УДК 512.54

Ю. В. БОДНАРЧУК, канд. физ.-мат. наук (Киев. ун-т)

Автоморфизмы кратных сплетений абелевых p-групп

Приводится полное описание строения группы автоморфизмов кратных сплетений конечных абелевых p-групп. Действие автоморфизмов указано в явном виде.

Наводиться повний опис будови групи автоморфізмів кратних вінцевих добутків скінченних абелевих p-груп. Дія автоморфізмів вказана в явному вигляді.

Целью настоящей работы является полное описание строения группы автоморфизмов кратных сплетений абелевых p-групп. Сразу отметим, что при рассмотрении кратных сплетений для нас более удобной является такая их запись, при которой активный сомножитель находится слева и сам он будет рассматриваться как подгруппа группы автоморфизмов базы сплетения.

Пусть $\{A_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, — набор конечных абелевых p-групп и $W_n = A_1 \wr (A_2 \wr (\ldots \wr A_n) \ldots) = \underset{i=1}{\overset{n}{\wr}} A_i$.

Для решения указанной задачи можно, в принципе, представить W_n стандартным сплетением $A_1 \wr (\underset{i=2}{\overset{n}{\wr}} A_i)$ и применить результаты Хоутона [1] об автоморфизмах стандартных сплетений. Однако быстро выясняется, что этих результатов недостаточно для описания группы $\mathrm{Aut}\, W_n$. Возникают непреодолимые трудности при описании централизатора A_1 в группе автоморфизмов базы, которая устроена достаточно сложно (декартовая степень кратного сплетения групп A_i).

В данной работе предлагается рассматривать W_n как группу подстановок на множестве $X_n = A_1 \times \ldots \times A_n$, представить ее как сплетение группы подстановок (W_{n-1}, X_{n-1}) с группой A_n и применить результаты работы [2] об автоморфизмах сплетений транзитивной группы подстановок с абстрактной группой. При таком подходе база сплетения устроена значительно проще (декартовая степень группы A_n), что и позволяет решить исходную задачу. Как следует из [3], база F сплетения $(W_{n-1}, X_{n-1}) \wr A_n$ не является характеристической тогда и только тогда, когда A_{n-1} и A_n одновременно являются циклическими группами второго порядка. В этом случае $\mathrm{Aut}\, W_n = \mathrm{Aut}_F\, W_n \lambda(\zeta)$, где ζ — расширение автоморфизма $C_2 \wr C_2$, нарушающего характеристичность базы, до автоморфизма W_n, $|\zeta| = 2$, а $\mathrm{Aut}_F\, W_n = \{\alpha \in \mathrm{Aut}\, W_n \mid F^\alpha = F\}$.

Таким образом, задача сводится к описанию группы $\mathrm{Aut}_F\, W_n$ и для ее решения, согласно [2], нужно вычислить нормализатор $N_{\mathrm{Aut} F}(W_{n-1})$ и группу $\mathrm{Hom}(W^0_{n-1}, A_n)$, где W^0_{n-1} — фиксатор точки из X_{n-1} в W_{n-1}.

Приведем несколько утверждений о нормализаторах и централизаторах сплетений, из которых будет выведено описание группы $N_{\mathrm{Aut} F}(W_{n-1})$. Пусть $W = (G, X) \wr H$ — сплетение произвольной транзитивной группы подстановок с абстрактной группой H, базу которого обозначим через F. Если элементы $\mathrm{Aut}\, F$ представить матрицами эндоморфизмов $(T_{x,y})$, $x, y \in \in X$, группы H, то элементы из $N_{\mathrm{Aut} F}(G)$ характеризуются следующим образом.

Л е м м а 1. *Автоморфизм* $U = (T_{x,y}) \in \mathrm{Aut}\, F$ *принадлежит* $N_{\mathrm{Aut} F}(G)$ *тогда и только тогда, когда*

$$T_{gx, g^{\alpha}y} = T_{x,y} \tag{1}$$

для любых $g \in G$, x, $y \in X$, *где* α — *автоморфизм, индуцируемый* U *на* G.

Д о к а з а т е л ь с т в о приведено в [2].

