УДК 519.311

В. В. ЖИКОВ, д-р физ.-мат. наук (Владимир. пед. ин-т)

Об оценках следа усредненного тензора

Для операторов теории упругости и операторов четвертого порядка развит вариационный метод доказательства оценок усредненного тензора. В частном случае двухфазных сред из полученных оценок следуют известные в теории упругости «границы» Хашина — Штрикмана. В качестве применения оценок доказывается аналог теоремы Полиа — Шиффера.

Для операторів теорії пружності та операторів четвертого порядку розвинуто варіаційний метод оцінок усереднення тензора. Зокрема, у випадку двофазних середовищ з одержаних оцінок витікають відомі в теорії пружності «межі» Хашина — Штрикмана. При застосуванні здобутих оцінок доводиться аналог теореми Поліа — Шиффера.

1. Введение. 1. Будем использовать следующие обозначения: $\xi = \{\xi_{ij}\}$ — симметрическая матрица размера $m \times m$; $\xi \cdot \eta = \xi_{ij}\eta_{ij}$, в частности, $\xi^2 = \xi_{ij}\xi_{ij}$ (суммирование по повторяющимся индексам); $I = \{\delta_{ij}\}$— единичная матрица, $\operatorname{tr}\xi = \xi_{ii}$ — след матрицы ξ; $\mathring{\xi} = \xi - \frac{I \operatorname{tr}\xi}{m}$ — девиатор матрицы ξ, при этом

$$\xi\cdot\eta = \mathring{\xi}\cdot\mathring{\eta} + \frac{\operatorname{tr}\xi\operatorname{tr}\eta}{m};$$

$A = \{A_{ijkr}\}$ — тензор четвертого порядка, удовлетворяющий условию симметрии $A_{ijkr} = A_{jikr} = A_{krij}$; $A\xi = \{A_{ijkr}\xi_{kr}\}$, $\eta A\xi = A_{ijkr}\xi_{kr}\eta_{ij}$. С тензором A связан линейный оператор $\xi \to A\xi$, действующий в пространстве $\mathbb{R}^{\frac{m(m+1)}{2}}$ симметрических матриц. В силу условия симметрии этот оператор является симметрическим. Особое внимание уделяем изотропным тензорам. В этом случае

$$A_{ijkr} = \mu\left(\delta_{ik}\delta_{jr} + \delta_{ir}\delta_{jk} - \frac{2\delta_{ij}\delta_{kr}}{m}\right) + K\delta_{ij}\delta_{kr}, \tag{1}$$

$$A\xi = 2\mu\mathring{\xi} + KI\operatorname{tr}\xi = 2\mu\xi + \left(K - \frac{2\mu}{m}\right)I\operatorname{tr}\xi,$$

$$\xi A\xi = 2\mu\mathring{\xi}^2 + K\operatorname{tr}^2\xi,$$

где μ — модуль сдвига, K — объемный модуль, $\mu > 0$, $K > 0$. Обратный к изотропному тензору также изотропен:

$$\xi A^{-1}\xi = \sup_{\eta\in\mathbb{R}^{m(m+1)/2}}\left\{\xi\cdot\eta - \frac{1}{2}\eta A\eta\right\} = \sup_{\eta}\left\{\mathring{\xi}\cdot\mathring{\eta} + \frac{\operatorname{tr}\xi\operatorname{tr}\eta}{m} - \mu\mathring{\eta}^2 - \right.$$

$$\left. - \frac{K}{2}\operatorname{tr}^2\xi\right\} = \sup_{\eta}\{\mathring{\xi}\cdot\mathring{\eta} - \mu\mathring{\eta}^2\} + \sup_{\eta}\left\{\frac{1}{m}\operatorname{tr}\xi\operatorname{tr}\eta - \frac{K}{2}\operatorname{tr}^2\eta\right\} =$$

$$= \frac{\mathring{\xi}^2}{4\mu} + \frac{\operatorname{tr}^2\xi}{2Km^2}. \tag{2}$$

След тензора A, $\operatorname{tr} A = A_{ijij}$, представим в виде суммы

$$\operatorname{tr} A = \operatorname{tr}_s A + \operatorname{tr}_h A, \quad \operatorname{tr}_h A = \frac{\operatorname{tr}(AI)}{m} = \frac{A_{iikk}}{m}. \tag{3}$$

Первое слагаемое называется девиаторным следом, а второе — шаровым. Для изотропного тензора (1)

$$\operatorname{tr} A = \mu(m-1)(m+2) + Km, \quad \operatorname{tr}_s A = \mu(m-1)(m+2), \quad \operatorname{tr}_h A = mK. \tag{4}$$

Чтобы придать разложению (3) инвариантный смысл, сделаем несколько замечаний.

Пусть A — симметрический оператор в эвклидовом пространстве H, $\{f_i\}$ — ортонормированный базис в H. Величина (Af_i, f_i) не зависит от выбора ортонормированного базиса, называется следом оператора A и обозначается $\operatorname{tr} A$. Если L — подпространство в H и $\{g_i\}$ — базис в L, то полезно ввести величину $\operatorname{tr}_L A = (Ag_i, g_i)$, которая также не зависит от выбора базиса. Очевидно, $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr}_L A + \operatorname{tr}_{L^\perp} A$, где $L^\perp$ — ортогональное дополнение к L.

