе G с S_{π}-подгруппой M степень неприводимой компоненты χ характера 1_M^G группы G тогда и только тогда будет π-числом, когда существует такой линейный характер λ $S_{\pi'}$-подгруппы H группы G, что χ будет неприводимой компонентой λ^G.*

Справедливость теоремы следует из теоремы 1 и результатов работы [7].

Теорема 3. *Если степень некоторой точной неприводимой компоненты φ характера 1_M^G π-обособленной группы G с S_{π}-подгруппой M является π-числом и $\varphi(1)$ не делится на такую степень $q^s \neq 1$ простого числа q, что $q^s \equiv 1 \pmod p$ для любого $p \in \pi'$, то $S_{\pi'}$-подгруппа H группы G абелева и нормальна в G.*

Доказательство. Допустим, что существуют группы, для которых теорема не выполняется. Выберем среди них группу G, имеющую наименьший порядок.

Согласно соответствию Фробениуса для характеров $(\varphi_M, 1_M)_M = (1_M^G, \varphi)_G \neq 0$.

Поскольку ввиду леммы 5.11 [1]

$$O_\pi(G) \subseteq \mathrm{Ker}\, 1_M^G \subseteq \mathrm{Ker}\, \varphi = \{1\},$$

то $O_{\pi'}(G) \neq \{1\}$ и $C_G(O_{\pi'}(G)) \subseteq O_{\pi'}(G)$.

Учитывая также, что порядок подгруппы $O_{\pi'}(G)$ есть π'-число, а степень точного неприводимого характера φ группы G есть π-число, на основании теоремы Клифворда делаем вывод, что подгруппа $O_{\pi'}(G)$ абелева. Значит, $C_G(O_{\pi'}(G)) = O_{\pi'}(G)$.

Пусть X есть максимальная инвариантная подгруппа группы G. Согласно указанной теореме Клиффорда

$$\varphi_X = e \sum_{x \in U} \xi^x,$$

где U — множество представителей всех смежных классов группы G по подгруппе $I_G(\xi)$, взятых по одному из каждого класса.

Предположим вначале, что $|G:X|$ есть π-число. Поскольку $X \lhd G$ и M есть S_π-подгруппа группы G, то $M \cap X$ есть S_π-подгруппа подгруппы X. Так как $(\varphi_M, 1_M)_M \neq 0$, то $(\varphi_{M\cap X}, 1_{M\cap X})_{M\cap X} \neq 0$, т. е. можем считать, что $(\xi_{M\cap X}, 1_{M\cap X})_{M\cap X} \neq 0$. Следовательно, $(\xi^x_{(M\cap X)^x}, 1_{(M\cap X)^x})_{(M\cap X)^x} \neq 0$ для каждого $x \in U$. Так как $\xi(1)$ есть π-число для всех $x \in U$, то для фактор-группы $X/\mathrm{Ker}\,\xi^x$ выполняются все условия теоремы. Следовательно, согласно минимальности группы G будет $H\,\mathrm{Ker}\,\xi^x/\mathrm{Ker}\,\xi^x \lhd X/\mathrm{Ker}\,\xi^x$ и подгруппа $H\,\mathrm{Ker}\,\xi^x/\mathrm{Ker}\,\xi^x$ абелева для каждого $x \in U$. Из первого заключения вытекает, что $H\,\mathrm{Ker}\,\xi^x \lhd X$ для каждого $x \in U$. Значит, $H = \bigcap_{x\in U} H\,\mathrm{Ker}\,\xi^x \lhd X$, ибо $\bigcap_{x\in U} \mathrm{Ker}\,\xi^x = \mathrm{Ker}\,\varphi = \{1\}$. Поскольку H есть $S_{\pi'}$-подгруппа X, то $H \lhd G$. Так как $H = O_{\pi'}(G)$, то абелевость H установлена выше. Противоречие.

Следовательно, $|G:X| = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$ есть π'-число. Обозначим $D = H \cap X$. Так как в рассматриваемом случае φ_X есть неприводимый характер подгруппы X, который сохраняет все свойства теоремы, то согласно минимальности группы G $S_{\pi'}$-подгруппа D из X абелева и инвариантна в X. Поскольку $X \lhd G$, то $D \lhd G$ и $D = O_{\pi'}(G)$, ввиду того, что X есть максимальная нормальная подгруппа группы G. Предположим, что $r \neq 1$. Тогда $P_iX \neq G$, где P_i — силовская p_i-подгруппа группы G, $i = 1, \dots, r$, и φ_{P_iX} — неприводимый характер подгруппы P_iX. Поэтому получаем, что P_iX имеет инвариантную абелеву $S_{\pi'}$-подгруппу P_iD, $i = 1, \dots, r$. Следовательно, $P_i \subseteq C_G(D) = D$ — противоречие. Стало быть, $r = 1$ и $|G:X| = p \in \pi'$.