Следующее утверждение дает описание строения нормализатора сплетения групп подстановок $(W, X) = (G_1, X_1) \wr (G_2, X_2)$ (с базой F) в симметрической группе $S(X)$ ($X = X_1 \times X_2$) исходя из строения нормализаторов $N_{S(X_i)}(G_i)$, $i = 1, 2$. Обозначим через F^0 (F^1) подгруппу функций $f: X_1 \to N_{S(X_2)}(G_2)$, различные значения которых индуцируют один и тот же автоморфизм (внешний автоморфизм) на G_2. Нетрудно видеть, что $F^1 = F^0 F^2$, где F^2 — подгруппа функций, значения которых лежат в G_2 ($F^2 \cong F$).

Л е м м а 2. a) $N_{S(X)}(D) = S(X_1) F^0$; b) $N_{S(X)}(W) = N_{S(X_1)}(G_1) F^1$, *где* $D < F$ — *подгруппа постоянных функций* ($D \cong G_2$).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действие группы D на множестве $X_1 \times X_2$ является интранзитивным и, следовательно, орбиты группы D будут областями импримитивности ее нормализатора в $S(X)$, откуда $N_{S(X)}(D) < S(X_1) \wr S(X_2)$ и утверждение п. а) очевидно. Как следует из результатов работы [2], для любого автоморфизма $\text{o} \in \mathrm{Aut}\, W$ существует внутренний автоморфизм, индуцируемый элементом базы $f \in F$ такой, что $D_{\text{o}f} = D$ (указанный выше автоморфизм ζ также сохраняет D). Пользуясь этим, и учитывая п. а), получаем включение $N_{S(X)}(W) \leqslant N_{S(X)}(D) F^2 = S(X_1) \times F^0 F^2 = S(X_1) F^1$, откуда легко следует п. б. Лемма доказана.

Из леммы 2 индукцией по n легко выводится такое следствие.

С л е д с т в и е. $N_{S(X)}(W_n) = W_n \lambda \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \mathrm{Aut}\, A_i \right)$.

Пусть $W = (G, X) \wr A$ — сплетение конечной транзитивной p-группы подстановок с абелевой p-группой $A = \sum\limits_{j=1}^{n} C_j$, где C_j — циклические p-группы порядков p^{r_j}, $j \in M = \{1, 2, \ldots, m\}$, r_j — натуральные числа. Тогда для базы сплетения F имеем разложение

$$F = \sum_{x \in X} A^{(x)} = \sum_{x \in X} \sum_{j \in M} C_j^{(x)} = \sum_{(j,x) \in Y} C_j^{(x)},$$

где $C_j^{(x)}$ — x-я копия C_j, $Y = M \times X$. Группа G действует на Y следующим образом: $(j, x) \to (j, gx)$, $j \in M$, $x \in X$, $g \in G$. Элементы группы $\mathrm{Aut}\, F$ можно представлять матрицами над кольцом $\mathbb{Z}_{p^r}$ — кольцом вычетов по модулю p^r ($r = \max r_j$) размерности $k = |Y| = m|X|$. Из леммы 1 вытекает, что если (a_{y_1, y_2}) — матрица, соответствующая элементу $u \in N_{\mathrm{Aut} F}(G)$, индуцирующая автоморфизм α на G, то для любых $g \in G$, $y_1, y_2 \in Y$ справедливо равенство

$$a_{gy_1, g^{\alpha}y_2} = a_{y_1, y_2}. \tag{1}$$

Л е м м а 3. $N_{\mathrm{Aut} F}(G) = N_{S(X)}(G)\, C_{\mathrm{Aut} F}(G)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $u \in N_{\mathrm{Aut} F}(G)$ индуцирует автоморфизм α на G и (a_{y_1, y_2}) — соответствующая матрица. Пользуясь формулой (1), вычислим детерминант этой матрицы $\mathrm{Det}(u) = \sum\limits_{\text{o} \in S(Y)} (-1)^{\chi(\text{o})} \prod\limits_{y \in Y} a_{y, \text{o}y}$, где χ — функция четности. Пусть $\text{o}_1, \text{o}_2 \in S(Y)$ таковы, что для некоторого $g \in G$ выполняется равенство $\text{o}_1 g = g^{\alpha} \text{o}_2$. Учитывая (1), имеем $a_{y, \text{o}_2 y} = a_{gy, g^{\alpha}\text{o}_2 y} = a_{gy, \text{o}_1 gy}$, откуда $\prod\limits_{y \in Y} a_{y, \text{o}_2 y} = \prod\limits_{y \in Y} a_{y, \text{o}_1 y}$.