Пусть теперь A — положительно определенный оператор, A^{-1} — обратный к нему оператор. Тогда справедливо неравенство

$$\operatorname{tr}_L A \operatorname{tr}_L A^{-1} \geqslant (\dim L)^2. \tag{5}$$

Действительно, по неравенству Коши — Буняковского

$$\dim L = (g_i, g_i) = (A^{1/2} g_i, A^{-1/2} g_i) \leqslant (A^{1/2} g_i, A^{1/2} g_i)^{1/2} (A^{-1/2} g_i, A^{-1/2} g_i)^{1/2} \leqslant$$
$$\leqslant (\operatorname{tr}_L A)^{1/2} (\operatorname{tr}_L A^{-1})^{1/2}.$$

В нашем случае H — это пространство $\mathbb{R}^{m(m+1)/2}$ симметрических матриц. Оно разлагается в ортогональную сумму одномерного пространства шаровых матриц (т. е. матриц вида CI) и пространства девиаторов. Этому разложению отвечает представление следа $\operatorname{tr} A$ в виде суммы, которое совпадает с исходным разложением (3). Действительно, базис в пространстве шаровых матриц состоит из элемента $I/\sqrt{m}$ и поэтому

$$\operatorname{tr}_L A = \frac{I}{\sqrt{m}} A \frac{I}{\sqrt{m}} = \frac{IAI}{m} = \frac{\operatorname{tr}(AI)}{m} = \frac{A_{iikk}}{m}.$$

Из общего неравенства (5) имеем

$$4 \operatorname{tr}_s A \operatorname{tr}_s A^{-1} \geqslant (m-1)^2 (m+2)^2, \quad \operatorname{tr}_h A \operatorname{tr}_h A^{-1} \geqslant 1. \tag{6}$$

2. Пусть дан тензор упругости $A(x)$, измеримый по $x \in \mathbb{R}^m$, периодический по каждому аргументу $x_1, \ldots, x_m$ с периодом единица и удовлетворяющий неравенствам

$$\nu_1 \xi^2 \leqslant \xi A_1 \xi \leqslant \xi A(x) \xi \leqslant \xi A_2 \xi, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^{m(m+1)/2} \tag{7}$$

($\nu_1 > 0$, A_1, A_2 — постоянные тензоры). Известно [1], что усредненный или эффективный тензор вычисляется по формуле

$$\xi A^0 \xi = \inf_{u \in H^1_{\text{per}}(\square)} \langle (\xi + e(u)) A(x) (\xi + e(u)) \rangle. \tag{8}$$

Здесь $\square = \{x \in \mathbb{R}^m, |x_i| \leqslant 1/2\}$ — ячейка периодичности, $\langle \cdot \rangle$ — среднее по ячейке периодичности, $H^1_{\text{per}}(\square)$ — замыкание множества всех гладких периодических вектор-функций $u = \{u_1, \ldots, u_m\}$ по соболевской норме $\langle u_i u_i + \nabla u_i \cdot \nabla u_i \rangle^{1/2}$, $e(u) = \{e_{ij}(u)\} = \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right\}$ — тензор деформаций.

Нас интересует прежде всего случай, когда исходный тензор $A(x)$ изотропен.

Теорема 1. *Пусть $A(x)$ — изотропный периодический тензор с модулями $\mu(x)$, $K(x)$ и*

$$\mu_1 = \inf \mu(x), \quad \mu_2 = \sup \mu(x),$$
$$K_1 = \inf K(x), \quad K_2 = \sup K(x).$$

Тогда для усредненного тензора A^0 справедливы оценки

$$-\alpha_1 + \left\langle \frac{1}{\mu + \alpha_1} \right\rangle^{-1} \leqslant \frac{\operatorname{tr}_s A^0}{(m-1)(m+2)} \leqslant -\alpha_2 + \left\langle \frac{1}{\mu + \alpha_2} \right\rangle^{-1}, \tag{9}$$

$$-\beta_1+\langle\frac{1}{K+\beta_1}\rangle^{-1}\leqslant\frac{\operatorname{tr}_h A^0}{m}\leqslant-\beta_2+\langle\frac{1}{K+\beta_2}\rangle^{-1}, \qquad (10)$$

$$\alpha_i=\mu_i\,\frac{2\mu_i(m^2-m+2)+K_i m^2}{2m(2\mu_i+K_i)}, \quad \beta_i=2\,\frac{m-1}{m}\,\mu_i \quad (i=1,2). \qquad (11)$$

которые являются частным случаем общих оценок

$$\frac{4\operatorname{tr}_s(A^0-A_1)^{-1}}{(m-1)(m+2)}\leqslant\frac{1}{\langle\frac{1}{\mu+\alpha_1}\rangle^{-1}-\alpha_1-\mu_1}, \qquad (12)$$

$$m\operatorname{tr}_h(A^0-A_1)^{-1}\leqslant\frac{1}{\langle\frac{1}{K+\beta_1}\rangle^{-1}-\beta_1-K_1}, \qquad (13)$$

$$\frac{4\operatorname{tr}_s(A_2-A^0)^{-1}}{(m-1)(m+2)}\leqslant\frac{1}{\mu_2+\alpha_2-\langle\frac{1}{\mu+\alpha_2}\rangle^{-1}}, \qquad (14)$$

$$m\operatorname{tr}_h(A_2-A^0)^{-1}\leqslant\frac{1}{K_2+\beta_2-\langle\frac{1}{K+\beta_2}\rangle^{-1}}, \qquad (15)$$

где A_i $(i=1, 2)$ — изотропный тензор с модулями μ_i, K_i (оценки (9), (10) *вытекают из этих оценок в силу элементарных неравенств* (6)).

