УДК 517.9

В. И. ФУЩИЧ, чл.-корр. АН УССР (Ин-т математики АН УССР, Киев),
И. О. ПАРАСЮК, канд. физ.-мат. наук (Киев. ун-т)

Качественный анализ семейств ограниченных решений многомерного нелинейного уравнения Шредингера

Установлено существование семейств ограниченных по пространственным переменным решений нелинейного многомерного уравнения Шредингера, а также изучены их асимптотические свойства. Исследование включает два этапа. Вначале исходное уравнение с помощью анзацев специального вида редуцируется к набору обыкновенных дифференциальных уравнений, а затем проводится качественный анализ каждого такого уравнения.

Установлено існування сімей обмежених щодо просторових змінних розв'язків нелінійного багатовимірного рівняння Шредінгера, а також вивчені їх асимптотичні властивості. Дослідження включає два етапи. Спочатку вихідне рівняння за допомогою анзаців спеціального вигляду редукується до набору звичайних диференціальних рівнянь, а потім проводиться якісний аналіз кожного такого рівняння.

Данная работа является продолжением исследований, начатых в [1].

Рассмотрим многомерное нелинейное уравнение Шредингера

$$i\partial_t \Psi + 1/(2m)\,\Delta\Psi + \lambda\,|\,\Psi\,|^k\Psi = 0, \tag{1}$$

где $\Psi: R_t \times R_x^n \to \mathbb{C}$, $\Delta = \sum\limits_{j=1}^{n} (\partial_{x_j})^2$, $m > 0$, $k > 0$, $\lambda \in R$. В [1] это уравнение изучалось в случае, когда $k = 4/n$, $n = 3$ (при таком k уравнение (1) обладает наиболее широкой группой симметрии [2, 3]). В настоящей работе, следуя [1], изучим ограниченные решения уравнения (1) при произвольном n и более широком диапазоне значений k. Для этой цели с помощью анзацев [2, 3] редуцируем уравнение (1) к набору обыкновенных дифференциальных уравнений, а затем проведем качественный анализ этих уравнений.

1. Анзац $\Psi(t, x) = t^{-1/k} z(\tau)$, где $\tau = t^{-1/2}\alpha\cdot x$ (здесь и в дальнейшем $\alpha \in R^n$, $\alpha^2 = 1$), редуцирует уравнение (1) к уравнению

$$\ddot{z} - im\tau\dot{z} - 2imk^{-1}z + a\,|\,z\,|^k z = 0, \quad a = 2\lambda m. \tag{2}$$

Утверждение 1. *Если $k \neq 4$, то уравнение* (2) *имеет семейство решений $z = Z(\tau, c)$, где c — комплексный параметр, а функция $Z(\tau, c)$ при фиксированном c ограничена на всей оси R_τ и удовлетворяет условиям*

$$Z(-\tau, c) = Z(\tau, c) \;\; и \;\; Z(\tau, c) = O\left(\tau^{-|1/2-2/k|-1/2}\right), \quad \tau \to \infty.$$

Доказательство. Рассмотрим уравнение более общего вида чем (2):

$$\ddot{z} \pm im\tau\dot{z} + imbz + a\,|\,z\,|^k z = 0, \quad b \in R. \tag{3}$$

Сделаем замену независимой переменной $s = \tau^2/2$:

$$\frac{d^2z}{ds^2} + \left(\pm\, im + \frac{1}{2s}\right)\frac{dz}{ds} + \frac{imb}{2s}\,z + \frac{a}{2s}\,|\,z\,|^k z = 0.$$

Выполнив подстановку

$$z = \exp\left(-\frac{1}{2}\int\left(\pm\, im + \frac{1}{2s}\right)ds\right)v = s^{-1/4}\exp\left(\pm\, ims/2\right)v,$$

приходим к уравнению

$$\frac{d^2v}{ds^2} + \left(\frac{m^2}{4} + \frac{im}{2s}\left(b \mp \frac{1}{2}\right) + \frac{3}{16s^2}\right)v + \frac{a}{2s^{1+k/4}}\,|\,v\,|^k v = 0. \tag{4}$$