Рассмотрим действие группы G на $S(Y)$ по такому закону: $\text{o} \to g^{\alpha} \text{o} g^{-1}$, $\text{o} \in S(Y)$, $g \in G$. Пусть $\{U_i\}$ — множество орбит указанного действия и o_i — их представители. При $p \neq 2$ действие не меняет четности подстановки o. В этом случае, как следует из предыдущей формулы, $\mathrm{Det}(u) = \sum_i (-1)^{\chi(o_i)} |U_i| \prod_{y\in Y} a_{y,o_iy}$. При $p=2$ детерминант сравним по модулю 2 с приведенным выражением. Пусть G_{o_i} — фиксатор $o_i \in S(Y)$ при указанном действии G. Если для любого i $G \neq G_{o_i}$, то $|U_i| = |G : G_{o_i}| \equiv 0 \pmod p$, откуда $\mathrm{Det}(u) \equiv 0 \pmod p$. Так как матрица u невырождена, то существует $o_i = o$ такой, что $G = G_o$, т. е. $o = g^\alpha o g^{-1}$ или $g^\alpha = ogo^{-1}$ для любого $g \in G$. Таким образом, существует $o \in N_{S(Y)}(G)$, который индуцирует автоморфизм α. Поскольку (G, Y) есть диагональ в сплетении $S(M) \wr (G, X)$, то, как следует из п. а) леммы 2, автоморфизм α индуцируется некоторым элементом $o \in N_{S(X)}(G)$. Пусть $\bar{o}$ — автоморфизм $\mathbb{W}$ такой, что $g \to g^\alpha$, $f(x) \to f(ox)$. Положим $u_1 = \bar{o}^{-1} u$. Тогда $u = \bar{o}\, u_1$ и $u_1 \in C_{\mathrm{Aut}F}(G)$. Лемма доказана.

Следствие. *До автоморфизмов $\mathbb{W}$ расширяются те и только те автоморфизмы G, которые индуцируются элементами из $N_{S(X)}(G)$.*

Последняя лемма и следствие из леммы 2 сводят рассматриваемую задачу к описанию централизатора $C_{\mathrm{Aut}F}(\mathbb{W}_{n-1})$. Для сплетения транзитивной группы подстановок (G, X) с абелевой группой A (G и A не обязательно p-группы), рассмотрим кольцо централизаторов $\mathfrak{C} = \{u \in \mathrm{End}\, F \mid ug = gu \ \forall g \in G\}$. Пусть $K = \mathrm{End}\, A$. Тогда, отождествляя $\mathrm{End}\, F$ с $M_n(K)$ — кольцом матриц размерности $n = |X|$ над кольцом K, из леммы 1 получаем, что $u = (T_{x_1,x_2}) \in \mathfrak{C}$ тогда и только тогда, когда

$$T_{gx_1, gx_2} = T_{x_1,x_2} \tag{2}$$

$\forall x_1, x_2 \in X$, $g \in G$. Нетрудно видеть, что D_n-подкольцо скалярных матриц принадлежит $\mathfrak{C}$, что позволяет рассматривать $\mathfrak{C}$ как K-бимодуль. Пусть $\{U_\alpha\}$ — совокупность 2-орбит группы (G, X), тогда $\mathfrak{C}$ как модуль над K имеет базис, состоящий из элементов $A(u_\alpha) = \{T^\alpha_{x,y}\}$, где

$$T^\alpha_{x,y} = \begin{cases} E, \text{ если } (x, y) \in U_\alpha \ (E \text{ — тождественный автоморфизм } A); \\ 0 \text{ — в противном случае.} \end{cases}$$

Таким образом, для описания строения $\mathfrak{C}$ и его мультипликативной группы необходимо знать строение 2-орбит группы (G, X). Сейчас наша задача выразить строение кольца $\mathfrak{C}$ для группы $(G, X) = (G_1, X_1) \wr (G_2, X_2)$ через кольца $\mathfrak{C}_i = C_{\mathrm{End}F_i}(G_i)$, где F_i — совокупность всех функций: $X_i \to A$, $|X_i| = r_i$, $i = 1, 2$. Для этого нам понадобится следующее утверждение о 2-орбитах группы (G, X).