Посмотрим, как выглядят оценки (9), (10) в двухфазном случае. Пусть модули $\mu(x)$, $K(x)$ принимают значения μ_1, μ_2, K_1, K_2. Если p_1, p_2 — объемные доли первой и второй фазы, $\mu_1\leqslant\mu_2$, $K_1\leqslant K_2$, то оценки (9), (10) принимают вид

$$\mu_1+\frac{(\alpha_1+\mu_1)(\mu_2-\mu_1)p_2}{\alpha_1+\mu_1+p_1(\mu_2-\mu_1)}\leqslant\frac{\operatorname{tr}_s A^0}{(m-1)(m+2)}\leqslant\mu_2-$$
$$-\frac{(\alpha_2+\mu_2)(\mu_2-\mu_1)p_1}{\alpha_2+\mu_2-p_2(\mu_2-\mu_1)}, \qquad (16)$$

$$K_1+\frac{(\beta_1+K_1)(K_2-K_1)p_2}{\beta_1+K_1+p_1(K_2-K_1)}\leqslant\frac{\operatorname{tr}_h A^0}{m}\leqslant K_2-\frac{(\beta_2+K_2)(K_2-K_1)p_1}{\beta_2+K_2-p_2(K_2-K_1)}. \qquad (17)$$

Выражения, стоящие слева и справа в написанных неравенствах, — это «границы» Хашина — Штрикмана [2]. В физической литературе имеется огромное число изложений и обобщений этих границ. К настоящему времени известно несколько строго математических подходов к доказательству оценок типа (16), (17). Это прежде всего вариационный метод и метод квазивыпуклости.

Вариационный метод широко представлен в литературе по механике и теории композитов [3], [4]. Математическая версия вариационного метода разработана независимо Коном, Милтоном [5] и автором [6], [7]. Метод квазивыпуклости развивался в работах [8—10]. В настоящей статье применяется вариационный метод. Оценки (12)—(15) получены автором в 1986 г. и опубликованы (без доказательства) в [7]. В это же время Кон и Милтон получили аналогичные оценки для двухфазных сред.

2. Вариационный метод. 1. Нам понадобится один экстремальный принцип, восходящий к Хашину и Штрикману [2]. Сформулируем его в более общей форме, чем это требуется для задачи теории упругости.

Рассмотрим на $\mathbb{R}^N$ простейшую выпуклую функцию $f(s)=\frac{1}{2}(\xi+s)A(\xi+s)$, где A — положительно определенная матрица, ξ — фиксированный вектор из $\mathbb{R}^N$. Сопряженная с f функция f^* имеет вид

$$f^*(s) = \sup_{\eta \in \mathbb{R}^N} \{s \cdot \eta - f(\eta)\} = \frac{1}{2} sA^{-1}s - \xi \cdot s. \tag{18}$$

Из определения (18) сопряженной функции следует неравенство Юнга $f(s) + f^*(\eta) \geqslant s \cdot \eta$. Легко выяснить, когда в этом неравенстве достигается строгое равенство. Из (18) следует

$$f(s) + f^*(f'(s)) = s \cdot f'(s), \tag{19}$$

где $f'(s)$ — градиент функции $f(s)$, $f'(s) = A(\xi + s)$.

Рассмотрим теперь периодическую по $x \in \mathbb{R}^m$ матрицу размера $N \times N$ такую, что $0 < A_1 \leqslant A(x) \leqslant A_2$, где A_1, A_2 — постоянные матрицы. Пусть V — подпространство векторного пространства $(L^2(\square))^N$. Будем считать, что ортогональное дополнение $V^\perp$ содержит все постоянные векторы.

Определим «усредненную» матрицу A^0 так:

$$\frac{1}{2} \xi A^0 \xi = \inf_{v \in V} \langle f(x, v) \rangle, \quad f(x, s) = \frac{1}{2} (\xi + s) A(x) (\xi + s). \tag{20}$$

Лемма 1. *Пусть T — постоянная симметрическая матрица, $0 < T < A_1$. Тогда справедливо равенство*

$$\xi (A^0 - T)^{-1} \xi = \inf_{v, z, \langle z \rangle = \xi} \langle z (A - T)^{-1} z + vTv \rangle, \tag{21}$$

где inf *берется по всем парам v, z таким, что*

$$v \in V, \quad z \in (L^2(\square))^N, \quad Tv + z \in V^\perp. \tag{22}$$

Доказательство. Достаточно установить равенство

$$\frac{1}{2} \xi A^0 \xi = - \inf_{v, z} \langle g^*(x, z) + \varphi(v) - \varphi(\xi) \rangle, \quad \varphi(s) = \frac{1}{2} sTs, \tag{23}$$

где inf берется по множеству (22), а $g(x, s) = f(x, s) - \varphi(\xi + s)$. Действительно, так как $g^*(x, s) = \dfrac{1}{2} s (A - T)^{-1} s - \xi \cdot s$, то

$$\frac{1}{2} \xi A^0 \xi = - \inf_{v, z \in (22)} \langle \frac{1}{2} z (A - T)^{-1} z - \xi \cdot z + \varphi(v) - \varphi(\xi) \rangle.$$

Отсюда следует

$$\frac{1}{2} \xi (A^0 - T) \xi = \sup_{\eta \in \mathbb{R}^N} \left\{ \xi \cdot \eta - \inf_{v, z, \langle z \rangle = \eta} \langle \frac{1}{2} z (A - T)^{-1} z + \varphi(v) \rangle \right\}$$

и поэтому равенство (21) имеет место в силу (18).

Докажем свойство (23). Для $v \in V$

$$\langle f(x, v) \rangle = \langle f(x, v) - \varphi(v + \xi) + \varphi(v) + \varphi(\xi) \rangle,$$

так как $\varphi(v + \xi) = \varphi(v) + \varphi(\xi) + \varphi'(\xi) \cdot v$, $\langle \varphi'(\xi) \cdot v \rangle = 0$. Для v, z, удовлетворяющих условию (22), $2 \langle \varphi(v) \rangle = - \langle z \cdot v \rangle$. Поэтому

$$\langle f(x, v) \rangle = \langle (f(x, v) - \varphi(\xi + v)) - z \cdot v - \varphi(v) + \varphi(\xi) \rangle \geqslant \langle - g^*(x, z) - \\ - \varphi(v) + \varphi(\xi) \rangle,$$

