УДК 519.44

П. Г. ГРЕСЬ, канд. физ.-мат. наук (Ужгород. ун-т)

О некоторых алгебрах, связанных с конечными группами

Строятся новые типы алгебр, учитывающие теоретико-блоковую структуру конечной группы. Изучается строение этих алгебр. Доказано, что число неразложимых компонент такой алгебры равно числу тех p-блоков конечной группы, дефектная группа которых содержит заданный p-элемент, определяющий упомянутую алгебру. Если в качестве p-элемента выбрать единичный, то число неразложимых компонент равно числу p-блоков конечной группы.

Будуються нові типи алгебр, які враховують теоретико-блокову структуру скінченної групи. Вивчається будова цих алгебр. Доведено, що число нерозкладних компонент такої алгебри дорівнює числу тих p-блоків скінченної групи, дефектна група яких містить заданий p-елемент, що визначає згадану алгебру. Якщо за p-елемент взяти одиничний, то число нерозкладних компонент дорівнює числу всіх p-блоків скінченної групи.

Пусть G — конечная группа, $\mathrm{Cl}\,(G)$ — множество всех сопряженных классов группы G, $\mathrm{Irr}\,(G)$ — множество всех неприводимых комплексных характеров группы G. Если $L \in \mathrm{Cl}\,(G)$, обозначим через $\widehat{L}$ сумму в групповой алгебре $\mathbb{C}G$ всех элементов класса L. Хорошо известно (см., например, [1]), что множество $\{\widehat{L} \mid L \in \mathrm{Cl}\,(G)\}$ образует базис центра $Z\,\mathbb{C}G$ групповой алгебры $\mathbb{C}G$. Пусть $\chi \in \mathrm{Irr}\,(G)$, $L \in \mathrm{CL}\,(G)$, $g_L \in L$, $\omega_\chi(\widehat{L}) = |L|\,\chi(g_L)/\chi(1)$. Тогда функция ω_χ, продолженная по линейности на всю $Z\mathbb{C}G$, является ее линейным характером и каждый линейный характер $Z\mathbb{C}G$ совпадает с ω_χ для подходящего $\chi \in \mathrm{Irr}\,(G)$. Далее, если $L, T \in \mathrm{Cl}\,(G)$ и $\widehat{L}\widehat{T} = \sum_{\widehat{N} \in \mathrm{Cl}(G)} a_{LT}^N \widehat{N}$, то структурные константы a_{LT}^N являются целыми неотрицательными числами и выражаются через неприводимые комплексные характеры группы G:

$$a_{LT}^N = \frac{|L|\,|T|}{|G|} \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} \frac{\chi(g_L)\,\chi(g_T)}{\chi(1)}\,\chi(g_N). \qquad (1)$$

Более того, алгебру $Z\mathbb{C}G$ можно определить как линейное пространство над $\mathbb{C}$ с базисом $\{L \mid L \in \mathrm{Cl}(G)\}$ структурными константами в этом базисе, заданными с помощью (1).

Пусть F — произвольное поле. Так как $a_{LT}^{N} \in Z$, то можно определить алгебру ZFG как линейное пространство над F и структурными константами a_{LT}^{N}, считая $a_{LT}^{N} \in F$. Если $\mathrm{char}\, F = p$ и $p \parallel |G|$, то алгебра ZFG является одним из основных объектов и инструментов теории модулярных представлений конечных групп. В частности, если поле F достаточно широкое, то число неразложимых идеалов алгебры ZFG равно числу блоков группы G, а размерность неразложимого идеала равна числу неприводимых комплексных характеров в соответствующем блоке.

В настоящей работе мы применяем описанную выше схему построения центра групповой алгебры для определения других типов алгебр, связанных с конечной группой. Основная идея, лежащая в основе этой конструкции, состоит в следующем. Вместо множества $\mathrm{Cl}(G)$, участвующего в построении центра групповой алгебры, выбираем его подмножество $\tilde{S}$, состоящее из всех сопряженных классов, принадлежащих заданному набору p-секций группы G (см. п. 1). Далее, вместо множества $\mathrm{Irr}(G)$ выбираем подмножество $X \subseteq \mathrm{Irr}(G)$, обладающее тем свойством, что $|X| = |\tilde{S}|$ и для которого матрица $\Phi = (\chi(g_L))_{\chi \in X, L \in \tilde{S}}$ невырождена. Затем рассматриваем линейное пространство $\Gamma(X, \tilde{S})$ над полем $\mathbb{C}$, базисом которого служит множество $\hat{S}$. Линейное пространство $\Gamma(X, \tilde{S})$ превращаем в алгебру, задавая структурные константы в базисе $\tilde{S}$ с помощью равенства, подобного равенству (1). Модификация равенства (1) связана с введением для каждого $\varphi \in X$ подходящей функции η_φ. Роль функций η_φ аналогична роли неразложимых характеров Брауэра, а их построение напоминает построение неразложимых характеров Брауэра путем введения чисел разложения и инвариантов Картана. Попутно выводим соотношения ортогональности, подобные соотношениям ортогональности для характеров Брауэра. Кроме того, вводим понятия чисел разложения сопряженных классов и инвариантов Картана сопряженных классов. Это позволяет связать структурные константы алгебры $Z\mathbb{C}G$ со структурными константами алгебры $\Gamma(X, \tilde{S})$ и доказать, что $\Gamma(X, \tilde{S})$ является гомоморфным образом алгебры $Z\mathbb{C}G$. Для доказательства последнего факта в явном виде строим базис идеала $I(X, \tilde{S})$ алгебры $Z\mathbb{C}G$, для которого $Z\mathbb{C}G/I(X, \tilde{S}) \cong \Gamma(X, \tilde{S})$. Кроме того, для алгебры $\Gamma(X, \tilde{S})$ построен полный набор ее примитивных попарно ортогональных идемпотентов и показано, что множество всех ее линейных характеров совпадает с множеством $\{\omega_\chi \mid \chi \in X\}$. Тем самым, полностью изучено строение алгебры $\Gamma(X, \tilde{S})$.