Вначале исследуем линейное уравнение вида

$$\frac{d^2v}{ds^2} + \left(\frac{m^2}{4} + \frac{im\nu}{s} + \frac{3}{16s^2}\right)v = 0, \tag{5}$$

где $\nu = |b \mp 1/2|/2$. Для него $s = 0$ является регулярной особой точкой с определяющим уравнением $\rho^2 - \rho + 3/16 = 0$, которое имеет пару корней $\rho_1 = 1/4$ и $\rho_2 = 3/4$. Поэтому для любого решения $v(s)$ уравнения (5) существует конечный предел

$$\lim_{s\to 0} s^{-1/4} v(s) < \infty. \tag{6}$$

Для исследования асимптотики решений (5) при $s \to \infty$ в соответствии с [4] рассмотрим уравнение

$$\rho^2 + \left(\frac{m^2}{4} + \frac{im\nu}{s}\right) = 0.$$

Для его корней имеет место представление

$$\rho_\pm(s) = \mp i\sqrt{m^2/4 + im\nu/s} = \mp im/2 \pm \nu/s + O(s^{-2}).$$

Предположим, что $\nu \neq 0$. Тогда уравнение (5) имеет пару решений

$$v_\pm(s) = \left(\exp\int_{s_0}^{s} \rho_\pm(s_1)\,ds_1\right)(c_\pm + o(1)) = O(s^{\pm\nu}), \tag{7}$$

вронскиан которых равен 1. Для этих решений выполняется условие (6). Очевидно, что аналогичный результат справедлив и в случае, когда $\nu = -|b \mp 1/2|/2$, поэтому полагаем $\nu > 0$.

Теперь задачу об ограниченных на полуоси $[0, \infty)$ решениях уравнения (4) сведем к интегральному уравнению

$$v(s) = v_-(s)\left(c + \frac{a}{2}\int_0^s v_+(\theta)\,\theta^{-1-k/4}\,|v(\theta)|^k v(\theta)\,d\theta\right) +$$

$$+ \frac{a}{2} v_+(s)\int_s^\infty v_-(\theta)\,\theta^{-1-k/4}\,|v(\theta)|^k v(\theta)\,d\theta \overset{\mathrm{def}}{=\!=} A[v](s),$$

где c — комплексный параметр. Покажем, что оператор A на полном метрическом пространстве B_L непрерывных функций $f: [0, \infty) \to \mathbb{C}$ с метрикой $\rho(f, g) = \sup\limits_{s\in[0,\infty)} |f(s) - g(s)|$ таких, что

$$|f(s)| \leqslant L\min(s^{1/4}, s^{-\nu}), \quad L > 0, \tag{8}$$

при всех достаточно малых $|c|$ и L является оператором сжатия. Действительно, для любой $f \in B_L$ из оценок

$$\int_0^1 |v_\pm(\theta)|\,\theta^{-1-k/4}\,|f(\theta)|^{k+1} d\theta \leqslant c_1 L^{k+1}\int_0^1 \theta^{1/4-1-k/4+(k+1)/4} d\theta \leqslant c_2 L^{k+1};$$

$$\int_1^\infty |v_+(\theta)|\,\theta^{-1-k/4}\,|f(\theta)|^{k+1} d\theta \leqslant c_3 L^{k+1}\int_1^\infty \theta^{\nu-1-k/4-(k+1)\nu} d\theta \leqslant c_4 L^{k+1};$$

$$\int_s^\infty |v_-(\theta)|\,\theta^{-1-k/4}\,|f(\theta)|^{k+1} d\theta \leqslant c_5 L^{k+1} \times$$

$$\times \int_s^\infty \theta^{-\nu-1-k/4-(k+1)\nu} d\theta \leqslant c_6 L^{k+1} s^{-(k+2)\nu-k/4}, \quad s \geqslant 1,$$

следует оценка

$$|A[f](s)| \leqslant c_7(|c| + L^{k+1}) \min(s^{1/4}, s^{-\nu}),$$

причем константа c_7 не зависит ни от $|c|$, ни от L. Значит, $A: B_L \to B_L$, как только малостью L и $|c|$ будет обеспечено выполнение условия $c_7(|c| + L^{k+1}) \leqslant L$.