т. е. левая часть (23) не меньше правой. С другой стороны, если v — решение вариационной задачи (20), то $f'(x, v) \in V^\perp$ в силу уравнения Эйлера. Поэтому

$$\langle f(x, v) \rangle = \langle f(x, v) - \varphi(v + \xi) - f'(x, v) \cdot v + \varphi'(v + \xi) \cdot v - \varphi(v) + \varphi(\xi) \rangle = \\ = \langle g(x, v) - g'(x, v) - \varphi(v) + \varphi(\xi) \rangle.$$

Согласно (19) $g(x, v) - g'(x, v) = -g^*(x, z)$, где $z = g'(x, v)$, при этом пара v, z удовлетворяют условию (22), так как $Tv + z = \varphi'(v) + z = f'(x, v) - \varphi'(\xi) \in V^{\perp}$. В результате имеем

$$\langle f(x, v)\rangle = -\langle g^*(x, z) + \varphi(v) - \varphi(\xi)\rangle,$$

т. е. левая часть (23) не больше правой и само равенство (23) доказано.

Аналогично доказывается следующая лемма.

Лемма 2. *Если* $T > A_2$, *то*

$$\xi(T - A^0)^{-1}\xi = \inf_{v, z}\langle z(T - A)^{-1}z - vTv\rangle,$$

где inf *берется по всем* v, z *таким, что*

$$v \in V, \quad z \in (L^2(\square))^N, \quad Tv - z \in V^{\perp}, \quad \langle z\rangle = \xi.$$

2. Рассмотрим основную формулу (8) и применим к ней лемму 1. В данном случае

$$\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^{m(m+1)/2}, \quad V = \{e_{ij}(u), u \in \underline{H}^1_{\text{per}}(\square)\}.$$

Обозначим через T изотропный тензор с модулями $t > 0$, $\theta > 0$,

$$\xi T\xi = 2t\mathring{\xi}^2 + \theta\,\mathrm{tr}^2\,\xi = 2t\xi^2 + \tau\,\mathrm{tr}^2\,\xi, \quad \tau = \theta - \frac{2t}{m}. \tag{24}$$

Считая, что $T < A_1$ (см. (7)) по лемме 1 имеем

$$\xi(A^0 - T)^{-1} = \inf_{u, z}\langle z(A - T)^{-1}z + e(u)Te(u)\rangle, \tag{25}$$

где inf берется по всем парам u, z таким, что

$$u \in \underline{H}^1_{\text{per}}(\square), \quad Te(u) + z \in V^{\perp}, \quad z = \{z_{ij}\}, \quad z_{ij} = z_{ji} \in L^2(\square), \quad \langle z\rangle = \xi.$$

Так как $T\xi = 2t\xi + \tau I\,\mathrm{tr}\,\xi$, то последнее означает

$$2t\langle e(u)\cdot e(\psi)\rangle + \tau\langle \mathrm{div}\,u\,\mathrm{div}\,\psi\rangle = -\langle z\cdot e(\psi)\rangle \quad (\forall\psi \in \underline{H}^1_{\text{per}}(\square)).$$

Учитывая тождество

$$2\langle e(u)\cdot e(\psi)\rangle = \langle\nabla u\cdot\nabla\psi\rangle + \langle\mathrm{div}\,u\,\mathrm{div}\,\psi\rangle,$$

получаем, что u есть решение периодической задачи

$$u \in \underline{H}^1_{\text{per}}(\square), \quad t\Delta u + (t + \tau)\nabla\,\mathrm{div}\,u = -\mathrm{div}\,z. \tag{26}$$

Будем рассматривать не произвольные матрицы $z = \{z_{ij}\}$, а только матрицы вида

$$z = p\mathring{\xi} + \frac{qI\,\mathrm{tr}\,\xi}{m} = p\xi + \frac{(q - p)\,I\,\mathrm{tr}\,\xi}{m}, \quad p, q \in L^2(\square), \quad \langle p\rangle = \langle q\rangle = 1. \tag{27}$$

В этом случае задача (26) принимает вид

$$t\Delta u + (t + \tau)\nabla\,\mathrm{div}\,u = -\xi\nabla p - \frac{1}{m}\nabla(q - p)\,\mathrm{tr}\,\xi. \tag{28}$$

Введем на $\mathbb{R}^{m(m+1)/2}$ квадратичную форму

$$F(p, q, \xi) = \langle e(u)Te(u)\rangle = -\langle p\xi\cdot\nabla u\rangle - \frac{\mathrm{tr}\,\xi}{m}\langle(q - p)\,\mathrm{div}\,u\rangle \tag{29}$$

и символом $F(p, q)$ обозначим соответствующий тензор. Важную роль будет играть то обстоятельство, что след тензора может быть вычислен в явном виде.

Лемма 3. *Справедливо равенство*

$$\operatorname{tr} F = \frac{m(m-1)(2t+\theta)\langle(p-\langle p\rangle)^2\rangle}{2t[2t(m-1)+\theta m]} + \frac{\langle(q-\langle q\rangle)^2\rangle}{2t(m-1)+\theta m}. \qquad (30)$$

(Эту лемму докажем далее.) Заметим, что первое слагаемое в (30) есть девиаторный след тензора F, а второе — шаровой. Это следует из очевидных равенств $\operatorname{tr}_s F(p, q) = \operatorname{tr} F(p, 0)$, $\operatorname{tr}_h F(p, q) = \operatorname{tr} F(0, q)$.