Обозначим через R_p кольцо P-целых ($p \in P$) поля алгебраических чисел, являющегося полем разложения группы G. Предположим, что $\tilde{S}$ состоит из всех сопряженных классов, принадлежащих фиксированной p-секции S группы G. В этой ситуации мы показываем, что X всегда можно выбрать так, чтобы матрица Φ была R_P-обратимой. При таком выборе матрицы Φ и множества S структурные константы алгебры $\Gamma(X, \tilde{S})$ принадлежат кольцу R_p. Это создает предпосылки для рассмотрения подкольца Γ'алгебры $\Gamma(X, \tilde{S})$, состоящего из всех R -линейных комбинаций элементов множества $\tilde{S}$. Тем самым, Γ' становится алгеброй над R_P. Для нее мы в явном виде находим полный набор примитивных попарно ортогональных идемпотентов и доказываем, что их число (а значит, и число неразложимых идеалов алгебры Γ') равно числу тех p-блоков группы G, дефектная группа которых содержит p-элемент π, определяющий p-секцию S. В частности, если $\pi = 1$ (т. е. состоит из всех p'-классов группы G), то число неразложимых компонент алгебры Γ' равно числу p-блоков группы G. Изучены также ранги неразложимых компонент алгебры Γ'. Разумеется, полученные результаты переносятся на алгебру $\Gamma'/P\Gamma'$ над полем характеристики p. Таким образом, через алгебры Γ' или $\Gamma'/P\Gamma'$ создаются предпосылки для еще одного подхода к задачам Р. Брауэра о теоретико-групповой характеризации числа p-блоков конечной группы и числа неприводимых характеров Брауэра в p-блоке.

Следует отметить, что частный случай алгебры $\Gamma(X, \widetilde{S})$ для p-разрешимой группы G и множества S, состоящего из всех p'-классов, рассматривал А. В. Руколайне [2]. Кроме того, мы выводим соотношения ортогональности, подобные соотношениям ортогональности для характеров Брауэра. Близкие по смыслу соотношения можно найти у В. А. Белоногова [3].

1. Обозначения и основные определения. Пусть G — конечная группа, p — простое число, $g \in G$. Тогда $g = g_p g_{p'}$, где $g_{p'}$ — p'-элемент (p'-часть g), а g_p — p-элемент (p-часть g), причем это представление однозначно. Подмножество S группы G, состоящее из всех тех элементов, p-части которых сопряжены в G, будем называть p-секцией. Очевидно, p-секция является объединением сопряженных классов.

В дальнейшем символом $\mathrm{Cl}(G)$ ($\mathrm{RCL}(G)$) будем обозначать множество всех сопряженных классов (p'-классов) группы G, а символом $\mathrm{Irr}(G)$ — множество всех неприводимых комплексных характеров группы G. Если B — p-блок группы G, то $\mathrm{Irr}(B)$ — множество всех неприводимых комплексных характеров группы G, принадлежащих B. Множество всех p-блоков группы G будем обозначать через $Bl(G)$. Если $L \in \mathrm{Cl}(G)$, g_L — представитель класса L. Для конечных множеств X, Y, $(a_{ij})_{\substack{i\in X\\ j\in Y}}$ будет обозначать матрицу, в которой i — индекс строки, а j — индекс столбца, причем предполагается, что на X, Y выбраны порядки, в соответствии с которыми i и j пробегают эти множества. Если $X = Y$, будем также писать $(a_{ij})_{i,j} \in X$. Для матрицы A A' будет обозначать транспонированную, а $\bar{A}$ — комплексно сопряженную. Черта сверху будет применяться для обозначения чисел, комплексно сопряженных к числам из $\mathbb{C}$.

2. Соотношения ортогональности. Пусть G — конечная группа, p — простое число, $\pi_1, \ldots, \pi_t$ — попарно не сопряженные p-элементы группы G. Обозначим через $S_G(\pi_i)$ p-секцию элемента π_i, а через $\widetilde{S}_G(\pi_i)$ — множество сопряженных классов группы G, лежащих в $S_G(\pi_i)$. Положим $\widetilde{S} = \bigcup\limits_{i=1}^{t} \widetilde{S}_G(\pi_i)$, $Z = (\chi(g_L))_{\substack{\chi\in \mathrm{Irr}(G)\\ L\in \widetilde{S}}}$. Матрица Z является подматрицей таблицы характеров группы G. Поэтому ее столбцы ортогональны и, значит, ее ранг равен $|\widetilde{S}|$. Пусть $n = |\widetilde{S}|$. Тогда существует такое подмножество X множества $\mathrm{Irr}(G)$, что $|X| = n$ и матрица $\Phi = (\chi(g_L))_{\substack{\chi\in X\\ L\in \widetilde{S}}}$ невырождена. Поэтому для любого $L \in \widetilde{S}$ имеем

$$\chi(g_L) = \sum_{\varphi\in X} h_{\chi\varphi} \varphi(g_L), \tag{2}$$

где $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$, $h_{\chi\varphi} \in \mathbf{Q}(\varepsilon)$, ε — примитивный корень степени $|G|$ из 1. Числа $h_{\chi\varphi}$ будем называть числами разложения характеров относительно пары $(X, \widetilde{S})$, а матрицу $H = (h_{\chi\varphi})_{\substack{\chi\in \mathrm{Irr}(G)\\ \varphi\in X}}$ — матрицей разложения характеров относительно пары $(X, \widetilde{S})$.