Выясним условия сжатия. Для любых $f, g \in B_L$ из оценок

$$\int_0^1 |v_\pm(\theta)| \theta^{-1-k/4} ||f(\theta)|^k f(\theta) - |g(\theta)|^k g(\theta)| d\theta \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^1 |v_\pm(\theta)| \theta^{-1-k/4} (|f(\theta)|^k |f(\theta) - g(\theta)| + (|f(\theta)|^k - |g(\theta)|^k) |g(\theta)|) d\theta \leqslant$$

$$\leqslant c_8 L^k \left(\int_0^1 \theta^{1/4-1-k/4+k/4} d\theta\right) \rho(f, g) \leqslant c_9 L^k \rho(f, g);$$

$$\int_1^s |v_+(\theta)| \theta^{-1-k/4} ||f(\theta)|^k f(\theta) - |g(\theta)|^k g(\theta)| d\theta \leqslant$$

$$\leqslant c_{10} L^k \left(\int_1^s \theta^{\nu-1-k/4-k\nu} d\theta\right) \rho(f, g) \leqslant c_{11} L^k (s^{\nu-k/4-k\nu} + 1) \rho(f, g), \quad s \geqslant 1;$$

$$\int_s^\infty |v_-(\theta)| \theta^{-1-k/4} ||f(\theta)|^k f(\theta) - |g(\theta)|^k g(\theta)| d\theta \leqslant$$

$$\leqslant c_{12} L^k \left(\int_s^\infty \theta^{-\nu-1-k/4-k\nu} d\theta\right) \rho(f, g) \leqslant c_{13} L^k s^{-\nu-k/4-k\nu}, \quad s \geqslant 1,$$

следует оценка

$$\rho(A[f], A[g]) \leqslant c_{14} L^k \rho(f, g),$$

причем c_{14} не зависит ни от c, ни от L. Выполнение условия сжатия $c_{14} L^k < 1$ также можно добиться малостью L.

Таким образом, уравнение (4) при условии $\nu \neq 0$, обладает семейством решений, зависящих от параметра c и удовлетворяющих условию (8).

Вернемся теперь к уравнению (2), которое соответствует (3) при $b = -2/k$ и знаке «—». Для него $\nu = |1/2 - 2/k|/2 \neq 0$. Тогда, учитывая связь между v и z, получаем искомое семейство $z = Z(\tau, c)$. Утверждение доказано.

В случае $k = 4$ имеет место утверждение, аналогичное доказанному выше, с той лишь разницей, что семейство ограниченных на всей оси и убывающих на бесконечности с асимптотикой $O(\tau^{-1/2})$ решений будет зависеть от двух комплексных параметров.

2. Анзац

$$\Psi(t, x) = t^{-1/k} \exp\left(\frac{imx^2}{2t}\right) z(\tau), \quad \tau = t^{-1/2} \alpha \cdot x,$$

редуцирует уравнение (1) к уравнению

$$\ddot{z} + im\tau\dot{z} + im\left(n - \frac{2}{k}\right) z + a|z|^k z = 0, \quad a = 2\lambda m. \tag{9}$$

Утверждение 2. *Если $k \neq 4/(2n-1)$, то уравнение* (9) *имеет семейство решений $z = Z(\tau, c)$, где c — комплексный параметр, а функция $Z(\tau, c)$ при фиксированном c ограничена на всей оси R_τ и удовлетворяет условиям*

$$Z(-\tau, c) = Z(\tau, c); \; Z(\tau, c) = O(\tau^{-|n-2/k-1/2|-1/2}).$$

Доказательство. Уравнение (9) имеет вид (3) при $b = n - 2/k$ и знаке «+». К нему применимо доказательство утверждения 1 для случая $\nu = |n - 2/k - 1/2|$, поскольку $\nu \neq 0$ в силу условия, наложенного на k. Утверждение доказано.

Случай $k = 4/(2n-1)$ аналогичен случаю $k = 4$ из предыдущего пункта.

3. Анзац $\Psi(t, x) = t^{-n/2} \exp\left(\frac{imx^2}{2t}\right) z(\tau)$, $\tau = t^{-1}\alpha \cdot x$, редуцирует (1) при $k = 4/n$ к уравнению

$$\ddot{z} + a|z|^{4/n} z = 0, \ a = 2\lambda m,$$

которое исследовано в [1].