Лемма 4. *Пусть $\{U_i\}$, $\{V_j\}$ — множества 2-орбит групп подстановок (G_1, X_1), (G_2, X_2) соответственно, причем U_0 — диагональ. Тогда 2-орбиты группы (G, X) имеют вид $\overline{U}_i = U_i \times X_2$, $i \neq 0$, либо $\overline{V}_j = U_0 \times V_j$.*

Доказательство легко следует из закона действия сплетения на $X_1 \times X_2$.

Чтобы описать строение кольца $\mathfrak{C}$, будем рассматривать матрицы из $M_{r_1 r_2}(K)$ как блочные: $u = (a_{x,y})$, $x, y \in X$, $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ (x_1, y_1 — индексы блока, x_2, y_2 — индексы элемента внутри блока). Через Δ_r обозначим подкольцо матриц размерности r, состоящее из матриц $\Delta(T)$, все элементы которых равны T (T пробегает K). Нетрудно видеть, что $\Delta_{r_1 r_2} \subset \mathfrak{C}$ и $\Delta_r \cong K_r$, где K_r получается из K заменой операции умножения $T_1 T_2 \to r(T_1 T_2)$. Рассмотрим централизатор $\mathfrak{C}^1$ элементов из G_1 в кольце матриц $M_{r_1}(K_{r_2})$ ($\mathfrak{C}^1$ отличается от $\mathfrak{C}_1$ тем, что вместо кольца K берется кольцо K_{r_2}).

Лемма 5. $\mathfrak{C} \cong \mathfrak{C}^1 + \mathfrak{C}_2$.

Доказательство. Пусть C_2 — подмодуль $\mathfrak{C}$, порожденный элементами $A(\overline{V}_j)$ базиса, указанного ранее. Так как $\overline{V}_j = \{(x_1, x_2)(x_1, z) \mid (x, z) \in \overline{V}_j, \ x_1 \in X_1\}$, то, как следует из (3), матрицы из C_2 имеют вид $u \dotplus u \dotplus \ldots$

$\ldots \dot{+} u$, где $u \in \mathfrak{C}_2$, а $\dot{+}$ — прямая сумма матриц (число слагаемых равно r), откуда $C_2 \cong \mathfrak{C}_2$. Рассмотрим подмодуль C_1, порожденный элементами базиса $A(\overline{U}_i)$, $i \neq 0$, а также элементы из C_2 вида $\overline{1} = \Delta(E) \dot{+} \ldots \dot{+} \Delta(E)$. Поскольку $\overline{U}_i = \{(x_1, x_2)(y_1, y_2) \mid (x_1, y_1) \in U_i,\ i \neq 0,\ x_2, y_2 \in X_2\}$, то матрицу $A(\overline{U}_i)$ можно получить, вставив в $A(U_i)$ вместо $E \in K$ блоки $\Delta(E) = \Delta_{r_2}$, т. е. $A(\overline{U}_i) = \Delta_{r_2}(E) \dot{\times} A(U_i)$, где $\dot{\times}$ — кронекеровское произведение матриц. Тогда C_1 можно отождествить с кольцом централизаторов $C_{M_{r_1}(K_{r_2})}(G_1)$, которое одновременно является свободным модулем над K_{r_2}, натянутым на элементы $A(\overline{U}_i)$, $\overline{1}$; $i \in I$, $i \neq 0$. Этим лемма доказана.

Отметим, что поскольку элементы из C_2 можно рассматривать как скалярные матрицы над $\mathfrak{C}_2$, то получаем следующий закон умножения: $c_2(\Sigma_i A(U_i)\overline{T}_i)c_2' = \Sigma_i A(\overline{U}_i) \circ (c_2) T_i \circ (c_2')) \in \mathfrak{C}_1$, где c_2, $c_2' \in \mathfrak{C}_2$, $\overline{T}_i$ — образ элемента $T_i \in K$ в кольце K_{r_2}, а $\circ(c_2)$ — сумма элементов в столбце матрицы C_2 (как следует из (2), $\circ$ не зависит от выбора столбца или строки).