Предложение 1. *Матрица* $\left(\sum\limits_{L\in\widetilde{S}} \varphi(g_L)\overline{\psi(g_L)}\,|L|\right)_{\varphi,\psi\in X}$ *невырождена.*

Доказательство. Предположим, что $\sum\limits_{\psi\in X} a_\psi \left(\sum\limits_{L\in\widetilde{S}} \varphi(g_L)\overline{\psi(g_L)}\,|L|\right) =$

$= 0$, где $a_\psi \in \mathbf{Q}(\varepsilon)$. Тогда $\sum_{L\in\widetilde{S}} \varphi(g_L)|L| \sum_{\psi\in X} a_\psi \psi(g_L) = 0$. Однако матрица $(\varphi(g_L)|L|)_{\varphi\in X, L\in\widetilde{S}}$ невырождена, поскольку получена из Φ умножением столбцов Φ на $|L|$. Значит, $\sum_{\psi\in X} a_\psi \psi(g_L) = 0$ для всех $L\in\widetilde{S}$. Из невырожденности Φ следует, что $a_\psi = 0$ для всех $\psi\in X$.

Пусть $B\in \mathrm{Bl}(G)$. Положим $X(B) = X \cap \mathrm{Irr}(G)$.

Предложение 2. *Пусть* $\chi\in\mathrm{Irr}(G)$, $\varphi\in X$. *Тогда* $h_{\chi\varphi} = 0$, *если* χ *и* φ *не лежат в общем блоке.*

Доказательство. Пусть $\chi = \mathrm{Irr}(B)$, $\varphi\notin X(B)$. В силу [4] $\sum_{L\in\widetilde{S}} \chi(g_L)\overline{\varphi(g_L)}|L| = 0$. Применяя (2), имеем

$$\sum_{L\in\widetilde{S}}\sum_{\psi\in X} h_{\chi\psi}\psi(g_L)\overline{\varphi(g_L)}|L| = 0 = \sum_{\substack{\psi\in X\\ \psi\in X-X(B)}} h_{\chi\psi}\sum_{L\in\widetilde{S}}\psi(g_L)\overline{\varphi(g_L)}|L| =$$

$$= \sum_{\psi\in X-X(B)} h_{\chi\psi}\sum_{L\in\widetilde{S}}\psi(g_L)\overline{\varphi(g_L)}|L|,\ \varphi\notin X(B).$$

В силу предложения 2 матрица $\left(\sum_{L\in\widetilde{S}}\psi(g_L)\overline{\varphi(g_L)}|L|\right)_{\psi,\varphi\in X}$ невырождена. В силу [4] $\sum_{L\in\widetilde{S}}\psi(g_L)\overline{\varphi(g_L)}|L| = 0$, если ψ и φ не лежат в общем блоке. Поэтому матрица $\left(\sum_{L\in\widetilde{S}}\psi(g_L)\overline{\varphi(g_L)}|L|\right)_{\psi,\varphi\in X-X(B)}$ также невырождена. Значит, $h_{\chi\psi} = 0$ для всех $\psi\in X - X(B)$. В частности, $h_{\chi\varphi} = 0$.

Следствие. *Пусть* $B\in\mathrm{Bl}(G)$. *Для любых* $\chi\in\mathrm{Irr}(G)$, $L\in\widetilde{S}$

$$\chi(g_L) = \sum_{\varphi\in X(B)} h_{\chi\varphi}\varphi(g_L). \tag{3}$$

Доказательство непосредственно следует из (2) и предложения 2.

Пусть $\mathrm{Bl}(G) = \{B_1, \ldots, B_s\}$. Из (2) следует, что при расположении характеров множеств X и $\mathrm{Irr}(G)$ по блокам матрица H приобретает вид

$$H = \begin{pmatrix} H_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & H_S\end{pmatrix},$$

где $H_i = H_{B_i} = (h_{\chi\varphi})_{\chi\in\mathrm{Irr}(B_i),\ \varphi\in X(B_i)}$.

Матрицу H_i будем называть матрицей разложения характеров блока B_i относительно пары $(X, \widetilde{S})$. Положим $u_{\varphi\psi} = \sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(B)} h_{\chi\varphi}\overline{h_{\chi\psi}}$, $\varphi, \psi\in X(B)$. Числа $u_{\chi\psi}$ будем называть инвариантами Картана характеров блока B относительно пары $(X, \widetilde{S})$, а матрицу $U_B = (u_{\varphi\psi})_{\varphi,\psi}\in X(B)$ — матрицей Картана характеров блока B относительно пары $(X, \widetilde{S})$. По определению $U_B =$

$= \overline{H}'_B H_B$. Положим

$$U = \begin{pmatrix} U_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & U_S \end{pmatrix},$$

где $U_i = U_{B_i}$. Матрицу U будем называть матрицей Картана характеров группы G относительно $(X, \widetilde{S})$. Для $\varphi \in X(B)$ положим $\eta_\varphi = \sum_{\varphi \in X(B)} u_{\varphi\psi}\psi$.

Если f, h — функции, заданные на множестве $\widetilde{S}$ и принимающие значения в $\mathbf{Q}(\varepsilon)$, определим

$$\langle f, h\rangle_S = \frac{1}{|G|} \sum_{L \in \widetilde{S}} f(g_L)\, \overline{h(g_L)}\, |L|. \tag{4}$$

Тогда (4) определяет скалярное произведение на $Q(\varepsilon)$-линейном пространстве всех функций классов L, $L \in \widetilde{S}$.

Теорема 1 (соотношения ортогональности). *Пусть* $\varphi, \psi \in X$, L, $M \in \widetilde{S}$.