4. Анзац $\Psi(t, x) = t^{-1/k} z(\tau)$, $\tau = t^{-1}x^2$, редуцирует уравнение 1 к уравнению

$$\ddot{z} + (n/(2\tau) - im/2)\dot{z} - imz/(2k\tau) + a|z|^k z/\tau = 0, \ a = \lambda m/2. \tag{10}$$

Утверждение 3. *Пусть* $l_1(n) < k < l_2(n)$, *где* $l_1(n) = (2 - n + \sqrt{n^2 + 12n + 4})/(2n)$, *а* $l_2(n) = \infty$ *при* $n = 1, 2$ *и* $l_2(n) = 4/(n-2)$ *при* $n \geqslant 3$. *Тогда уравнение* (10) *имеет семейство решений* $z = Z(\tau, c)$, *где* c — *комплексный параметр, а* $Z(\tau, c)$ *при фиксированном* c *является функцией класса* $C^1[0, \infty) \cap C^2(0, \infty)$ *и удовлетворяет условиям*

$$\lim_{\tau \to 0} \tau \cdot \ddot{Z}(\tau, c) < \infty, \ Z(\tau, c) = O(\tau^{-\nu}), \ \tau \to \infty,$$

где $\nu = \min(1/k, n/2 - 1/k)$.

Доказательство. Сначала исследуем линеаризованное уравнение, соответствующее (10) ($a = 0$). Справедлива такая лемма.

Лемма. *Уравнение*

$$\ddot{z} + (n/(2\tau) - im/2)\dot{z} + imz/(2k\tau) = 0 \tag{11}$$

при выполнении условий утверждения 3 *имеет фундаментальную систему решений* $z_1(\tau)$ *и* $z_2(\tau)$, *удовлетворяющих условиям*

$$\lim_{\tau \to 0} z_1(\tau) = 1, \ z_2(\tau) = (1 + o(1)) \int \tau^{-n/2}(1 + o(1))\, d\tau, \ \tau \to 0; \tag{12}$$

$$z_j(\tau) = O(\tau^{-\nu}), \ \dot{z}_j(\tau) = O(\tau^{-\nu}), \qquad j = 1, 2, \ \tau \to \infty. \tag{13}$$

Вронскиан этих решений равен $\exp(im\tau/2)\tau^{-n/2}$.

Доказательство. Существование решения $z_1(\tau)$, удовлетворяющего (12), следует из того, что $\tau = 0$ — регулярная особая точка уравнения 11 с определяющим уравнением $\rho((\rho - 1) + n/2) = 0$, откуда $\rho_1 = 0$, $\rho_2 = 1 - n/2$. Решение $z_2(\tau)$ и выражение для вронскиана получаются из формулы Остроградского — Лиувилля.

Для исследования асимптотики $z_j(\tau)$ при $\tau \to \infty$ выполним подстановку

$$z = \left(\exp\left(-\frac{1}{2}\int\left(\frac{n}{2\tau} - \frac{im}{2}\right)d\tau\right)\right)v = \tau^{-n/4}\exp(im\tau/2)\,v. \tag{14}$$

Получим уравнение

$$\ddot{v} + \left(\frac{m^2}{16} + \frac{im}{2\tau}\left(\frac{n}{4} - \frac{1}{k}\right) + \frac{4n - n^2}{16\tau^2}\right)v = 0. \tag{15}$$

Исследуется оно так же, как и (5). Если $k \neq 4/n$, то в этом случае $\rho_{1,2}(\tau) = \mp im/4 \pm (n/4 - 1/k)\tau^{-1} + O(\tau^{-2})$ и (15) имеет пару линейно независимых решений

$$v_{1,2}(\tau) = O(\tau^{\pm(n/4 - 1/k)}). \tag{16}$$

Если же $k = 4/n$, то (15) имеет пару решений с асимптотикой $v_{1,2}(\tau) = O(1)$, которая формально также удовлетворяет (16). Такую же асимптотику имеет $\dot{v}_{1,2}(\tau)$. В обоих случаях соответствующее решение $z_j(\tau)$ с учетом (14) удовлетворяет (13). Лемма доказана.