Обозначим через $1 + L$ присоединенную группу нильпотентного кольца L. Пусть теперь G и A — p-группы $|X_2| = p^k$, $\exp(A) = p^r$. Тогда k_{p^k} нильпотентно, откуда следует нильпотентность кольца $\mathfrak{C}^1$. Легко вычисляются факторы соответствующего центрального ряда группы $1 + \mathfrak{C}^1$, они изоморфны $\bigoplus_{i=1}^{s} (K^+/p^k K)$, где s — число 2-орбит группы (G_1, X_1).

Лемма 6. $\mathfrak{C}^* = \mathfrak{C}_2^*(1 + \mathfrak{C}^1)$.

Доказательство. Пусть $u \in \mathfrak{C}^*$. Как следует из предыдущей леммы, $u = c_1 + c_2$, откуда $\circ(u) = \circ(c_1) + \circ(c_2)$. Поскольку для любой постоянной функции d_a, принимающей во всех точках значение a, имеем $d_a^u = d_{a^1}$ $(a^1 = a^{\circ(u)})$, то $\circ(u) \in K^*$. Тогда получаем $\circ(c_2) \in K^*$. Действительно, пусть $a \in \operatorname{Ker} \circ(c_2)$, при $r \geqslant k$ имеем $(p^{r-k}a)^{\circ(u)} = 0$. При $r < k$ $a \in \operatorname{Ker} \circ(u)$, откуда следует, что a — тривиальный элемент A. Пользуясь приведенным выше законом умножения, получаем разложение $u = c_1 + c_2 = c_2(1 + \Sigma_i A(\overline{U_i})\, \circ^{-1}(c_2) T_i)$, где $c_1 = \Sigma_i A(\overline{U}_i)\overline{T}_i$, а 1 — матричная единица размерности $r_1 r_2$. Лемма доказана.

Отметим, что действие элементов из $\mathfrak{C}^1$, $\mathfrak{C}_2$ на функциях из $X_1 \times X_2 \to A$ задается следующим образом: $f^c(x_1, x_2) = \Sigma_{x_2 \in X_2} f^{c'}(x_1, x_2)$, где $c \in \mathfrak{C}^1$, $c' \in \mathfrak{C}_1$; действие элемента $c \in \mathfrak{C}_2$ определяется действием c на функции из $X_2 \to A$, переменная x_1 при этом фиксируется.

Вернемся теперь к группам W_n. Пусть $|A_i| = s_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, и $q_r = \prod_{i=r+1}^{n} s_i$. Положим $G = W_n$ и разложим в стандартное сплетение $W_n = A_1 \wr (W_{n-1}^1, X_{n-1}^1)$, обозначим через F_{n-k} группу функций из $\bigoplus_{i=k+1}^{n} A_i \to A$, $k = 0, \ldots, n-1$. Применяя лемму 6, получаем $C_{\mathrm{Aut} F_n}(W_n) = C_{\mathrm{Aut} F_{n-1}}(W_{n-1}^1)\,(1 + \mathfrak{C}_{M_{s_1}(K_{q_1})}(A_1))$. Продолжая разложение в сплетение W_{n-1}^1, применяя лемму 6, можно продолжить разложение централизатора. Заметим, что кольцо централизаторов $\mathfrak{C} = C_{M_{s_i}(L)}(A_i)$, где L — произвольное кольцо, изоморфно групповому кольцу LA_i. Действительно, имеется естественное вложение LA_i в $\mathfrak{C}$, а размерности колец, как свободных L-модулей, совпадают и равны $|A_i|$. Учитывая изложенное выше, получаем разложение $C_{\mathrm{Aut} F}(W_n) = (KA_n)^* \prod_{r=1}^{n-1} (I + K_{q_r} A_r)$. Нетрудно видеть, что обратимыми элементами KA_n являются те и только те элементы, сумма коэффициентов которых принадлежит K^*, откуда можно получить разложение $(KA_n)^* \cong K^*(1 + Q)$, где Q — нильпотентное подкольцо, состоящее из элементов, сумма коэффициентов которых равна 0, $K^* = \mathrm{Aut}\, A_n$. Этим описанием строения группы централизаторов мы и ограничимся.