Тогда

$$\text{i)}\ \frac{|L|}{|G|} \sum_{\tau \in X} \eta_\tau(g_L)\, \overline{\tau(g_M)} = \delta_{LM};$$

$$\text{ii)}\ \langle \eta_\varphi, \psi\rangle_S \cong = \delta_{\varphi\psi};$$

$$\text{iii)}\ \langle \varphi; \psi\rangle_S = V_{\varphi\psi},\ \textit{где}\ (V_{\varphi\psi})_{\varphi,\psi \in X} = U^{-1};$$

$$\text{iv)}\ \langle \eta_\varphi, \eta_\psi\rangle_S = u_{\varphi\psi};$$

$$\text{v)}\ u_{\varphi\psi} = u_{\psi\varphi}.$$

Доказательство. Пусть $\widetilde{S} = \{L_1, \ldots, L_n\}$, $g_i = g_{L_i}$, $i = 1, \ldots, n$. Положим $R = (\eta_\varphi(g_i))_{\substack{\varphi \in X \\ 1 \leqslant i \leqslant n}}$, $K = \operatorname{diag}(|G|/|L_1|, \ldots, |G|/|L_n|)$. Согласно (2) $Z = \mathrm{H}\Phi$ (считаем, что нумерации на S и Φ согласованы). В силу соотношений ортогональности для неприводимых комплексных характеров имеем $\overline{Z}'Z = K$. Поэтому $\mathrm{K} = \overline{(\mathrm{H}\Phi)}'\mathrm{H}\Phi = \Phi'\overline{\mathrm{H}}'\mathrm{H}\Phi = \overline{\Phi}'U\Phi$. Так как $U\Phi = R$, то $K = \Phi' R$.

Из равенства $K = \Phi' R$ имеем $K = R'\overline{\Phi}$. Отсюда $K^{-1}R'\overline{\Phi} = E$, где E — единичная матрица. Тем самым, Φ является обратной к $K^{-1}R'$. Значит, $\Phi' K^{-1} R' = E$.

Из равенства $\Phi' U \Phi = K$ имеем $U = (\overline{\Phi}')^{-1} K \Phi^{-1}$. Отсюда $U^{-1} = \Phi K^{-1} \overline{\Phi}'$. Так как Φ обратная к $K^{-1}R'$, то обратной к Φ является $K^{-1}\overline{R}'$, а обратной к Φ' — RK^{-1}. Поэтому $U = RK^{-1}KK^{-1}\overline{R}' = RK^{-1}\overline{R}'$.

По определению $u_{\varphi\psi} = \sum_{\varphi \in \mathrm{Irr}(B)} h_{\chi\varphi}\overline{h}_{\chi\psi}$. Тогда

$$u_{\varphi\psi} = \sum_{\varphi \in \mathrm{Irr}(B)} h_{\chi\varphi}\overline{h}_{\chi\psi} = \sum_{\varphi \in \mathrm{Irr}(B)} h_{\chi\psi}h_{\chi\varphi} = u_{\psi\varphi}.$$

Введем теперь в рассмотрение числа разложения классов. Пусть $N \in \mathrm{Cl}(G)$. Тогда для всех $\chi \in X$ выполняется равенство $\chi(g_N) = \sum_{M \in \widetilde{S}} t_{NM}\chi(g_M)$; где $t_{NM} \in \mathbf{Q}(\varepsilon)$. Числа t_{NM} будем называть числами разложения сопряженных классов относительно пары $(X, \widetilde{S})$. Положим $m_{LT} = \sum_{N \in \mathrm{Cl}(G)} t_{NL}\overline{t}_{NT}\,|N|$. Числа

m_{LT} будем называть инвариантами Картана сопряженных классов относительно пары $(X, \widetilde{S})$.

Теорема 2. *Пусть* $N \in \mathrm{Cl}(G)$, $L, T \in \widetilde{S}$. *Тогда*

i) $t_{NL} = \frac{|L|}{|G|} \sum_{\varphi \in X} \overline{\varphi(g_N)} \eta_\varphi(g_L)$;

ii) $m_{LT} = \frac{|L||T|}{|C|} \sum_{\varphi \in X} \eta_\varphi(g_L) \overline{\eta_\varphi(g_T)}$;

iii) $m_{LT} = \overline{m}_{TL}$;

iv) $M = |G|^{-1} \Phi^{-1} U \Phi K^{-1}$.

Доказательство. i) следует из теоремы 1.

ii). Используя i) и соотношение ортогональности для характеров из $\mathrm{Irr}(G)$, имеем

$$m_{LT} = \sum_{N \in \mathrm{Cl}(G)} t_{NL} \overline{t}_{NT} |N| = \sum_{N \in \mathrm{Cl}(G)} \frac{|L|}{|G|} \sum_{\varphi \in X} \overline{\varphi(g_N)} \eta_\varphi(g_L) \frac{|T|}{|G|} \sum_{\varphi \in X} \tau(g_N) \overline{\eta_\tau(g_L)} =$$

$$= \sum_{\varphi, \tau \in X} \frac{|L||T|}{|G|} \sum_{\varphi \in X} \eta_\varphi(g_L) \overline{\eta_\tau(g_T)} \frac{1}{|G|} \sum_{N \in \mathrm{Cl}(G)} \overline{\varphi(g_N)} \tau(g_N) |N| =$$

$$= \frac{|L||T|}{|G|} \sum_{\varphi \in X} \eta_\varphi(g_L) \overline{\eta_\varphi(g_T)}.$$

iii) $\overline{m}_{LT} \overline{\sum_{N \in \mathrm{Cl}(G)} t_{NL} \overline{t}_{NT} |N|} = \sum_{N \in \mathrm{Cl}(G)} \overline{t}_{NL} t_{NT} |N| = m_{TL}$.

iv) В доказательстве теоремы 1 мы заметили, что обратной к матрице Φ является матрица $K^{-1}\overline{R}'$. Поэтому $|G|^{-1}\Phi^{-1}U\Phi K^{-1} = |G|^{-1}K^{-1}\overline{R}'U\Phi K^{-1} = |G|^{-1}K^{-1}\overline{R}'RK^{-1} = M$.