Возьмем в (27) $q = 0$. Тогда $z = p\mathring{\xi}$ и согласно (25)

$$\mathring{\xi}(A^0 - T)^{-1}\mathring{\xi} \leqslant \langle p^2\mathring{\xi}(A-T)^{-1}\mathring{\xi}\rangle + F(p, 0, \mathring{\xi}).$$

Отсюда следует неравенство

$$\operatorname{tr}_s(A^0 - T)^{-1} \leqslant \langle p^2 \operatorname{tr}_s(A-T)^{-1}\rangle + \operatorname{tr}_s F \quad (\forall p \in L^2(\square), \langle p\rangle = 1). \quad (31)$$

Аналогично

$$\operatorname{tr}_h(A^0 - T)^{-1} \leqslant \langle q^2 \operatorname{tr}_h(A-T)^{-1}\rangle + \operatorname{tr}_h F \quad (\forall q \in L^2(\square), \langle q\rangle = 1). \quad (32)$$

Дальнейший анализ проведем для изотропного тензора $A(x)$ с модулями $\mu(x)$, $K(x)$. Параметры t, θ из (24) должны удовлетворять условию $0 < t < \mu_1$, $0 < \theta < K_1$. В данном случае (см. (2), (3))

$$\operatorname{tr}_s(A-T)^{-1} = \frac{(m-1)(m+2)}{4(\mu - t)}, \quad \operatorname{tr}_h(A-T)^{-1} = \frac{1}{m(K-\theta)}$$

и из (31), (32) имеем

$$\frac{4\operatorname{tr}_s(A^0-T)^{-1}}{(m-1)(m+2)} \leqslant \inf_{p\in L^2(\square), \langle p\rangle=1} \left\langle \frac{p^2}{\mu - t} + \frac{2(2t+\theta)m(p-\langle p\rangle)^2}{t(m+2)[2t(m-1)+\theta m]}\right\rangle, \quad (33)$$

$$m\operatorname{tr}_h(A^0-T)^{-1} \leqslant \inf_{q\in L^2(\square), \langle q\rangle=1} \left\langle \frac{q^2}{K-\theta} + \frac{(q-\langle q\rangle)^2}{2t\frac{m-1}{m}+\theta}\right\rangle. \quad (34)$$

Для вычисления величин, стоящих справа, привлечем следующую лемму.

Лемма 4. *Имеет место равенство*

$$\mathcal{J} = \inf_{p\in L^2(\square), \langle p\rangle=1} \langle \rho^{-1}p^2 + l^{-1}(p-\langle p\rangle)^2\rangle = \frac{1}{\left\langle \frac{1}{\rho + l}\right\rangle^{-1} - l}, \quad (35)$$

где $\rho^{-1} \in L^\infty(\square)$, $l \in \mathbb{R}^1$, $\inf(\rho^{-1} + l^{-1}) > 0$.

Доказательство. Поскольку $\langle(p-\langle p\rangle)^2\rangle = \langle p^2\rangle - 1$, то $\mathcal{J} = -l^{-1} + \inf\langle ap^2\rangle$, $a = \rho^{-1} + l^{-1}$. Уравнение Эйлера имеет вид $ap \equiv \mathrm{const}$, поэтому $p = a^{-1}\langle a^{-1}\rangle^{-1}$, $\langle ap^2\rangle = \langle a^{-1}\rangle^{-1}$. Отсюда следует равенство (35). Вычисляя правые части в (33), (34) по формуле (35) и полагая $t = \mu_1$, $\theta = K_1$ (т. е. $T = A_1$), после несложных преобразований получаем оценки (12), (13). Например, правая часть в (34) равна

$$\frac{1}{\left\langle \frac{1}{K + 2t\frac{m-1}{m}}\right\rangle^{-1} - 2t\frac{m-1}{m} - \theta}.$$

Положив $t = \mu_1$, $\theta = K_1$, будем иметь правую часть в оценке (13). Аналогично (с помощью леммы 2) доказываются и оценки (14), (15). Тем самым теорема 3 доказана.

3. Доказательство леммы 3. Положим в (27) $\xi = \gamma^{kr}$, где

$$\gamma^{kr} = \{\gamma_{ij}^{kr}\}, \quad \gamma_{ij}^{kr} = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jr} + \delta_{ir}\delta_{jk}).$$

Тогда получим периодические задачи

$$t\Delta u_j^{kr} + (t+\tau)\frac{\partial}{\partial x_j}\operatorname{div} u^{kr} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial p}{\partial x_r}\delta_{jk} + \frac{\partial p}{\partial x_k}\delta_{jr}\right) - \frac{\delta_{kr}}{m}\frac{\partial}{\partial x_j}(q-p)$$

$$(j, k, r = 1, 2, \ldots, m). \tag{36}$$

По определению следа

$$\operatorname{tr} F = \sum_{k,r} F(p, q, \gamma^{kr}) = \sum_{k,r} \langle e(u^{kr})\, Te(u^{kr})\rangle$$

(при $k \neq r$ нормы матриц γ^{kr} равны $\sqrt{2}/2$, но они суммируются дважды). Отсюда (см. (28))

$$\operatorname{tr} F = -\langle p \sum_{k,r} e_{kr}(u^{kr})\rangle - \frac{1}{m}\langle (q-p)\sum_{k,r}\delta_{kr}\operatorname{div} u^{kr}\rangle. \tag{37}$$

Можно считать, что p, q — гладкие периодические функции, $\langle p\rangle = \langle q\rangle = 0$. Из (36) находим

$$(2t+\tau)\,\Delta\operatorname{div} u^{kr} = -\frac{\partial^2 p}{\partial x_k \partial x_r} - \frac{\delta_{kr}}{m}\Delta(q-p),$$

$$(2t+\tau)\operatorname{div} u^{kr} = -\Delta^{-1}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x_k\partial x_r}\right) - \frac{\delta_{kr}}{m}(q-p)$$