Задачу об ограниченных решениях уравнения (10) сведем к интегральному уравнению

$$z(\tau) = z_1(\tau)\left(c + a\int_0^\tau \exp(-im\theta/2)\,\theta^{n/2-1} z_2(\theta)\,|z(\theta)|^k z(\theta)\,d\theta\right) -$$

$$- az_2(\tau)\int_0^\tau \exp(-im\theta/2)\,\theta^{n/2-2} z_1(\theta)\,|z(\theta)|^k z(\theta)\,d\theta \overset{\text{def}}{=} A[z](\tau). \qquad (17)$$

Применим к (17) принцип сжимающих отображений. Рассмотрим полное метрическое пространство B_L непрерывных функций $f: [0, \infty) \to \mathbb{C}$, удовлетворяющих условию

$$|f(\tau)| \leqslant L\min(1, \tau^{-\nu}), \quad L > 0, \qquad (18)$$

с метрикой $\rho(f, g) = \sup\limits_{\tau\in[0,\infty)} |f(\tau) - g(\tau)|$.

Покажем, что $A: B_L \to B_L$ при всех достаточно малых $|c|$ и L. Пусть $f \in B_L$. Тогда, учитывая (12), имеем

$$|A[f](\tau)| \leqslant c_1\left(|c| + L^{k+1}\int_0^\tau \theta^{n/2-1}\left(\int \theta^{-n/2} d\theta\right) d\theta + \right.$$

$$\left. + L^{k+1}\left(\int \tau^{-n/2} d\tau\right)\cdot\int_0^\tau \theta^{n/2-1} d\theta\right) \leqslant c_2(|c| + L^{k+1}), \quad \tau \in [0, 1]. \qquad (19)$$

Нетрудно видеть, что условия утверждения 3 гарантируют выполнение неравенства

$$n/2 - (k+2)\nu < 0. \qquad (20)$$

А тогда, учитывая (13), имеем

$$|A[f](\tau)| \leqslant c_3\left(|c| + L^{k+1}\right)\tau^{-\nu} + c_4\tau^{-\nu}L^{k+1}\int_1^\tau \theta^{n/2-1-(k+2)\nu} d\theta \leqslant$$

$$\leqslant c_5(|c| + L^{k+1})\,\tau^{-\nu}, \ \tau \in (1, \infty). \qquad (21)$$

(Здесь и ниже константы c_i не зависят ни от c, ни от L.) Значит, $A[f](\tau)$ будет удовлетворять условию (18), как только $c_5\,(|c| + L^{k+1}) < L$.

Перейдем к исследованию условий сжатия. Для $f, g \in B_L$ получаются оценки

$$|A[f](\tau) - A[g](\tau)| \leqslant c_6 L^k \rho(f, g), \quad \tau \in [0, 1];$$

$$|A[f](\tau) - A[g](\tau)| \leqslant c_7\tau^{-\nu}L^k\left(1 + \int_1^\tau \theta^{n/2-1-(k+1)\nu} d\theta\right)\times$$

$$\times\rho(f, g) \leqslant c_8 L^k(1 + \tau^{n/2-(k+2)\nu})\,\rho(f, g) \leqslant$$

$$\leqslant 2c_8 L^k \rho(f, g), \quad \tau \in (1, \infty),$$

на основании которых находим условие сжатия $\max(c_6, 2c_8)\,L^k < 1$. Из принципа сжимающих отображений следует существование решения $z(\tau) = Z(\tau, c)$ уравнения (17), удовлетворяющего условию (18).