3. Алгебра $\Gamma(X, \widetilde{S})$. Определим алгебру $\Gamma(X, \widetilde{S})$ и изучим ее строение. Будем применять обозначения, принятые в п. 2.

Рассмотрим линейное пространство $\Gamma(X, \widetilde{S})$ над $\mathbb{C}$, состоящее из всех формальных линейных комбинаций $\sum_{L = \widetilde{S}} a_L L$, $a_L \in \mathbb{C}$. Превратим $\Gamma(X, \widetilde{S})$ в алгебру, положив для $L, T \in S$, $LT = \sum_{N \in \widetilde{S}} b_{LT}^N N$, где

$$b_{LT} \frac{|L||T|}{|G|} \sum_{\varphi \in X} \frac{\varphi(g_L)\varphi(g_T)}{\varphi(1)} \overline{\eta_\varphi(g_N)}.$$

Очевидно, $b_{LT}^N = b_{TL}^T$. Поэтому $\Gamma(X, \widetilde{S})$ — коммутативная алгебра. Если $\varphi \in X$, $L \in \widetilde{S}$, положим $\omega_\varphi(L) = |L| \varphi(g_L)/\varphi(1)$. Продолжим ω_φ на всю $\Gamma(X, \widetilde{S})$ по линейности. Положим так же $e_\varphi = (\varphi(1)/|G|) \sum_{L \in \widetilde{S}} \overline{\eta_\varphi(g_L)}$, где $\varphi \in X$.

Теорема 3. *Справедливы следующие утверждения:*

i) *для всякого* $\varphi \in X$, ω_φ — *линейный характер алгебры* $\Gamma(X, \widetilde{S})$, *причем* $\omega_\varphi \neq \omega_\psi$ *при* $\varphi \neq \psi$;

ii) *множество* $\{e_\varphi \mid \varphi \in X\}$ — *полный набор примитивных ортогональных идемпотентов алгебры* $\Gamma(X, \widetilde{S})$;

iii) *если* λ — *линейный характер алгебры* $\Gamma(X, \widetilde{S})$, *то* $\lambda = \omega_\varphi$ *для подходящего* $\varphi \in X$;

Доказательство. i). Достаточно показать, что $\omega_\varphi(LT) = \omega_\varphi(L)\,\omega_\varphi(T)$ для всех $L, T = \widetilde{S}$. Действительно,

$$\omega_\varphi(LT) = \sum_{N \in \widetilde{S}} b_{LT}^N \omega_\varphi(N) = \sum_{N \in \widetilde{S}} \sum_{\tau \in X} \frac{|L||T|}{|G|} \frac{\tau(g_L)\tau(g_T)}{\tau(1)} \overline{\eta(g_N)} \frac{|N|\varphi(g_N)}{\varphi(1)} =$$

$$= \sum_{\tau \in X} |L||T| \frac{\tau(g_L)\tau(g_T)}{\tau(1)\psi(1)} \frac{1}{|G|} \sum_{N \in \widetilde{S}} \psi(g_N) \overline{\eta_\tau(g_N)} |N| = \omega_\varphi(L)\,\omega_\varphi(T).$$

Предположим, что для некоторых $\varphi, \psi \in X$, $\omega_\varphi = \omega_\psi$. Тогда $\omega_\varphi(L) = \omega_\psi(L)$ для всех $L \in \widetilde{S}$. Отсюда следует вырожденность матрицы Φ.

ii). Заметим, что $\{e_\varphi \mid \varphi \in X\}$ образует базис алгебры $\Gamma(X, \widetilde{S})$. Действительно, в доказательстве теоремы 1 (iii) было показано, что матрица U невырождена. Так как $(\eta_\varphi(g_L))_{\varphi \in X, L \in \widetilde{S}} = U\Phi$, то $(\eta_\varphi(g_L))_{\varphi \in X, L \in \widetilde{S}}$ невырождена. Тем самым, $\{e_\varphi \mid \varphi \in X\}$ базис $\Gamma(X, \widetilde{S})$. Пусть $\varphi, \psi \in X$. Тогда $e_\varphi e_\psi = \sum_{\tau \in X} a_\tau e_\tau$. Имеем $\omega_\tau(e_\varphi) = \frac{\varphi(1)}{|G|} \sum_{N \in \widetilde{S}} \overline{\eta_\varphi(g_N)} \frac{\tau(g_N)|N|}{\tau(1)} = \delta_{\varphi\tau}$. Поэтому $\delta_{\lambda\varphi}\delta_{\lambda\tau} = \omega_\lambda(e_\varphi)\,\omega_\lambda(e_\psi) = \omega_\lambda(e_\varphi e_\psi) = \sum_{\tau \in X} a_\tau \omega_\lambda(e_\tau) = \alpha_\tau \delta_{\lambda\tau}$. Отсюда следует, что при $\varphi \neq \psi$ $a_\tau = 0$ для всех $\tau \in X$. Значит, при $\varphi \neq \psi$ $e_\varphi e_\psi = 0$. Далее, если $\varphi = \psi$, то $a_\tau = 0$ при $\tau \neq \varphi$ и $a_\varphi = 1$. Поэтому $e_\varphi^2 = e_\varphi$, т. е. e_φ — идемпотент. Поскольку число идемпотентов e_φ совпадает с размерностью алгебры $\Gamma(X, \widetilde{S})$, то $\{e_\varphi \mid \varphi \in X\}$ — полный набор примитивных попарно ортогональных идемпотентов.

iii). Следует из [1, I. 16. 2].

Обозначим через a_{LT}^N структурные константы центра групповой алгебры $\mathbb{C}G$.