Поскольку по теореме 1 характер φ мономиальный, то в группе G существует такая подгруппа T, что для некоторого ее линейного неприводимого характера μ справедливо равенство $\varphi = \mu^G$, причем можно считать, что $H \subseteq T$, ибо

$$\varphi(1) = |G:T|\,\mu(1) = |G:T| = q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} \dots q_t^{\alpha_t}$$

есть π-число. Здесь q_i — простое π-число, $\alpha_i \in N$, $i = 1, \dots, t$.

Поскольку $\mu_D \in \mathrm{Irr}(D)$, то $T = I_G(\mu_D)$ и характер μ есть продолжение характера μ_D на подгруппу T.

Из теоремы 1 [8] следует, что если группа G обладает рядом нормальных подгрупп, факторы которого для некоторого множества σ либо являются σ-группами, либо обладают нильпотентной S_σ-подгруппой, то любая разрешимая σ-подгруппа из G содержится в некоторой S_σ-подгруппе группы G.

В частности, для рассматриваемой группы G и ее подгрупп это будет выполняться, если $\sigma = \{\pi', q_i\}$. Значит, H содержится в некоторой S_σ-подгруппе T_i из T, а потому найдется силовская q_i-подгруппа R_i группы T такая, что $T_i = HR_i$. По той же причине T_i содержится в некоторой S_σ-подгруппе G_i группы G. Тогда, очевидно, $G_i = HQ_i$, где Q_i — силовская q_i-подгруппа G, содержащая R_i. Тогда

$$T_i = I_{G_i}(\mu_D) = G_i \cap T, \quad i = 1, \dots, t, \tag{2}$$

и $\mu_i = \mu_{T_i}$ есть продолжение характера μ_D на подгруппу T_i, $i = 1, \dots, t$.

Так как $0 \neq (1_M^G, \varphi)_G = (\varphi_M, 1_M)_M = ((\mu^G)_M, 1_M)_M = ((\mu^{TM})_M, 1_M)_M = ((\mu_{T\cap M})^M, 1_M)_M = (\mu_{T\cap M}, 1_{T\cap M})_{T\cap M}$, то $\mu_{T\cap M} = 1_{T\cap M}$. Но последнее рассуждение, очевидно, справедливо для любой подгруппы группы G, сопряженной с M. Поэтому $(\mu_i)_{T\cap Q_i} = 1_{T\cap Q_i}$.

Поскольку $G_i = T_iQ_i$, то используя (2) и упражнение 5.2 [1], получаем $((\mu_i)^{G_i})_{Q_i} = ((\mu_i)^{T_iQ_i})_{Q_i} = ((\mu_i)_{T_i\cap Q_i})^{Q_i} = ((\mu_i)_{G_i\cap T\cap Q_i})^{Q_i} = ((\mu_i)_{T\cap Q_i})^{Q_i}$. На основании последних рассуждений стало ясно, что

$$((\mu_i)^{G_i})_{Q_i} = (1_{T\cap Q_i})^{Q_i}.$$

Следовательно,

$$(((\mu_i)^{G_i})_{Q_i}, 1_{Q_i})_{Q_i} = ((1_{T\cap Q_i})^{Q_i}, \quad 1_{Q_i})_{Q_i} \neq 0,$$

Из выбора подгруппы Q_i вытекает, что

$$\mu_i^{G_i}(1) = |G_i : T_i|\,\mu_i(1) = \frac{|H||Q_i|}{|H||R_i|} = q_i^{\alpha_i}.$$

Так как $\mu_i^{G_i} \in \mathrm{Irr}(G_i)$ по теореме 6.11 [1], то фактор-группа G_i/K_i удовлетворяет всем условиям теоремы, где $K_i = \mathrm{Ker}\,\mu_i^{G_i}$, $i = 1, \dots, t$.

Допустим, что $t > 1$, но тогда $G_i \neq G$, $i = 1, \dots, t$. Ввиду минимальности порядка группы G, очевидно, $HK_i/K_i \lhd G_i/K_i$ и фактор-группа HK_i/K_i абелева, $i = 1, \dots, t$. Следовательно, $HK_i \lhd G_i$, а значит, $N_{G_i}(H) \times K_i = G_i$. Так как $Q_i \cap K_i$ есть силовская подгруппа K_i, то найдется силовская подгруппа Q_i^* из $N_{G_i}(H)$ такая, что $Q_i = Q_i^*(Q_i \cap K_i)$. Поскольку $Q_i \cap K_i \subseteq T$ согласно (2), то $Q_i \subseteq TG^*$, где $G^* = \langle HQ^* \mid i = 1, \dots, t\rangle$, но тогда, очевидно, $TG^* = G$. Так как $G^* \subseteq N_G(H) = N$, то $TN = G$. Поэтому

$$\varphi_N = (\mu^G)_N = (\mu^{TN})_N = (\mu_{T\cap N})^N. \tag{3}$$

Но так как $T = I_G(\mu_D)$, то $T \cap N = I_N(\mu_D)$. Значит, $\mu_{T\cap N}$ — продолжение характера μ_D на подгруппу $T \cap N$ и по теореме 6.11 [1] $(\mu_{T\cap N})^N \in \mathrm{Irr}(N)$, т. е. согласно выражению (3) $\varphi_N \in \mathrm{Irr}(N)$. Следовательно, по теореме Клиффорда, ввиду того, что $H \lhd N$, и учитывая, что $\varphi(1)$ есть π-число, делаем вывод, что все неприводимые компоненты характера φ_H линейные, т. е. $H' \subseteq \mathrm{Ker}\,\varphi = \{1\}$. Это влечет абелевость подгруппы H. Теорема верна, так как $H \subseteq C_G(D) = D \lhd G$. Противоречие.