Перейдем теперь к описанию группы гомоморфизмов $\mathrm{Hom}(W_n^0, A)$, где W_n^0 — фиксатор точки $0_n = 0 + \ldots + 0 \in X_n$ (здесь все A_i — аддитивные группы). Поскольку $W_n^0 = \{gf \in W_n \mid g \in W_{n-1}^0,\ f(0_n) = 0\}$, то его можно рассматривать как сплетение $(W_{n-1}^0, X_{n-1}^0) \wr A$, где $X_{n-1}^0 = X_{n-1} \setminus \{0_{n-1}\}$. Базу этого сплетения обозначим F_0. Каждый гомоморфизм $\theta_n : W_n^0 \to A$ индуцирует гомоморфизмы $\theta_{n-1} : W_{n-1}^0 \to A$ и $\mu : F_0 \to A$. С другой стороны, пара (θ_{n-1}, μ) однозначно определяет θ_n. Поскольку A — абелевая группа, то $\mathrm{Ker}\,\theta_n$ содержит коммутант, который разлагается в произведение коммутантов $[W_{n-1}, W_{n-1}][W_{n-1}, F_0]$, а $\mathrm{Ker}\,\mu \geqslant [W_{n-1}^0, E_0]$. Нетрудно показать, что любая пара (θ_{n-1}, μ) гомоморфизмов в A такая, что $\mathrm{Ker}\,\mu$ содержит указанный выше взаимный коммутант, однозначно определяет гомоморфизм $W_n^0 \to A$. Группу гомоморфизмов $F_0 \to A$ с указанным условием на ядро обозначим через M. Нетрудно показать, что взаимный коммутант $[W_{n-1}^0, F_0]$ состоит из функций $f \in F_0$ таких, что $\Sigma_{x \in U} f(x) = 0$ для любой орбиты U группы подстановок (W_{n-1}^0, X_{n-1}^0). Описание орбит дает следующая лемма.

Лемма 7. *Орбитами* (W_n^0, X_n^0) *являются множества* $U_k(a) = \{(0, \ldots, 0, a, x_{k+2}, x_{k+3}, \ldots, x_n) \in X_n\}$; $k = 0, 1 \ldots, n-1$; $a \in A_{k+1} \setminus \{0\}$.

Доказательство следует непосредственно из определения действия W_n^0. Выберем элементы $x_k(a) = (0, \ldots, 0, a, 0, \ldots, 0) \in U_k(a)$ представителями орбит. Пусть $\Phi < F_0$ — подгруппа, порожденная функциями, которые принимают ненулевое значение только на одном из представителей орбит. Легко видеть, что $F_0 = \Phi + [W_{n-1}^0, F_0]$ и Φ изоморфна декартовой степени группы A. Из последнего следует изоморфизм $M \cong \Phi \cong A^{(t_{n-1})}$, где t_{n-1} — число орбит $t_{n-1} = \Sigma_{k=1}^{n-1}(s_k - 1)$.

Лемма 8. $\mathrm{Hom}(W_n^0, A) \cong \bigoplus_{i=2}^{n} \mathrm{Hom}(A_i^{(t_{i-1})}, A)$.

Доказательство легко провести индукцией по n.

Обозначим через Γ подгруппу автоморфизмов W_n, которые определяются гомоморфизмами $\theta : W_{n-1}^0 \to A_n$ $(\Gamma \cong \mathrm{Hom}(W_{n-1}^0, A_n))$. Таким образом доказана следующая теорема.