Предложение 3. *Пусть* $L, N, T \in \widetilde{S}$. *Тогда*

$$b_{LT}^N = \frac{1}{|G|} \sum_{P \in \mathrm{Cl}(G)} a_{LT}^P \,\bar{t}_{PN} |P|.$$

Доказательство.

$$(1/|N|) \sum_{T \in \mathrm{Cl}(G)} a_{LT}^P \bar{t}_{PN} |P| =$$

$$= (1/|N|) \sum_{P \in \mathrm{Cl}(G)} \frac{|L||T|}{|G|} \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} \frac{\chi(g_L)\chi(g_T)}{\chi(1)} \overline{\chi(g_P)} \frac{\overline{|N|}}{|G|} \times$$

$$\times \sum_{\varphi \in X} \varphi(g_N) \overline{\eta_\varphi(g_N)} |P| = \frac{|N|}{|G|} \sum_{\varphi \in X} \frac{\varphi(g_L)\varphi(g_T)}{\varphi(1)} \overline{\eta_\varphi(g_N)} = b_{LT}^N.$$

Пусть $L \in \mathrm{Cl}(G)$. Через $\hat{L}$ будем обозначать классовую сумму в $\mathbb{C}G$ сопряженного класса L. Положим $v_L = \hat{L} - \sum\limits_{N \in \tilde{S}} \frac{\bar{t}_{LN}|L|}{|N|}\hat{N}$.

Теорема 4. *Множество $\{v_L \mid L \in \mathrm{CL}(G) - \tilde{S}\}$ образует базис идеала $I(X, \tilde{S})$ алгебры $Z\mathbb{C}G$, состоящего из всех тех элементов $v \in Z\mathbb{C}G$, для которых $\omega_\varphi(v) = 0$ при всех $\varphi \in X$. Кроме того, $Z\mathbb{C}G/I(X, \tilde{S}) \cong \Gamma(X, \tilde{S})$.*

Доказательство. Очевидно, элементы v_L линейно независимы. Пусть $\varphi \in X$. Тогда

$$\omega_\varphi(v_L) = \frac{|L|\,\varphi(g_L)}{\varphi(1)} - \sum_{N \in \tilde{S}} \frac{t_{LN}|L|}{|N|}\,\omega_\varphi(\hat{N}) =$$

$$= \omega_\varphi(g_L) - \sum_{N \in \tilde{S}} \frac{|L|}{|G|} \sum_{\varphi \in X} \tau(g_L)\overline{\eta_\tau(g_L)}\,\frac{|L|}{|G|}\,\omega_\varphi(g_N) = \omega_\varphi(g_L) - \omega_\varphi(g_L) = 0.$$

Так как $\dim_{\mathbb{C}} I(X, \tilde{S}) \leqslant |\mathrm{Cl}(G) - \tilde{S}|$ и элементы v_L линейно независимы, то $\{v_L \mid L \in \mathrm{CL}(G) - \tilde{S}\}$ — базис идеала $I(X, \tilde{S})$. Покажем, что $\Gamma(X, \tilde{S}) \cong$ $\cong Z\mathbb{C}G/I(X, \tilde{S})$ Пусть $P, R \in \tilde{S}$. Тогда $\hat{P}\hat{R} = \sum\limits_{\hat{N} \in \mathrm{Cl}(G)} a_{PR}^N \hat{N}$. Ввиду предложения 3 имеем

$$\sum_{\hat{N} \in \mathrm{Cl}(G)} a_{PR}^N \hat{N} = \sum_{A \in \tilde{S}} b_{PR}^A \hat{A} + \sum_{B \in \mathrm{Cl}(G) - \tilde{S}} a_{PR}^B \left(B - \sum_{L \in Y} (t_{BL}|B|/|L|)\,\hat{L}\right) =$$

$$= \sum_{A \in \tilde{S}} b_{PR}^A \hat{A} + \sum_{B \in \mathrm{Cl}(G) - \tilde{S}} a_{PR}^B v_B.$$

Таким образом, $\hat{P}\hat{R} = \sum\limits_{A \in \tilde{S}} b_{PR}^A \hat{A} + v$, где $v \in I(X, \tilde{S})$. Искомый изоморфизм между $\Gamma(X, \tilde{S})$ и $Z\mathbb{C}G/I(X, \tilde{S})$ задается отображением, определенным на базисе $\Gamma(X, \tilde{S})$ следующим образом: $P \to \hat{P} + I(X, \tilde{S})$, где $P \in \tilde{S}$.

4. Алгебра Γ'. В настоящем пункте используем обозначения, введенные ранее. Кроме того, через K будем обозначать поле алгебраических чисел, являющееся полем разложения группы G, а через R — кольцо целых поля K. Пусть далее, P — простой идеал в R такой, что $p \in P$, ν — аддитивное нормирование поля K, выбранное так, что $\nu(p) = 1$, R_p — кольцо P-целых поля K, J — единственный максимальный идеал кольца R_p, $F =$ $= R_p/J \cong R/P$.

Пусть π — p-элемент группы G. Будем считать, что $\tilde{S}$ состоит из всех сопряженных классов группы G, принадлежащих p-секции $S_G(\pi)$. Заметим, что при $\pi = 1$ S состоит из всех p'-классов группы G.