Для того чтобы закончить доказательство, найдем из (17)

$$\dot{z}(\tau) = \frac{d}{d\tau} A[z](\tau) = \dot{z}_1(\tau)\Big(c + a\int_0^\tau \exp(-im\theta/2)\,\theta^{n/2-1} z_2(\theta) \times$$

$$\times |z(\theta)|^k z(\theta)\,d\theta - \dot{z}_2(\tau)\int_0^\tau \exp(-im\theta/2)\,\theta^{n/2-1} z_1(\theta)\,|z(\theta)|^k z(\theta)\,d\theta. \qquad (22)$$

С помощью формулы Остроградского — Лиувилля получаем $\dot{z}_2(\tau) = (1 + o(1))\,z_2(\tau) + (1 + o(1))\,\tau^{-n/2}$. А тогда с учетом представления

$$\int_0^\tau \exp(-im\theta/2)\,\theta^{n/2-1} z_1(\theta)\,|z(\theta)|^k z(\theta)\,d\theta =$$

$$= \tau^{n/2}\int_0^1 \exp(-ims\tau/2)\,s^{n/2-1} z_1(s\tau)\,|z(s\tau)|^k z(s\tau)\,ds$$

и (22) заключаем, что $z(\tau) \in C^1[0, \infty)$.

Свойство для $\ddot{Z}(\tau, c)$ вытекает непосредственно из уравнения (10). Утверждение доказано.

Замечание. Случай $n = 1$ при менее жестких ограничениях на параметр k фактически исследован в п. 1.

5. Анзац

$$\Psi(t, x) = t^{-n/2}\exp\left(\frac{imx^2}{2t}\right) z(\tau), \quad \tau = t^{-2}x^2,$$

редуцирует уравнение (1) при $k = 4/n$ к уравнению

$$\ddot{z} + n\dot{z}/(2\tau) + a\,|z|^{4/n} z/\tau = 0, \quad a = \lambda m/2. \qquad (23)$$

Утверждение 4. *Если $n \geqslant 2$, $a > 0$, то уравнение (23) имеет семейство решений вида $z = \exp(i\theta)\, r(\tau, c)$, где θ, c — вещественные параметры, а $r(\tau, c)$ при фиксированном c является функцией класса $C^1[0, \infty) \cap C^2(0, \infty)$ и удовлетворяет условиям*

$$r(0, c) = c; \quad \lim_{\tau\to 0} \ddot{r}(\tau, c)\,\tau < \infty, \qquad (24)$$

$$r(\tau, c) = \begin{cases} O(\tau^{-1/6}), & n = 2, \\ O(\tau^{-n/(2n+4)}), & n \geqslant 3, \end{cases} \quad \tau \to \infty. \qquad (25)$$

Доказательство. Подстановка $z = \exp(i\theta)\, r$ в (23) приводит к уравнению

$$\ddot{r} + n\dot{r}/(2\tau) + ar^{4/n+1}/\tau = 0. \qquad (26)$$

Для того чтобы показать существование семейства решений (26), удовлетворяющих (24) при малых $\tau \geqslant 0$, следуя [5], запишем (26) в виде

$$\frac{d}{d\tau}(\dot{r}\tau^{n/2}) = -a\tau^{n/2-1} r^{4/n+1}, \qquad (26')$$

откуда с учетом требования непрерывности $\dot{r}$ при $\tau = 0$ имеем представление

$$\dot{r}(\tau) = -a\tau^{-n/2}\Big(\int_0^\tau \tau_2^{n/2-1} r^{4/n+1}(\tau_2)\,d\tau_2\Big).$$

Следовательно, искомое семейство удовлетворяет интегральному уравнению

$$r(\tau) = c - a\int\limits_0^{\tau} \tau_1^{-n/2} \int\limits_0^{\tau_1} \tau_2^{n/2-1} r^{4/n+1}(\tau_2)\, d\tau_2.$$

При каждом фиксированном $c \in R$ локальная (при малых τ) разрешимость этого уравнения легко доказывается с помощью принципа сжимающих отображений.

Теперь докажем, что всякое решение из семейства $r(\tau, c)$ продолжимо на полуось $[0, \infty)$ и обладает асимптотикой (25). Заметим, что (26′) — это известное уравнение Эдмена — Фаулера. Его качественный анализ проведен, например, в [4]. К сожалению, в [4] не выписаны в явном виде формулы асимптотик в рассматриваемом здесь случае.