($\Delta^{-1}f$, где f — гладкая периодическая функция, $\langle f\rangle = 0$, обозначается решение периодической задачи $\Delta u = f$, $\langle u\rangle = 0$). Отсюда

$$\sum \delta_{kr}\operatorname{div} u^{kr} = \frac{-p-(q-p)}{2t+\tau} = -\frac{q}{2t+\tau}, \tag{38}$$

$$(2t+\tau)\sum\frac{\partial^2\operatorname{div} u^{kr}}{\partial x_k\partial x_r} = -\sum\Delta^{-1}\left(\frac{\partial^4 p}{\partial x_k^2\partial x_r^2}\right) - \sum\frac{\delta_{kr}}{m}\frac{\partial^2(q-p)}{\partial x_k\partial x_r} =$$

$$= -\frac{(m-1)}{m}\Delta p - \frac{\Delta q}{m}. \tag{39}$$

Далее, из уравнения (37) имеем

$$t\Delta e_{kr}(u^{kr}) + (t+\tau)\frac{\partial^2\operatorname{div} u^{kr}}{\partial x_k\partial x_r} = -\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x_k\partial x_r}\delta_{kr} + \frac{\partial^2 p}{\partial x_r\partial x_r}\delta_{kk} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 p}{\partial x_r\partial x_k}\delta_{rk} + \frac{\partial^2 p}{\partial x_k\partial x_k}\delta_{rr}\right) - \frac{\delta_{kr}}{m}\frac{\partial^2(q-p)}{\partial x_k\partial x_r}.$$

Полагая $B = \sum e_{kr}(u^{kr})$, с помощью (39) получаем

$$t\Delta B + (t+\tau)\sum\frac{\partial^2\operatorname{div} u^{kr}}{\partial x_k\partial x_r} = -\frac{(2m+2)}{4}\Delta p - \frac{\Delta(q-p)}{m},$$

$$t\Delta B = -\frac{(2m+2)}{4}\Delta p - \frac{\Delta(q-p)}{m} + \frac{t+\tau}{2t+\tau}\left(\frac{m-1}{m}\Delta p + \frac{\Delta q}{m}\right) =$$

$$= -\frac{(m-1)(2t+\theta)}{2t+\tau}\Delta p - \frac{t\Delta q}{2t+\tau},$$

$$B = -\frac{(m-1)(2t+\theta)\,p}{t(2t+\tau)} - \frac{q}{m(2t+\tau)} \quad \left(\tau = \theta - \frac{2t}{m}\right).$$

Отсюда с учетом (38), (39) следует равенство (29).

3. Операторы четвертого порядка. С периодическим

тензором $A(x)$ свяжем семейство операторов четвертого порядка

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\left(A_{ijkr}(\varepsilon^{-1}x)\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_r}\right)$$

где $\varepsilon \to 0$. Удобно положить $D_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$, $D = \{D_{ij}\}$. Известно, что усредненный тензор A^0 вычисляется по формуле

$$\xi A^0 \xi = \inf_{u \in H^2_{\text{per}}(\square)} \langle (\xi + Du) A(x) (\xi + Du) \rangle, \tag{40}$$

где $H^2_{\text{per}}(\square)$ — замыкание множества всех гладких периодических функций в соболевском пространстве $H^2(\square)$.

Нас будет интересовать изотропный периодический тензор $A(x)$ с «модулями» $\mu(x)$, $K(x)$. Соответствующие операторы встречаются в теории пластин. Исходная формула (40) аналогична (8) (вместо тензора деформаций стоит тензор вторых произвольных). Вообще случай операторов четвертого порядка вполне аналогичен случаю линейной упругости и даже проще последнего. Оказывается, что справедливы все написанные в п. 1 оценки, но с другими константами α_i, β_i $(i = 1, 2)$, а именно:

$$\alpha_i = \frac{2(m^2 + m - 4) + (m+2)mK_i}{4}, \quad \beta_i = (m-1)(2\mu_i + K_i) \quad (i = 1, 2).$$

Важен аналог леммы 3, так как с ней связаны различия в формулах для α_i, β_i. Как и ранее, определим форму $F(p, q, \xi)$ равенством $F(p, q, \xi) = \langle DuTDu \rangle$, где T — изотропный тензор (24), а u находится из условия

$$u \in H^2_{\text{per}}(\square), \quad TD(u) - p\mathring{\xi} - \frac{1}{m} qI \operatorname{tr} \xi \in V^{\perp},$$

$$V = \{D_{ij}(u), \quad u \in H^2_{\text{per}}(\square)\}, \quad p, q \in L^2(\square), \quad \langle p \rangle = \langle q \rangle = 1. \tag{41}$$

Лемма 4. *Справедливо равенство*

$$\operatorname{tr} F = \frac{(m-1)\langle (p - \langle p \rangle)^2 + \langle (q - \langle q \rangle)^2 \rangle}{m(2t + \tau)}. \tag{42}$$

Доказательство. Положим в (41) $\xi = \gamma^{kr}$. Тогда

$$p\mathring{\xi} + \frac{1}{m} qI \operatorname{tr} \xi = p\gamma^{kr} + hI\delta_{kr}, \quad h = \frac{q - p}{m}.$$

Поскольку $T\xi = 2t\xi + \tau I \operatorname{tr} \xi$, то из условия (41) следует

$$\langle TD(u^{kr}) \cdot D(\psi) \rangle = -2t \langle D(u^{kr}) \cdot D(\psi) \rangle - \tau \langle \Delta u^{kr} \Delta \psi \rangle =$$
$$= -\delta_{kr} \langle h \Delta \psi \rangle - \langle pD_{kr}(\psi) \rangle \quad (\forall \psi \in H^2_{\text{per}}(\square)). \tag{43}$$

Так как $\langle D(u) \cdot D(\psi) \rangle = \langle \Delta u \Delta \psi \rangle$, то для u^{kr} получаем периодическую задачу

$$u^{kr} \in H^2_{\text{per}}(\square), \quad (2t + \tau)\Delta^2 u^{kr} = -\delta_{kr}\Delta h - D_{kr}p. \tag{44}$$

Из (43) следует

$$\langle D(u^{kr}) TD(u^{kr}) \rangle = -\delta_{kr} \langle h \Delta u^{kr} \rangle - \langle pD_{kr}(u^{kr}) \rangle,$$
$$\operatorname{tr} F = \sum_{k,r} \langle D(u^{kr}) TD(u^{kr}) \rangle = -\langle hB \rangle - \langle pC \rangle,$$
$$B = \sum \delta_{kr}\Delta u^{kr}, \quad C = \sum D_{kr}(u^{kr}). \tag{45}$$

Из уравнения (42) имеем

$$-(2t+\tau)\,\Delta C = m\Delta h + \Delta p, \quad C = -\frac{m\,(h - \langle h\rangle) + (p - \langle p\rangle)}{2t+\tau},$$

$$-(2t+\tau)\,\Delta^2 B = \Delta^2 h + \Delta^2 p, \quad B = -\frac{(p - \langle p\rangle) + (h - \langle h\rangle)}{2t+\tau}.$$

Отсюда и из (45) следует равенство (42).