Предложение 4. *Существует такое подмножество $X \subseteq \mathrm{Irr}(G)$, что $|X| = |\tilde{S}|$ и матрица $\Phi = (\chi(g_L))_{\chi \in X, L \in \tilde{S}}$ R_P-обратима.*

Доказательство. Рассмотрим матрицу $W = (\chi(g_L))_{\chi \in \mathrm{Irr}(\tilde{G}), L \in \mathrm{RCl}(G)}$. Тогда R_P-ранг W равен 1 (см. [1, IV.3.91]). Поэтому для любого подмножества Y множества $\mathrm{RCl}(G)$, R_P-ранг матрицы $W_Y = (\chi(g_L))_{\chi \in \mathrm{Irr}(\tilde{G}), L \in Y}$ равен $|Y|$. Значит, существует такое подмножество $X_0 \subseteq \mathrm{Irr}(G)$, что $|X_0| = |Y|$ и матрица $(\chi(g_L))_{\chi\in X_0, L\in Y}$ R_P-обратима. Пусть $L \in \widetilde{S}$, g'_L — p-часть элемента g_L. Тогда хорошо известно, $\chi(g_L) \equiv \chi(g'_L) \pmod J$ для любого $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$. Пусть Y — подмножество из $\mathrm{RCl}(G)$, представителями элементов которого является g'_L, $L \in \widetilde{S}$. Тогда, по доказанному, существует такое подмножество $X \subseteq \mathrm{Irr}(G)$, что матрица $(\chi(g_L))_{\chi\in X, L\in\widetilde{S}}$ R_P-обратима. Из сравнения $\chi(g_L) \equiv \chi(g'_L) \pmod J$ вытекает R_P-обратимость матрицы Φ.

До конца пункта будем считать, что X — такое подмножество из $\mathrm{Irr}(G)$, что матрица $\Phi = (\chi(g_L))_{\chi\in X, L\in\widetilde{S}}$ R-обратима.

Лемма 1. *Пусть $L, N, T \in \widetilde{S}$. Тогда $(|N|/|T|)\, b^N_{LT} \in R_P$.*

Доказательство. В силу теоремы 1 (ii), если $\varphi \in X$, то $|G|^{-1} \sum\limits_{L\in\widetilde{S}} \varphi(g_L)\, \overline{\eta_\varphi(g_L)}\, |L| = \delta_{\psi\varphi}$ для всех $\psi \in X$. Поскольку матрица Φ обратима, то $(|L|/|G|)\, \eta_\varphi(g_L) \in R_P$. Далее, для всякого $\varphi \in X$, $\omega_\varphi(L) \in R_P$. Таким образом,

$$b^N_{LT} \frac{|N|}{|T|} = \frac{|N|}{|T|} \frac{|L|\,|T|}{|G|} \sum_{\varphi\in X} \frac{\varphi(g_L)\,\varphi(g_T)}{\varphi(1)} \overline{\eta_\varphi(g_N)} =$$

$$= \sum_{\varphi\in X} \frac{|L|\,\varphi(g_L)}{\varphi(1)}\, \varphi(g_T)\, \frac{|N|\,\eta_\varphi(g_T)}{|G|} \in R_P\,.$$

Лемма 2. *Для любых $L, N, T \in \widetilde{S}$, $b^N_{LT} \in R_P$ и $b^N_{L*T} \equiv b^S_{LN} \dfrac{|T|}{|N|} \pmod J$.*

Доказательство. В силу леммы 1 $(|N|/|T|)\, b^N_{LT} \in R_P$. Далее,

$$b^T_{LN} \frac{|T|}{|N|} = \frac{|T|}{|N|} \frac{|L|\,|N|}{|G|} \sum_{\varphi\in X} \frac{\varphi(g_L)\,\varphi(g_N)}{\varphi(1)} \overline{\eta_\varphi(g_T)} =$$

$$= \sum_{B\in \mathrm{Bl}(G)} \frac{|L|\,|N|}{|G|} \sum_{\varphi\in X(B)} \frac{\varphi(g_L)\,\varphi(g_N)}{\varphi(1)} \overline{\eta_\varphi(g_T)} =$$

$$= \sum_{B\in \mathrm{Bl}(G)} \frac{|L|\,|N|}{|G|} \sum_{\varphi\in X(B)} \frac{\varphi(g_L)\,\varphi_N)}{\varphi(1)} \sum_{\tau\in X(B)} \bar{u}_{\varphi\tau}\, \overline{\tau(g_T)} =$$

$$= \sum_{B\in \mathrm{Bl}(G)} \frac{|L|}{|G|} \sum_{\varphi\in X(B)} \omega_\varphi(g_N) \sum_{\tau\in X(B)} \bar{u}_{\varphi\tau}\, \overline{\tau(g_T)}\,.$$

Поскольку $\omega_\varphi(L) \equiv \omega_\tau(L) \pmod J$ для всех $\varphi, \tau \in X(B)$, то

$$\frac{|T|}{|G|} \sum_{\varphi\in X(B)} \omega_\varphi(g_L)\,\varphi(g_N) \sum_{\tau\in X(B)} \bar{u}_{\varphi\tau}\, \overline{\tau(g_{T^*})} \equiv$$

$$\equiv \frac{|T|}{|G|} \sum_{\tau\in X(B)} \omega_\tau(g_L)\, \overline{\tau(g_N)} \sum_{\tau\in X(B)} u_{\tau\varphi}\,\varphi(g_{T^*}) = \overline{b^N_{L*T}} \pmod J.$$

Из леммы 2 следует, что структурные константы алгебры $\Gamma(X, \widetilde{S})$ принадлежат кольцу R_P. Поэтому имеет смысл рассматривать алгебру $\Gamma_{R_P}(X, \widetilde{S}) = \left\{\sum\limits_{L\in\widetilde{S}} \alpha_L L \mid \alpha \in R_P\right\}$. Обозначим ее через Γ' и изучим строение Γ'.

Лемма 3. *Для любого* $\varphi \in X$, $|G|_p \mid \eta_\varphi(1)$.

Доказательство. В силу теоремы 1 (ii),

$$|G|^{-1} \sum_{L \in \widetilde{S}} \psi(g_L)\, \overline{\eta_\varphi(g_L)}\, |L| = \delta_{\psi\varphi}.$$

Поскольку матрица Φ R-обратима, то $|L|\,|G|^{-1}\, \eta_\varphi(g_L) \in R_P$. В частности, $|G|^{-1}\, \eta_\varphi(1) \in R_P$. Следовательно, $|G|_p \mid \eta_\varphi(1)$.