Следовательно, $t = 1$ и $G = HQ$. Так как $\varphi(1)$ есть π-число, то $\varphi(1) \mid |Q|$.

Пусть R — такая нормальная подгруппа группы G, что $D \subseteq R$ и X/R — главный фактор группы G. Пусть $\overline{G} = G/R$. Тогда $\overline{G} = \overline{H}\overline{X}$, где $\overline{H} = HR/R$ и $\overline{X} = X/R$, причем $|\overline{H}| = p$ и $\overline{X}$ — элементарная абелева q-группа, $p \neq q$. Пусть $N_{\overline{G}}(\overline{H}) \neq \overline{H}$. Тогда $N_{\overline{G}}(\overline{H}) = \overline{H} \times \overline{C}$, где $\overline{C} \neq \{\overline{1}\}$ и $\overline{C} = C_{\overline{X}}(\overline{H})$. Следовательно, $\overline{C} \lhd \overline{G}$ и поскольку $\overline{X}$ — минимальная нормальная подгруппа группы $\overline{C}$, ибо X/R — главный фактор группы G, то $\overline{C} = \overline{X}$. Значит, $\overline{G} = \overline{H} \times \overline{X}$, т. е. $HR \lhd G$, и так как $HR \neq G$, то получаем противоречие с тем, что группа G не имеет нормальных подгрупп, индекс которых в G есть π-число. Следовательно, наше предположение о том, что $N_{\overline{G}}(\overline{H}) \neq \overline{H}$ неверно. Поэтому $N_{\overline{G}}(\overline{H}) = \overline{H}$ и по теореме Силова $|\overline{X}| = |X:R| = q^r \equiv 1 \pmod p$.

Так как φ_X — неприводимый характер подгруппы X, то можем применить теорему 6.18 [1], согласно которой выполняется одно из трех следующих утверждений:

1) $\varphi_R \in \mathrm{Irr}(R)$;

2) $\varphi_R = \sum\limits_{i=1}^{s} \psi_i$, где $\psi_i \in \mathrm{Irr}(R)$ и $s = |X:R|$;

3) $\varphi_R = e\psi$, где $\psi \in \mathrm{Irr}(R)$ и $e^2 = |X:R|$.

Предположим, что справедливо первое утверждение, т. е. $\varphi_R \in \mathrm{Irr}(R)$. Тогда $\varphi_{HR} \in \mathrm{Irr}(HR)$. Так как $HR \neq G$, то согласно минимальности группы G имеем, что подгруппа H абелева и нормальна в HR. Тогда $H \subseteq C_G(D) = D$, противоречие.

Пусть выполняется второе утверждение. Тогда $s = |X:R|$ делит $\varphi(1)$, но так как $s \equiv 1 \pmod p$, в чем мы убедились выше, то получили противоречие с условием теоремы.

Так как $\varphi = \mu^G$, где $\mu \in \mathrm{Irr}(T)$ и $\mu_D \in \mathrm{Irr}(D)$ ибо $\mu(1) = 1$, то согласно теореме 6.11 (d) [1] $(\varphi_D, \mu_D)_D = (\mu_D, \mu_D)_D = 1$. Если верен случай 3 приведенной теоремы, то $(\varphi_D, \mu_D)_D \geqslant e > 1$. Противоречие. Теорема доказана.

1. *Isaacs I. M.* Character theory of finite groups.— New York : Acad. press, 1976.— 303 p.
2. *Романовский А. В.* Исключительные характеры конечных групп.— Минск : Наука и техника, 1985.— 147 с.
3. *Романовский А. В., Ядченко А. А.* О силовских подгруппах линейных групп // Мат. сб.— 1988.— 12, № 4.— С. 568—573.
4. *Ядченко А. А.* Разрешимые неприводимые линейные группы произвольной степени с холловской TI-подгруппой // Мат. заметки.— 1990.— 48, № 2.— С. 137—144.
5. *Isaacs I. M.* Character degrees and derived length of a solvable group // Can. J. Math.— 1975.— 27, N 1.— P. 146—151.
6. *Gorenstein D.* Finite Groups.— New York : Harper and Row, 1968.— 527 p.
7. *Gow R.* Characters of solvable groups induced by linear characters of Hall subgroups // Arch. Math.— 1983.— 40, N 3.— P. 232—237.
8. *Романовский А. В.* О вложении и сопряженности подгрупп у конечных групп // Изв. АН БССР. Сер. физ.-техн. наук.— 1962.— № 2.— С. 59—63.

Получено 16.01.91