Теорема. *Если A_{n-1} и A_n одновременно не являются циклическими группами второго порядка, то*

$$\mathrm{Aut}\, W_n \cong (\Gamma \times I_F)\, \lambda \left(N_S (KA_{n-1})^* \prod_{r=1}^{n-2} (I + K_{q_r} A_r) \right),$$

где $N_S \cong N_{S(x_{n-1})}(W_{n-1}) \cong W_{n-1} \lambda (\bigoplus_{k=1}^{n-1} \mathrm{Aut}(A_k))$, $K = \mathrm{End}(A_n)$, $(KA_{n-1})^* \cong \mathrm{Aut}\, A_n (1 + Q)$, $Q \subset KA_{n-1}$ — *подкольцо, состоящее из элементов, сумма коэффициентов которых равна нулю,* $q_r = \prod_{i=r+1}^{n-1} s_i$, $\Gamma \cong \bigoplus_{i=2}^{n-1} \mathrm{Hom}(A_i^{(t_{i-1})}, A_n)$, $t_i = \sum_{k=1}^{i} s_k - i$, I_F — *подгруппа внутренних автоморфизмов, индуцируемых базой. В случае, если* $A_{n-1} \cong A_n$ — *циклические группы второго порядка, то* $\mathrm{Aut}\, W_n \cong \mathrm{Aut}_F W_n \lambda (\zeta)$, *где* ζ — *расширение автоморфизма* $C_2 \wr C_2$, *несохраняющего базу до автоморфизма* W_n, *а для* $\mathrm{Aut}_F W_n$ *справедливо приведенное выше разложение.*

Укажем действие автоморфизмов в явном виде. Пусть $gf \in W_n$, $g \in W_{n-1}$, $f \in F$. Тогда $gf \to g^o f(ox)$, $o \in N_{S(x_{n-1})}(W_{n-1})$. Автоморфизмы из $1 + K_{q_r} A_r$ оставляют g на месте, а на функции из F действуют следующим образом: $f \to f + \sum_{x_{r+1}, \ldots, x_{n-1}} \sum_{a \in A_r} f(x_1, \ldots, x_{r-1}, ax_r, x_{r+1}, \ldots, x_{n-1})\ T_a$, где $\sum_{a \in A_r} a\ T_a \in K_{q_r} A_r$, $X_i \in A_i$. Действие автоморфизмов из $1 + Q$ задается такой же формулой, где следует положить $r=n-1$ и убрать первую сумму. Для того чтобы указать действие из автоморфизмов из Γ в явном виде, выберем в качестве представителей классов смежности W_{n-1} по W^0_{n-1} элементы из L_{n-1} — регулярной транзитивной абелевой подгруппы W_{n-1} ($L_{n-1}\cong \bigoplus_{i=1}^{n-1} A_i$). Соответствующее разложение имеет вид $W_{n-1}=\bigcup_{x\in X_{n-1}} l_x W^0_{n-1}$, $l_x: 0_{n-1}\to x$, $l_x\in L_{n-1}$. Для каждого $\theta\in \mathrm{Hom}(W^0_{n-1}, A_n)$ определим функцию $\xi_\theta: W_{n-1}\to A_{n-1}$ следующим образом: $\xi_\theta(l_x g_0)=g_0^\theta$, $g_0\in W^0_{n-1}$. Тогда, согласно [2], автоморфизм $\gamma_\theta\in\Gamma$ действует следующим образом: $g\to g\varphi_g$, $f\to f$, где $\varphi_g(x)=\xi_\theta(gl_x)$, $gf\in W_n$, $\varphi_g\in F$.

В заключение отметим наиболее простой частный случай, когда все A_i—циклические группы простого порядка. В этом случае все упомянутые присоединенные группы нильпотентных колец являются элементарными абелевыми p-группами и описание группы автоморфизмов становится совершенно прозрачным (см. также [4]).

1. *Houghton C. H.* On the automorphisms of certain wreath products // Publs. math.— 1962.— 9.— P. 307—315.
2. *Боднарчук Ю. В.* Строение группы автоморфизмов нестандартного сплетения групп // Укр. мат. журн.— 1984.— **36**, № 2.— С. 143—148.
3. *Боднарчук Ю. В.* Автоморфизмы нестандартных сплетений групп: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук.— Киев, 1985.— 11 с.
4. *Боднарчук Ю. В.* Строение группы автоморфизмов силовской p-подгруппы симметрической группы S_{p^n} ($p\neq 2$) // Укр. мат. журн.— 1984.— **36**, № 6.— С. 688—694.

Получено 29.08.90