Лемма 4. *Пусть* $e_B = |G|^{-1} \sum_{L \in \widetilde{S}} \sum_{\varphi \in X(B)} \varphi(1)\, \overline{\eta_\varphi(g_L)}\, L$. *Тогда* $e_B \in \Gamma'$ *и* e_B — *примитивный идемпотент алгебры* Γ'.

Доказательство. Поскольку $e_B = \sum_{\varphi \in X(B)} e_\varphi$, где e_φ — примитивный идемпотент алгебры $\Gamma(X, \widetilde{S})$, то e_B — идемпотент. Далее,

$$\sum_{\varphi \in X(B)} \varphi(1)\, \overline{\eta_\varphi(g_L)} = \sum_{\varphi \in X(B)} \varphi(1) \sum_{\tau \in X(B)} \bar{u}_{\varphi\tau}\, \overline{\tau(g_L)} =$$

$$= \sum_{\tau \in X(B)} \overline{\varphi(g_L)} \sum_{\varphi \in X(B)} \bar{u}_{\varphi\tau}\, \varphi(1) = \sum_{\tau \in X(B)} \overline{\tau(g_L)} \sum_{\varphi \in X(B)} u_{\varphi\tau}\, \varphi(1) =$$

$$= \sum_{\tau \in X(B)} \tau(g_L)\, \eta_\tau(1).$$

В силу леммы 4 $|G|^{-1}\, \eta_\varphi(1) \in R$. Поэтому $|G|^{-1} \sum_{\varphi \in X(B)} \varphi(1)\, \overline{\eta_\varphi(g_L)} \in R_P$. Значит, $e_B \in \Gamma'$ и e_B является идемпотентом. Осталось лишь показать его примитивность.

Пусть $e_B = e' + e''$, где e' и e'' — идемпотенты Γ'. Тогда e' (e''), будучи элементом $\Gamma(X, \widetilde{S})$, является суммой примитивных идемпотентов алгебры $\Gamma(X, \widetilde{S})$. Поскольку e_B — сумма идемпотентов e_φ, $\varphi \in X(B)$, то e' (e'') — сумма идемпотентов e_ψ, где ψ пробегает подходящее подмножество $X' \subseteq X(B)$ ($X'' \subseteq X(B)$). Очевидно, $X(B) = X' \cup X''$. Предположим, что $X'' \neq \varnothing$. Пусть $\tau'' \in X''$, $\tau'' \in X''$. Тогда $\omega_{\tau''}(e') = 0$ и $\omega_{\tau''}(e') = 1$. С другой стороны, если $e' = \sum_{L \in \widetilde{S}} a_L L$, то $\omega_{\tau''}(e') = \sum_{L \in \widetilde{S}} a_L \omega_{\tau''} L) \equiv \sum_{L \in \widetilde{S}} a_L \omega_{\tau'}(L) \pmod J$, поскольку τ' и τ'' лежат в общем блоке группы G. Значит, $\omega_{\tau''}(e') \equiv 1 \pmod J$,— противоречие.

Лемма 5. *Пусть* e_B — *идемпотент алгебры* Γ', *введенный в лемме 4. Тогда* $\operatorname{rank}(\Gamma' e_B) = |X(B)|$.

Доказательство. Поскольку $\Gamma' e_B \subseteq \Gamma(X, \widetilde{S})\, e_B$ и $\dim_{\mathbb{C}} \Gamma(X, \widetilde{S}) = |X(B)|$, то $\operatorname{rank}(\Gamma' e_B) \leqslant |X(B)|$. Далее, $X \bigcup_{B \in \mathrm{Bl}(B)} X(B)$ и $X(B) \cap X(B') = \varnothing$ при $B \neq B'$, то $\operatorname{rank}(\Gamma' e_B)$ не может быть строго меньше $|X(B)|$, иначе $\operatorname{rank} \Gamma' < |X|$.

Теорема 5. *Число неразложимых компонент алгебры* Γ' *равно числу всех тех p-блоков группы G, дефектная группа которых содержит элемент, сопряженный с π. В частности, если $\pi = 1$, то число неразложимых компонент алгебры Γ' равно числу p-блоков группы G.*

Доказательство. Если $\chi \in \operatorname{Irr}(G)$ и χ принадлежит p-блоку группы G, дефектная группа которого не содержит элементов, сопряженных с π, то $\chi(g_L) = 0$ для любого $L \in \widetilde{S}$ [4]. Далее, если χ_1, χ_2 лежат в различных p-блоках группы G, то $\sum_{L \in \widetilde{S}} \chi_1(g_L \overline{\chi_2(g_L)} |L| = 0$ [4]. Отсюда следует, что

$X(B) \neq \varnothing$ для любого p-блока B, дефектная группа которого содержит элемент, сопряженный с π. Из лемм 4 и 5 теперь следует первое утверждение теоремы. Второе является частным случаем первого, поскольку π-1 лежит в дефектной группе каждого p-блока группы G.

1. *Feit W.* The representation theory of finite groups.— Amsterdame: North Holland, 1982.— 635 p.
2. *Руколайне А. В.* Алгебра p-регулярных классов p-разрешимой группы // Вестн. Ленингр. ун-та.— 1967.— 22.— С. 152—154.
3. *Белоногов В. А.* Взаимодействия в конечных группах и векторных пространствах // Структурные вопросы теории групп.— Свердловск, 1986.— С. 3—32.
4. *Iizuka K.* On Brauer's theorem on sections in the theory of blocks of group characters // Math. Z.— 1961.— 75.— P. 299—304.

Получено 17.01.91