3. Аналог теоремы полиа — Шиффера. 1. Интересные свойства оценок (16), (17) обнаруживаются для периодических дисперсных сред с малой объемной долей включений. Пусть задана ограниченная область $B \subset \square$ с локально гладкой границей, а периодический тензор $A\,(x)$ имеет структуру

$$A\,(x) = A_1 + (A_2 - A_1)\,\chi\,(\omega x), \quad x \in \square = \{|\,x_i\,| \leqslant 1/2\}, \tag{46}$$

где $\chi\,(x)$ — характеристическая функция множества B, $\omega > 0$ — большой параметр, A_1 и A_2 — изотропные тензоры с модулями μ_1, K_1 и μ_2, K_2. Усредненный тензор A^0 зависит от ω как от параметра и нетрудно найти первый член разложения по степеням ω^{-1}.

Лемма 5. *При $\omega \to \infty$ справедливо соотношение*

$$A^0 = A_1 + \omega^{-m} L + o\,(\omega^{-m}). \tag{47}$$

Здесь L — тензор, определенный равенством

$$\xi L \xi = |\,B\,|\,\xi\,(A_2 - A_1)\,\xi + \inf_{u \in \underline{H}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^m)} \int_{\mathbb{R}^m} \{e\,(u)\,T\,(x)\,e\,(u) - 2\xi\,(T\,(x) - A_1) e\,(u)\}\,dx, \tag{48}$$

$$T\,(x) = \begin{cases} A_2, & x \in B, \\ A_1, & x \in \mathbb{R}^m \setminus B, \end{cases}$$

$|\,B\,|$ — объем области B.

Эту лемму (по-существу хорошо известную) докажем далее.

В случае, когда B — шар, тензор L вычисляется явно, именно: L изотропен и соответствующие модули равны

$$\frac{(\alpha_1 + \mu_1)(\mu_2 - \mu_1)\,|\,B\,|}{\alpha_1 + \mu_2}, \quad \frac{(\beta_1 + K_1)(K_2 - K_1)\,|\,B\,|}{\beta_1 + K_2} \tag{49}$$

(см. по этому поводу книгу Кристансена [3]). Положив, что $A_1 \leqslant A_2$, сопоставим формулу (47) с левой оценкой (16). Тогда получим

$$\frac{\mathrm{tr}_s A^0}{(m-1)(m+2)} = \mu_1 + \frac{\omega^{-m}\,\mathrm{tr}_s\,L}{(m-1)(m+2)} + o\,(\omega^{-m}) \geqslant \mu_1 +$$

$$+ \frac{\omega^{-m}\,(\alpha_1 + \mu_1)(\mu_2 - \mu_1)\,|\,B\,|}{\alpha_1 + \mu_2} + o\,(\omega^{-m}),$$

$$\frac{\mathrm{tr}_s\,L}{(m-1)(m+2)} \geqslant \frac{(\alpha_1 + \mu_1)(\mu_2 - \mu_1)\,|\,B\,|}{\alpha_1 + \mu_2}, \tag{50}$$

т. е. девиаторный след тензора L для тела B не меньше девиаторного следа тензора L для шара того же объема. Аналогичное свойство выполнено и для шарового следа.

Особый интерес представляет тот случай, когда дисперсная фаза является абсолютно твердой, т. е. $\mu_2 = K_2 = \infty$. В связи с этим определим тензор P равенством

$$\xi P \xi = \inf_{u \in H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^m \setminus B),\, u|_{\partial B} = \xi x} \int_{\mathbb{R}^m \setminus B} e\,(u)\,A_1 e\,(u)\,dx. \tag{51}$$

В случае шара P — изотропный тензор с модулями $\alpha_1|B|$, $\beta_1|B|$. Правая часть (48) только увеличивается, если минимизировать по $u \in H^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^m)$, $u|_B = \xi x$. Поэтому

$$\xi L \xi \leqslant |B| \xi (A_2 - A_1) \xi + |B| \xi A_2 \xi + \xi P \xi - 2\xi (A_2 - A_1) \xi = \xi P \xi + \xi A_1 \xi,$$

т. е. $L \leqslant P + A_1$ при любом $\mu_2 > 0$, $K_2 > 0$. Полагая в неравенстве (50) $\mu_2 = K_2 = \infty$, получаем

$$\frac{\operatorname{tr}_s P}{(m-1)(m+2)} \geqslant \alpha_1 |B|.$$

Другими словами, девиаторный след тензора P для тела B не меньше девиаторного следа P для шара того же объема. Аналогичное свойство справедливо и для шарового следа.

Представляет интерес также случай пористой среды, когда $\mu_2 = K_2 = 0$. Определим тензор M равенством

$$\xi M \xi = - \inf_{u \in H^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^m \setminus B)} \left\{ \int_{\mathbb{R}^m \setminus B} e(u) A_1 e(u)\, dx - 2 \int_{\partial B} n (A_1 \xi) u dS \right\}, \tag{52}$$

n — единичная внешняя нормаль к ∂B. Если B — шар, то M — изотропный тензор с модулями $\alpha_1^{-1}|B|$, $\beta_1^{-1}|B|$. В общем случае справедливы неравенства

$$\operatorname{tr}_s M \geqslant (m-1)(m+2)\alpha_1^{-1}|B|, \quad \operatorname{tr}_h M \geqslant m\beta_1^{-1}|B|,$$

т. е. следы тензора M для тела B не меньше следов тензора M для шара того же объема.