Пусть $n = 2$. Положим $\tau = e^s$, $r = \exp(-s/6)\, p$. Получим

$$\ddot{p}\,(1/3)\,\dot{p} + (1/36)\,p + ap^3\exp(2s/3) = 0 \quad \left(\dot{p} = \frac{dp}{ds}\right). \tag{27}$$

Рассмотрим функцию

$$V(s, p, \dot{p}) = \dot{p}^2/2 + (1/72)\,p^2 + (a/4)\,p^4\exp(2s/3).$$

В силу (27) имеем

$$\dot{V} = (2/3)\,(\dot{p}^2/2 + (a/4)\,p^4\exp(2s/3)) \leqslant (2/3)\,V.$$

Отсюда $V = O(\exp(2s/3))$ и $p = O(1)$ при $s \to \infty$. Значит, $r = O(\tau^{-1/6})$.

Пусть $n \geqslant 3$. Положим $r = \tau^{(2-n)/2} p$. Получим

$$\ddot{p} + (4-n)\,\dot{p}/(2\tau) + a\tau^{4/n-3} p^{4/n+1} = 0. \tag{28}$$

Рассмотрим функцию

$$W(\tau, p, \dot{p}) = \dot{p}^2/2 + a\,(4/n+2)^{-1}\,\tau^{4/n-3} p^4.$$

Ввиду (28) получим

$$\dot{W} = \tau^{-1}\,[(n-4)\,\dot{p}^2/2 + a\,(4/n-3)\,(4/n+2)^{-1}\,\tau^{4/n-3} p^{4/n+2}] \leqslant (n-4)\,\tau^{-1} W.$$

Отсюда $W = O(\tau^{n-4})$. Следовательно,

$$p^{4/n+2} = O(\tau^{n-4}),\ \ p = O(\tau^{(n^2-n-4)/(2n+4)}),$$

$$r = O(\tau^{(2-n)/2+(n^2-n-4)/(2n+4)}) = O(\tau^{-n/(2n+4)}).$$

Утверждение доказано.

Замечание. Случай $n = 1$ сводится к п. 3.

6. Анзац

$$\Psi(t, x) = (1-t^2)^{-n/4}\exp\left(-\frac{im}{2}\frac{tx^2}{1-t^2}\right) z(\tau), \quad \tau = x^2/(1-t^2),$$

редуцирует уравнение (1) к уравнению

$$\ddot{z} + n\dot{z}/(2\tau) + m^2 z + a\,|z|^{4/n} z/\tau = 0,\ \ a = \lambda m/2. \tag{29}$$

Утверждение 5. *Уравнение (29) имеет семейство решений $z = Z(\tau, c)$, где c — комплексный параметр а функция $Z(\tau, c)$ при фиксированном c принадлежит классу $C^1[0, \infty) \cap C^2(0, \infty)$ и удовлетворяет условиям*

$$\lim_{\tau \to 0} \tau\dot{Z}(\tau, c) < \infty,\ \ Z(\tau, c) = O(\tau^{-n/4}), \qquad \tau \to \infty.$$

Доказательство. Линеаризованное уравнение (29) ($a = 0$) обладает фундаментальной системой решений $z_1(\tau)$, $z_2(\tau)$, удовлетворяющих условиям (12), (13) при $\nu = n/4$. Это утверждение, а также последующие рассуждения повторяют схему доказательства в п. 4. Соответствующее интегральное уравнение отличается от (17) лишь отсутствием экспонент под знаком интеграла. Осталось заметить, что неравенство (20) при $\nu = n/4$, $k = 4/n$ выполняется.

1. *Парасюк И. О., Фущич В. И.* Качественный анализ семейств ограниченных решений нелинейного трехмерного уравнения Шредингера // Укр. мат. журн.— 1990.— **42**, № 10.— С. 1344—1350.
2. *Fushchich W. I., Serov N. I.* On some exact solutions of three-dimensional non-linear Schrödinger equation // J. Phus. A. : Math. Gen.— 1987.— 20.— P. 929—933.
3. *Фущич В. И., Штелень В. М., Серов Н. И.* Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики.— Киев : Наук. думка, 1989.— 335 с.
4. *Беллман Р.* Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений.— М : Изд-во иностр. лит., 1954.— 216 с.
5. *Режимы* с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений/ А. А. Самарский, В. А. Галактионов, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов.— М. : Наука, 1987.— 480 с.

Получено 11.01.91