З а м е ч а н и е. Тензоры P и M аналогичны известным тензорам поляризации и виртуальной массы [11], последние определяются с помощью оператора Лапласа. Минимальное свойство шара в терминах виртуальной массы было высказано в качестве гипотезы Полиа и доказано Шиффером [12].

2. Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы 5. Пусть u — решение вариационной задачи (8). Уравнение Эйлера имеет вид

$$u \in H^1_{\text{per}}(\square), \quad \operatorname{div}(A(x)(\xi + e(u)) = 0 \text{ в } \mathbb{R}^m. \tag{53}$$

Отсюда

$$\xi A^0 \xi = \int_{\square} (\xi + e(u)) A(x) (\xi + e(u))\, dx = \int_{\square} \xi A(x) (\xi + e(u))\, dx.$$

Положим

$$u^{\omega}(x) = \omega u(\omega^{-1} x), \quad \square_{\omega} = \{|x_i| \leqslant \omega/2\}.$$

Тогда (см. (46))

$$\xi (A^0 - A_1) \xi = \omega^{-m} \int_B \xi (A_2 - A_1)(\xi + e(u^{\omega}))\, dx. \tag{54}$$

Изучим поведение u^{ω} при $\omega \to \infty$. Согласно (53)

$$\int_{\square} e(u) A(x) e(u)\, dx = - \int_{\square} \xi A(x) e(u)\, dx = - \int_{\square} \xi (A(x) - A_1) e(u)\, dx.$$

Поэтому

$$\int_{\square_{\omega}} e(u^{\omega}) T(x) e(u^{\omega})\, dx = - \int_{\square_{\omega}} \xi (T(x) - A_1) e(u^{\omega}) = - \int_B \xi (A_2 - A_1) e(u^{\omega})\, dx \leqslant$$

$$\leqslant |B|^{1/2} |A_2 - A_1| |\xi| \Big(\int_{\square^{\omega}} |e(u^{\omega})^2\, dx \Big)^{1/2}.$$

Отсюда следует оценка

$$\int_{\square_{\omega}} |e(u^{\omega})|^2\, dx \leqslant C,$$

где C не зависит от ω. Если v_{ij}^0 — слабая предельная точка последовательности $e_{ij}(u^\omega)$ в $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^m)$, то $v_{ij}^0 \in L^2(\mathbb{R}^m)$, матрица $v^0 = \{v_{ij}^0\}$ потенциальна, т. е. $v^0 = e(u^0)$, $u^0 \in H^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^m)$. Так как (см. (51))

$$\operatorname{div}(T(x)(\xi + e(u^\omega)) = 0 \text{ в } \square_\omega,$$

то

$$\operatorname{div}(T(x)\, e(u^0) + (T(x) - A_1)\,\xi) = 0 \text{ в } \mathbb{R}^m.$$

Мы получили уравнение Эйлера задачи (51). Из (54) следует

$$\omega^m \xi (A^0 - A_1)\,\xi = \int_B \xi (A_2 - A_1)(\xi + e(u^0))\,dx + o(1) = |B|\,\xi (A_2 - A_1)\,\xi + \\ + \int_B \xi (A_2 - A_1)\, e(u^0)\,dx.$$

Выражение справа равно L и поэтому лемма доказана.

1. *Bensousan A., Lions I. L., Papanicolaou G.* Asymptotic Analysis for Periodic Structure.— Amsterdam : North-Holland, 1978.— 572 p.
2. *Hachin Z., Shtrikman S.* A variational approach to the theory of elastic behavior of multiphase materials // J. Mech. and Phys. Solids.— 1963.— 11.— P. 127—140.
3. *Кристенсен Р.* Введение в механику композитов.— М. : Наука, 1982.— 420 с.
4. *Шермергор Т. Д.* Теория упругости микронеоднородных сред.— М. : Наука, 1977.— 510 с.
5. *Milton G. W., Kohn R. V.* Variational bounds on the effective moduli of anisotropic composites // Mech. and Phys. Solids.— 1988.— **36**, N 6.— P. 597—629.
6. *Жиков В. В.* Об оценках для следа усредненной матрицы // Мат. заметки.— 1986.— **40**, № 2.— С. 226—237.
7. *Жиков В. В.* Об оценках для следа усредненного тензора // Докл. АН СССР.— 1988.— **229**, № 4.— С. 796—800.
8. *Лурье К. А., Черкаев А. В.* Точные оценки приводимости композитов, образованных двумя изотропными проводящими средами, взятыми в заданной пропорции.— Л., 1982.— 140 с.— (Препринт / АН СССР. Физ.-техн. ин-т; 82.783).
9. *Murat F., Tartar L.* Calcul des variations et homogenization. In les Methodes de l'Homogeneisation : Theorie et Applications en Physique. Coll. de la Dir. des Etudes et Recherches d'Electricite de France.— Paris : Eyrolles, 1985.— 319 p.
10. *Francfort G. A., Murat F.* Homogenization and optimal bouds in linear elesticity // Arch. Ration. Mech. and Anal.— 1986.— **94**.— P. 307—325.
11. *Полиа Г., Сеге Г.* Изометрические неравенства в математической физике.— М. : Физматгиз, 1962.— 336 с.
12. *Shiffer M.* Sur la polarisation et la masse virtuelle // C. r. Acad. sci. Paris.— 1975.— **244**, N 26,— P. 3118—3120.

Получено 02.08.80